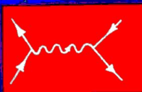
李淮江　编著



# 量子场论导引

云南科技出版社

ISBN 7-5416-0231-0/O·2　定价：12.60 元

# 量子场论导引

李淮江　编著

云南科技出版社

责任编辑：戴　彦
封面设计：武　斌

量子场论导引　　李淮江　编著

云南科技出版社出版发行（昆明市书林街100号）
云南新华印刷厂印装　云南省新华书店经销

开本：787×1092 1/16　印张：27.25　字数：618,000
1989年10月第1版　1989年10月第1次印刷
印数：1—1,500

ISBN 7-5416-0231-0/O·2　定价：12.60元

# 前　言

物理学号称“科学技术之母”．物理学的主体乃是对于物质结构层次和时空观的探索．正是这种探索带来了生产技术的发展变革．而现今的粒子物理学则是处于这种探索的前沿，因此，作为这一研究前沿的理论工具，量子场论在物理学里处于十分重要的地位．现今，量子场论的用处已超出粒子物理学的范围，它在统计物理、固体物理等物理学分支里均获得了许多应用．

在许多高等院校里，量子场论是一门必修课或选修课．因而适合于初学者的基础教材就十分急需．近十余年出版的中外文量子场论专著，其着眼点多是把读者尽快引导到研究前沿，起点均较高．这些深奥的专著的确是深入学习的好书，但初学者更急需一本入门书．本书编写的指导思想是，作为一本针对初学者的基础教材和教学参考书，应具有如下诸特点：（1）它既要降低起点，又要具有适当的深度，以便使读者既易入门，又能为学习现有专著打下必要的基础；（2）它应尽可能清晰透彻地阐述物理思想和物理概念．物理理论的思想、概念是其灵魂，数学则是构成理论的形式体系、揭露物理实质、获得物理结果的必要工具，因此，这两方面应密切结合起来．在保证叙述连贯性的前提下，尽可能详述数学推算方法，这样，教师在课堂上不必进行繁琐的推算，而把时间主要用于讲解物理内容；（3）学生的知识最终来自他们自己的独立钻研，教师的讲授旨在为学生课后的钻研指明道路，并通过讲授传授具体的治学方法．因此，书应写得详细易读，应充分考虑到初学者（特别是自学者）的困难，这样，教材的大部分内容就可在教师指导下让学生自己阅读，借以培养自学能力；（4）量子场论并不是最终的理论．为了培养青年一代的创造力，教材既要以介绍正统理论为主要任务，又要适当提出问题，启发读者自己的思考．

编者虽然学识浅薄，但在上述指导思想的促使下，结合教学需要于1981年上半年写成本书初稿．此后在教学基础上几经修改而形成本书．本书在出版前曾送往许多兄弟院校征求意见，并得到有关专家和许多老师的热情支持和肯定，普遍认为本书适于作基础教材也可供有关专业的研究生参考，可望对量子场论的教学有益．

本书内容可划分为六个部分：第一部分（第一章）详述相对论波动方程的有关知识，这是全书的基础；第二部分(第二至四章)中心问题是量子化，这是初学者学习量子场论时遇到的一个难点，本书没有一开始就讲述正则量子化的形式体系，而是首先用一章（第二章）来叙述从量子力学过渡到量子场论时物理思想和概念的变化；第三部分(第五至七章)叙述自由场的量子理论，其中对Feynman传播函数、不定度规等，较多地谈了编者自己的看法；第四部分(第八至十章)叙述相互作用和微扰论，举了较多的相互作用实例，其中既有早期的典型实例，也有近十余年来在理论和实验两方面处于重要地位的实例．在第十章里，注意把理论结果与实验事实进行比较；第五部分（第十一章）

介绍QED重整化的基本思想和基本方法。重整化是初学者学习量子场论的又一难点。本书在保持科学性和严谨性的前提下，力图把这一章叙述得易于理解。初学者对发散积分的处理感到特别困难，针对这一点，书中不但详细介绍了Pauli-Villars正规化和维数正规化（后者是近十余年发展起来的处理发散积分的新方法）的基本思想和基本方法，而且以旋量电动力学的三个基本的单圈图为例进行了详细的计算；第六部分是附录，其中，附录三详述了Pauli度规和Bjorken-Drell度规，并给出两种度规之间的联系与过渡（这在同类书里是没有的），这样做，旨在帮助读者阅读不同度规的参考书刊。最后的附录四给出计算正规化积分的公式，并对其中的某些公式作了证明。此外，为了配合教学需要，每章末都附有一定数量的习题和思考题，其中少数打“*”号的题并无现成答案，读者可充分发挥自己的思考。本书中涉及电磁学的量均采用洛伦兹-亥维赛单位制，并取 $\hbar = c = 1$。

本书若作为教材，教师只需择重讲解，学生就可顺利地阅读。对于自学者，倘若已具有较好的初等量子力学基础，就可顺利阅读本书。

复旦大学倪光炯教授对编写本书给予了热情的支持、鼓励，并在百忙中审阅了本书的书稿，云南大学王仲永教授对本书出版十分关心，并向出版社推荐本书的书稿，编者在此对两位教授致以衷心感谢；国内许多兄弟院校的老师曾先后来信对书稿给予热情肯定并提出宝贵的修改意见，编者对各位老师深表谢意；云南科技出版社的单沛尧总编、责任编辑戴彦同志为本书出版和编辑做了大量工作。云南师范大学校领导、科研处以及物理系党政领导同志热情关心本书的出版并给予巨大的支持，编者在此一并致以衷心的感谢。由于编者水平有限，书中难免还有不妥之处，欢迎读者批评指正。

李淮江

1986年8月于云南师范大学

# 目　录

# 第一章　相对论量子力学方程

相对论性量子力学是人们把量子论和相对论结合起来的第一次尝试，其目的是要把描写低速微观现象的非相对论量子力学推广到高速微观现象的领域。由于这样建立起来的相对论波动方程存在着负能困难和负几率困难，因而这第一次尝试未能圆满地取得预期的成功。虽然如此，这一尝试却为量子场论的建立奠定了基础。

怎样把非相对论量子力学推广到相对论领域里去呢：根据爱因斯坦发展了的相对性原理，在不同的 Lorentz 参考系里，物理规律是相同的。这就意味着物理学的基本方程式和关系式应当具有 Lorentz 不变性（相对论原则）。因此，相对论量子力学的基本方程式必须既具有 Lorentz 不变性，又符合量子力学的基本原理。在本世纪二十年代末期，Klein和Dirac 等人正是从这样的考虑出发建立了自旋零和自旋$\frac{1}{2}$粒子的相对论波动方程式。

## §1　Klein-Gordon方程

1926—1927年Klein和Gordon建立了第一个相对论波动方程式，即Klein-Gordon方程式（以下简称K—G方程式）。在非相对论量子力学里，自由粒子的Schrödinger 方程式是用如下的量子化手续建立的：首先假定如下的算符对应关系：

$$\left.\begin{aligned} E &\longrightarrow i\frac{\partial}{\partial t} \\ \mathbf{k} &\longrightarrow -i\nabla=\hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{x} &\longrightarrow \hat{\mathbf{x}}=\mathbf{x} \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

其中，$E$、$\mathbf{k}$ 分别是单粒子能量、动量，$\mathbf{x}$ 是空间点的坐标。其次，假定动量算符 $\hat{\mathbf{k}}$ 和坐标算符 $\mathbf{x}$ 满足如下对易关系：

$$[x_l, \hat{k}_j]=i\delta_{jl}, \quad (\hbar=1, j、l=1, 2, 3) \tag{1.2}$$

在上述两点假设下，立即可从经典的能量、动量关系建立起如下的算符关系：

$$i\frac{\partial}{\partial t}=\hat{H}, \tag{1.3}$$

这里，$\hat{H}=-\frac{1}{2m}\nabla^2$是自由粒子的Hamilton算符，由于微观粒子具有波粒二象性，尚

需假定其状态要用Hilbert空间的态矢量 $\psi(\mathbf{x},t)$ 来描写．将（1.3）式作用于态矢量 $\psi$，便得到自由粒子的Schrödinger方程式

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{x},t)=\hat{H}\psi(\mathbf{x},t). \tag{1.4}$$

方程式（1.4）包含对时间坐标的一阶导数和对空间坐标的二阶导数，时间与空间处于不对称的地位，因而它不具有 Lorentz 不变性．为了建立相对论波动方程式，人们自然会想到把经典相对论力学的能量、动量关系式

$$E=\sqrt{|\mathbf{k}|^2+m^2}\qquad(c=1) \tag{1.5}$$

拿来进行（1.1）式的算符对应．但是，这样建立起来的波动方程式

$$i\frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{x},t)=\sqrt{-\nabla^2+m^2}\,\phi(\mathbf{x},t) \tag{1.6}$$

仍然没有对称地处理空间与时间，而且方程右边出现了平方根算符，这一算符包含着微分算子"$\nabla^2$"的高次幂，因而一点的 $\phi(\mathbf{x},t)$ 的变化不再由无限接近的点的 $\phi$ 值来决定，而要由 $\phi$ 在某一空间范围的分布来决定．因此，以方程（1.6）为基础的相对论性量子力学理论不再是一个定域的量子力学理论[注1]．倘若将（1.6）式两边平方，不但不能消除右边的平方根算符，而且还会出现平方项 $(\frac{\partial\phi}{\partial t})^2$，从而违背了量子力学的态叠加原理．解决上述困难的办法是，利用算符 $i\frac{\partial}{\partial t}$ 和 $\sqrt{-\nabla^2+m^2}$ 的对易性，将（1.6）式两边的算符均重复作用一次，由此得到

$$-\frac{\partial}{\partial t^2}\phi(\mathbf{x},t)=\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\sqrt{-\nabla^2+m^2}\right)\phi(\mathbf{x},t)=$$

$$=\left(\sqrt{-\nabla^2+m^2}\right)\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)\phi(\mathbf{x},t)=(-\nabla^2+m^2)\phi(\mathbf{x},t)$$

即

$$\left(\nabla^2-\frac{\partial^2}{\partial t^2}-m^2\right)\phi(\mathbf{x},t)=0 \tag{1.7}$$

此式便是自由粒子的K—G方程式．在K—G方程里，对时间坐标的导数和对空间坐标的导数都是二阶导数，即把空间与时间同等对待．因此，可以期望方程（1.7）具有Lorentz不变性．为了证明的确如此，首先把（1.7）式写成四维形式：

$$(\Box-m^2)\phi(x)=0. \tag{1.8}$$

---

〔注1〕关于理论的定域性，可参阅 J. D. Bjorken, S. D. Drell,《Relativisic Quantum Fields》，pp. 3—5，McGraw-Hill，1965.

这里，$x=(\mathbf{x},\ it)=(x_1, x_2, x_3, x_4)$是Minkowski空间的坐标矢量．而算符$\Box$称为d'Alembert算符，它由下式定义：

$$\Box=\nabla^2-\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\partial_\mu\partial_\mu, \tag{1.9}$$

$\partial_\mu\equiv\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$．今后若不特别声明，凡同一乘积项里出现两个相同的Lorentz指标，便表示从1到4求和．算符$\Box$是四矢$\dfrac{\partial}{\partial x}=\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1},\ \cdots,\ \dfrac{\partial}{\partial x_4}\right)$的模平方，因而它是一个Lorentz不变的算符．假定在Lorentz变换

$$x'_\mu=a_{\mu\nu}x_\nu \qquad (\mu=1,2,3,4) \tag{1.10}$$

之下，$\phi(x)$按下式变换：

$$\phi'(x')=S\phi(x), \tag{1.11}$$

则可将（1.8）式中的各个量用变换后的量来表示：

$$(\Box'-m^2)S^{-1}\phi'(x')=0. \tag{1.12}$$

要使方程（1.12）在形式上回到方程（1.8），必须、仅需$S$是一个恒等变换，即$S=S^{-1}=I$，或

$$\phi'(x')=\phi(x). \tag{1.13}$$

这时，（1.12）式成为

$$(\Box'-m^2)\phi'(x')=0. \tag{1.14}$$

此式就是在新参考系里写出的K—G方程式，它与（1.8）式具有相同形式，这就表明K—G方程的确具有Lorentz不变性．但必须加上（1.13）式之限制，即波函数$\phi(x)$必须是Lorentz标量函数．我们以后将会看到，态函数是标量函数的粒子其自旋值为零．

上面证明Lorentz不变性的方法是从线性变换的被动观点出发的，即量子系统和四维时空固定不动而四维坐标系作一个转动[注1]，然后在**四维时空中的同一点**来考察波函数的变化（同一时空点在新旧两个参考系中的坐标经由Lorentz变换(1.10)相互联系）；我们还可以从线性变换的主动观点出发来讨论K—G方程的Lorentz不变性．为此，令时空每点在固定的四维坐标系中的坐标矢量$x$经受一个无穷小转动，转动前后的矢量$x$和$x'$由无穷小的Lorentz变换相互联系：

---

〔注1〕正Lorentz变换相当于四维时空的转动变换．令系统和时空不动而四维坐标系转动，便是被动变换；反之令坐标系不动而系统和时空转动，便是主动变换．两种变换方式是等效的．对于光子情况要复杂一些，见本章§12．

$$x'=ax \qquad (a=\left(a_{\mu\nu}\right)=\left(\delta_{\mu\nu}+\omega_{\mu\nu}\right))$$

或

$$x'_\mu=x_\mu+\delta x_\mu=x_\mu+\omega_{\mu\nu}x_\nu \tag{1.15 a}$$

其中

$$\omega_{\mu\nu}=-\omega_{\nu\mu} \qquad (\text{一阶小量}) \tag{1.15 b}$$

转动后的波函数在$x'$点的值与转动前的波函数在$x$点的值相等[注1]，即$\phi'(x')=\phi(x)$（或$\phi'(x)=\phi(a^{-1}x)$），与（1.13）式比较可知，波函数的主动变换与被动变换等效．在（1.13）式里略去二阶以上无穷小量可得：

$$0=\phi'(x')-\phi(x)=\phi'(x')-\phi'(x)+\underbrace{\phi'(x)-\phi(x)}_{\delta\phi(x)}=$$

$$=\delta x_\mu\partial_\mu\phi(x)+\delta\phi(x),$$

或

$$\delta\phi(x)=\phi'(x)-\phi(x)=-\delta x_\mu\partial_\mu\phi(x) \tag{1.16}$$

$\delta\phi(x)$是当四维坐标系不动而量子系统和四维时空转动时，在固定坐标系中同一点波函数$\phi(x)$的增量，故称为波函数的主动变分．极易证明，$\phi'(x)$与$\phi(x)$满足相同的波动方程式，即与（1.8）式同样地有：

$$(\square-m^2)\phi'(x)=0 \tag{1.17}$$

到此为止，我们用两种变换方式证明了K—G方程的正Lorentz不变性．应当指出，算符对应关系（1.1）也可写成Lorentz协变的形式：

$$k_\mu \longrightarrow -i\partial_\mu=\hat{k}_\mu,$$

$$x \longrightarrow x \tag{1.18}$$

其中，$k=(k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4)=(k_x,\ k_y,\ k_z,\ iE)=(\mathbf{k},\ iE)$是粒子的四维动量矢量，而$\hat{k}=(\hat{k}_1,\hat{k}_2,\hat{k}_3,\hat{k}_4)$是相应的算符．因此，到此为止的全部讨论都已符合相对论原则．方程（1.8）是一个线性微分方程式，只要对波函数$\phi(x)$加上标准化条件，方程（1.8）看来就可同时符合量子力学原理；但我们立刻就会看到，K—G方程存在负能困难和负几率困难．

首先来看负能困难．假定$\phi_k$是K—G方程的某个单色平面波解，则

$$(\square-m^2)\phi_k=(-k_\mu k_\mu-m^2)\phi_k=(-|\mathbf{k}|^2+E^2-m^2)\phi_k=0$$

因而

〔注1〕见B．Г．贝依曼，《群论及其在核谱学中的应用》，第八讲，上海科学技术出版社，1963年（中译本）．

$$E=\pm\sqrt{|\mathbf{k}|^2+m^2}\,. \tag{1.19}$$

由此可见，K—G方程不但存在正能解，而且还存在负能解. 在粒子自身参考系里，$\mathbf{k}=0$，（1.19）式成为

$$E=\begin{cases}+m, & \text{对正能解}\\ -m, & \text{对负能解}\end{cases} \tag{1.20}$$

这就是说，一个处于负能态的粒子，其静止质量也为负值. 但是，质量为负的概念与迄今为止的全部力学概念相抵触. 负能解造成的困难还远不止于此. 在经典理论里，可以把负能解看成是物理上不能实现的态而抛弃掉，但在量子理论里，能级跃迁是不可避免的，如果微观粒子存在能量为负的状态，那么，所有的正能态就将是不稳定的，处于正能级的粒子将会不断地放出能量，跃迁到越来越低的负能级上去. 这一跃迁过程是没有止境的，这就与客观物质世界的相对稳定性矛盾. 因而负能解在物理上是不能接受的，而在理论上又无法避免它. 这就是K—G方程的负能困难.

其次来看负几率困难. 以$\phi^*$左乘（1.8）式，再以$\phi$左乘（1.8）式之复共轭式，然后将所得式相减即得：

$$\partial_\mu(\phi^*\partial_\mu\phi-\phi\partial_\mu\phi^*)=0\,.$$

此式两边乘以常数因子$\frac{-i}{2m}$便得到如下的微分守恒定律：

$$\partial_\mu J_\mu(x)=0\,. \tag{1.21}$$

其中，$J_\mu(x)=\frac{i}{2m}(\phi\partial_\mu\phi^*-\phi^*\partial_\mu\phi)$. 按照量子力学的几率守恒定律，可把$J_\mu(x)$的空间分量解释为几率流，并将它的时间分量解释为几率密度：

$$\rho(x)=-iJ_4(x)=\frac{-i}{2m}(\phi\dot{\phi}^*-\phi^*\dot{\phi})\,. \tag{1.22}$$

但由于K—G方程包含对时间$t$的二阶导数，对于任意给定的初始条件：$\phi(x)|_{t=0}$，$\dot{\phi}(x)|_{t=0}$，$\rho(x)$不可能总是取正值. 它有可能在某些空间区域内取正值，而在另一些区域取负值，它还可能在$\phi(x)\neq 0$的整个空间区域均取负值. $\rho(x)$的非正定性与量子力学的几率解释矛盾. 这就是K—G方程的负几率困难. 对K—G方程而言，负几率困难更带有根本性，因为$\rho(x)$不是正定的，它就不能解释为几率密度，从而$\phi(x)$也就缺乏适当的几率解释，它不能作为量子力学的波函数.

K—G方程提出后，曾被认为是一次失败的尝试. 但这一失败却暗示了一个重要的事实：在高能区域，粒子相互作用和相互转化的现象是十分普遍的，以几率解释为基础的量子力学在高能区域不再适用. 1934年，Pauli和Weisskopf把K—G方程解释为场方程，使它和其它相对论波动方程一样取得了很大的成功.

为了以后的需要，我们来讨论K—G方程的解. 因为方程（1.8）是线性齐次方程

式，故任意解$\phi(x)$可表示为所有本征振动的叠加．描写这些本征振动的平面波是所有正、负能的平面波解的完全集：

$$\frac{1}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}e^{ik\cdot x} \quad \text{（正能平面波解）}$$
$$\frac{1}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}e^{-ik\cdot x} \quad \text{（负能平面波解）} \tag{1.23}$$

因此，K—G方程（1.8）的任意解为：

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\left(a_k e^{ik\cdot x}+a_k^* e^{-ik\cdot x}\right),$$
〔当$\phi(x)$为实函数〕 (1.24)$a$

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\left(a_k e^{ik\cdot x}+b_k^* e^{-ik\cdot x}\right)$$
〔当$\phi(x)$为复函数〕 (1.24)$b$

其中$V$是归一化体积，$a_k$、$b_k$是一些展开系数，$\omega_k=\sqrt{|\mathbf{k}|^2+m^2}$．

## §2 Dirac方程的建立

1928年，Dirac 建立了电子的相对论波动方程．他认为几率密度的正定性是必须坚持的量子力学概念，而K—G方程导致负几率困难的原因，就在于包含对时间$t$的二阶导数．下面，我们就遵循 Dirac 当年的基本思想来建立 Dirac 方程：

第一，这个方程只应含有对时间$t$的一阶导数，以保证几率密度的正定性．因此，可假定它仍具有以下的Schrödinger形式：

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi=\hat{H}\psi. \tag{1.25}$$

第二，为了保证方程的 Lorentz 不变性，上式右边的算符$\hat{H}$同样只含有对空间坐标的一阶导数．换言之，$\hat{H}$应当具有以下形式：

$$\hat{H}=\frac{1}{i}\left(\alpha_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\alpha_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\alpha_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)+\beta m, \tag{1.26}$$

这样，又可把（1.25）式改写为：

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{1}{i}\left(\alpha_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\alpha_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\alpha_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\psi+\beta m\psi. \tag{1.27}$$

第三，（1.27）式中的$\alpha_j$（$j=1,2,3$）和$\beta$不能是普通的数（$c$数），而必须

是一些矩阵算符（$q$ 数）。这样，才能保证（1.27）式具有 Lorentz 不变性（因若$\alpha_j$是 $c$ 数，则$\alpha_j\frac{\partial}{\partial x_j}$将像三维矢量的■分量一样地变换，即使在三维空间正转动下，方程（1.27）也不是不变的）。与此相应，$\psi(x)$也必须是一个列矩阵。

第四，方程（1.27）的解$\psi(x)$应能保持量子力学波函数的几率解释，而且这种几率解释应与所选定的Lorentz 参考系无关。这同样要求$\psi(x)$不是一个普通函数，而必须是某类 Lorentz 协变量。

第五，（1.27）式作为一个相对论波动方程式，应能导致经典的能量、动量关系式(1.19)。换言之，一个自由粒子的能量、动量本征值仍应满足相对论力学所建立的经典关系（这样，就使负能困难不可避免）。这一要求导致$\psi(x)$的每一分量均应满足K—G方程（1.8）。据此，分别将（1.27）式两边的算符重复作用一次，并适当调整求和指标后得到：

$$-\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=-\sum_{j,l=1}^{3}\frac{\alpha_j\alpha_l+\alpha_l\alpha_j}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial x_l}+$$

$$+\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{i}m(\alpha_j\beta+\beta\alpha_j)\frac{\partial\psi}{\partial x_j}+\beta^2m^2\psi. \tag{1.28}$$

不难看出，只要$\alpha_j$、$\beta$满足如下代数关系，（1.28）式就与K—G方程（1.8）一致：

$$\alpha_j\alpha_l+\alpha_l\alpha_j=2\delta_{jl}, \quad (j、l=1,2,3) \tag{1.29a}$$

$$\alpha_j\beta+\beta\alpha_j=0 \tag{1.29b}$$

$$\alpha_j^2=\beta^2=I_N \quad (N\text{为待定之正整数}). \tag{1.29c}$$

这里，$I_N$是$N\times N$单位矩阵。（1.29)$c$ 式表明，$N\times N$矩阵$\alpha_j$、$\beta$的本征值均为$\pm1$。即这些矩在对角形式下，其对角元素是$+1$或$-1$。另一方面，由(1.29)$c$和(1.29)$b$分别得到

$$\mathrm{Tr}\alpha_j=0, \qquad \mathrm{Tr}\beta=0. \tag{1.30}$$

此式与（1.29)$c$式表明，$\alpha_j$和$\beta$均为偶维矩阵。除此以外，作为量子力学的 Hamilton 算符，$\hat{H}$应当是厄米的。按照（1.26）式，$\alpha_j$和$\beta$也必须是厄米矩阵。根据以上诸特点和代数关系（1.29），我们来寻找$\alpha_j$、$\beta$的矩阵表示。首先来看$N=2$的情形。在所有$2\times2$矩阵里，具有这些特点的矩阵便是三个Pauli矩阵：

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}, \quad \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

因此，在$N=2$的情形下，无法找到四个满足代数关系（1.29）的矩阵；其次来看$N=4$的情形。这时，可用三个Pauli矩阵和$2\times2$单位矩阵$I_2$构成$\alpha_j$、$\beta$的如下矩阵表示：

$$\alpha_j=\begin{pmatrix}0 & \sigma_j\\ \sigma_j & 0\end{pmatrix} \qquad \beta=\begin{pmatrix}I_2 & 0\\ 0 & -I_2\end{pmatrix} \tag{1.31}$$

从物理学理论的简单性考虑，我们不需要再去寻找更高的偶维表示．另一方面，从Lorentz不变性和空间反演不变性的要求考虑，波函数$\psi$必须、仅需具有四个分量[注1]，这同样排除了高维表示的可能性．因此，(1.31)式就是所要寻找的矩阵表示．与此相应，$\psi(x)$应是一个$4\times 1$矩阵：

$$\psi(x)=\begin{pmatrix}\psi_1(x)\\ \vdots\\ \psi_4(x)\end{pmatrix} \tag{1.32}$$

(1.27)、(1.31)和(1.32)相结合，完全确定了Dirac方程的具体形式．现在，我们把Dirac方程(1.27)写成四维形式．以$-\beta$乘(1.27)式两边，并引入下式定义的$\gamma$矩阵：

$$\gamma_j=-i\beta\alpha_j, \qquad j=1,2,3$$

$$\gamma_4=\beta, \tag{1.33}$$

就可把(1.27)式写成如下的四维形式：

$$(\gamma_\mu\partial_\mu+m)\psi(x)=0\,. \tag{1.34}$$

这里及以后常把$\gamma=(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \gamma_4)$形式地看成一个四维矢量，$\gamma_\mu\partial_\mu$便是两个四维矢量的标量积．不过，$\gamma$并不是Lorentz矢量，因而$\gamma\cdot\partial$也不是Lorentz不变的算符．将(1.31)代入(1.33)得：

$$\gamma_j=\begin{pmatrix}0 & -i\sigma_j\\ i\sigma_j & 0\end{pmatrix}, \qquad \gamma_4=\begin{pmatrix}I_2 & 0\\ 0 & -I_2\end{pmatrix} \tag{1.35a}$$

或者形式地写为

$$\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}0 & -i\boldsymbol{\sigma}\\ i\boldsymbol{\sigma} & 0\end{pmatrix}, \qquad \gamma_4=\begin{pmatrix}I_2 & 0\\ 0 & -I_2\end{pmatrix} \tag{1.35b}$$

其中，$\boldsymbol{\gamma}=(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3)$，$\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3)$．$\gamma$矩阵的上述表示称为Pauli表示．$\gamma$矩阵的表示有很多种．在附录三里还将介绍 Bjorken-Drell 度规下的表示．容易看出，(1.33)式定义的$\gamma_\mu$均为厄米矩阵，并满足如下的代数关系：

$$\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu=2\delta_{\mu\nu} \tag{1.36a}$$

$$\gamma_\mu^2=I_4=\begin{pmatrix}I_2 & 0\\ 0 & I_2\end{pmatrix} \tag{1.36b}$$

---

〔注1〕 参见 A. N. 阿希叶泽尔，B. Б. 别列斯捷茨基《量子电动力学》pp58—59．科学出版社，1964年．

在引入γ矩阵以后，（1.26）式的Hamilton算符可重新写为

$$\widehat{H}=i\gamma_4\boldsymbol{\gamma}\cdot\widehat{\mathbf{k}}+\gamma_4 m. \tag{1.37}$$

## §3 Dirac方程的正Lorentz不变性

如上一节所述，Dirac方程必须具有Lorentz不变性。但是，方程（1.34）并没有明显的不变性。在这一节里，我们就来讨论Dirac方程的正Lorentz不变性。

首先从线性变换的被动观点出发，假定在正Lorentz变换

$$x'_\mu=a_{\mu\nu}x_\nu \tag{1.38}$$

之下，$\psi(x)$ 经受如下的线性变换：

$$\psi'(x')=\Lambda(a)\psi(x). \tag{1.39}$$

由（1.38）式易得：

$$\partial_\mu=a_{\nu\mu}\partial'_\nu. \tag{1.40}$$

利用（1.39）和（1.40）把（1.34）式中的各个量均用变换后的量来表示：

$$(\gamma_\mu a_{\nu\mu}\partial'_\nu+m)\Lambda^{-1}(a)\psi'(x')=0,$$

再以$\Lambda(a)$左乘上式得：

$$[\Lambda(a)\gamma_\mu a_{\nu\mu}\Lambda^{-1}(a)\partial'_\nu+m]\psi'(x')=0. \tag{1.41}$$

所谓"方程(1.34)的不变性"，是指变换后的波函数$\psi'(x')$与变换前的波函数$\psi(x)$满足形式相同的方程式。不难看到，只要$\Lambda(a)$满足如下条件：

$$\Lambda^{-1}(a)\gamma_\mu\Lambda(a)=a_{\mu\nu}\gamma_\nu, \tag{1.42}$$

则（1.41）式就成为：

$$(\gamma_\mu\partial'_\mu+m)\psi'(x')=0 \tag{1.43}$$

此式正是在变换后的参考系里写出来的 Dirac 方程式，它与变换前参考系里的（1.34）式具有完全相同的形式。因此，证明Dirac方程具有正Lorentz不变性的问题，转化为要证明满足（1.42）式之$\Lambda(a)$的存在性问题。为简单起见，我们考虑无穷小的 Lorentz 变换(1.15)。这时$a_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}+\omega_{\mu\nu}$，相应地，$\Lambda(a)$应代以$\Lambda(\omega)$。在$\omega=0$点把$\Lambda(\omega)$展开：

$$\Lambda(\omega)=\Lambda(0)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Lambda(\omega)}{\partial\omega_{\mu\nu}}\right)_{\omega=0}\omega_{\mu\nu}+O(\omega^2) \tag{1.44}$$

$O(\omega^2)$是一个二阶小量，它代表所有高次项的贡献。由于Lorentz群只有六个独立的无穷小参数$\omega_{\mu\nu}$，而上式右边第二项的求和共有十二个非零项，而且其中两两相等：

$$\left(\frac{\partial\Lambda(\omega)}{\partial\omega_{\mu\nu}}\right)_{\omega=0}\omega_{\mu\nu}=\left(\frac{\partial\Lambda(\omega)}{\partial\omega_{\nu\mu}}\right)_{\omega=0}\omega_{\nu\mu},$$

所以在（1.44）式右边第二项里加入常数因子$\frac{1}{2}$来消去多余的求和项．略去二阶以上小量，并令

$$\left(\frac{\partial\Lambda(\omega)}{\partial\omega_{\mu\nu}}\right)_{\omega=0}=i\frac{1}{2}S_{\mu\nu}. \tag{1.45}$$

就得到

$$\Lambda(\omega)=\Lambda(0)+\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}S_{\mu\nu}, \tag{1.46a}$$

或

$$\Lambda(\omega)=\Lambda(0)+\frac{i}{2}\sum_{\mu>\nu}\omega_{\mu\nu}S_{\mu\nu}. \tag{1.46b}$$

所有$\Lambda(a)$的全体构成正 Lorentz 群的双旋量表示$D^{\frac{1}{2},0}\dotplus D^{0,\frac{1}{2}}$，而$\Lambda(0)$正是这个表示群的恒等变换：$\Lambda(0)=I_4$，$\frac{1}{2}S_{\mu\nu}$则是这个表示群的生成元[注1]。因此，可将(1.46)式重新写为下式：

$$\Lambda(\omega)=I_4+\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}S_{\mu\nu}, \tag{1.47a}$$

或

$$\Lambda(\omega)=I_4+\frac{i}{2}\sum_{\mu>\nu}\omega_{\mu\nu}S_{\mu\nu} \tag{1.47b}$$

把（1.47）$a$ 代入（1.42）式并略去二阶以上无穷小，就得到：

$$\omega_{\alpha\beta}[\gamma_\mu,\ iS_{\alpha\beta}]=4\omega_{\mu\nu}\gamma_\nu \tag{1.48}$$

适当改变求和指标，又可将上式变为：

$$\omega_{\alpha\beta}[\gamma_\mu,\ iS_{\alpha\beta}]=2\omega_{\alpha\beta}(\delta_{\alpha\mu}\gamma_\beta-\delta_{\beta\mu}\gamma_\alpha),$$

即

$$[\gamma_\mu,\ iS_{\alpha\beta}]=2(\delta_{\alpha\mu}\gamma_\beta-\delta_{\beta\mu}\gamma_\alpha). \tag{1.49}$$

利用代数关系（1.36）$a$ 适当变化上式右方，即得

〔注1〕 关于Lorentz 群及其表示，建议阅读P．罗曼《基本粒子理论》第一章，上海科学技术出版社，1966年。但在本书里基本上不涉及群论知识。

$$S_{\alpha\beta}=\frac{1}{2i}[\gamma_\alpha,\ \gamma_\beta].\tag{1.50}$$

（1.50）式与（1.47）式相结合完全确定了$\Lambda(\omega)$．任何一个有限变换$\Lambda(a)$均可表示为无数个无穷小变换$\Lambda(\omega)$的连乘积．因此，

$$\Lambda(a)=\lim_{n\to\infty}(\Lambda(\omega))^n=\lim_{n\to\infty}\left(\exp\frac{i}{4}\ \frac{\theta_{\mu\nu}}{n}S_{\mu\nu}\right)^n=$$

$$=\exp\frac{i}{4}\theta_{\mu\nu}S_{\mu\nu}.\tag{1.51}$$

式中的$\theta_{\mu\nu}$是Lorentz群的六个独立参数．至此，我们证明了满足（1.42）式之$\Lambda(a)$存在，从而也就证明了Dirac方程的正Lorentz不变性．但应注意，在上述的证明里对波函数$\psi(x)$作了很强的限制：$\psi(x)$必须按Lorentz群的表示$D^{\frac{1}{2}0}\dot{+}D^{0\frac{1}{2}}$变换，亦即$\psi(x)$必须是一个双旋量（所谓双旋量，乃是两个二分量基本旋量的可约组合）．在§6里将要证明，Dirac方程所描写的粒子其自旋值为$\frac{1}{2}$．这一点正好说明了相对论量子力学与非相对论量子力学的一个重要区别．在非相对论量子力学里，Schrödinger方程可描写具有不同自旋值的粒子，而在相对论量子力学里，Lorentz不变性的限制要求波函数必须是某类Lorentz协变量，因而不同的波动方程式将描写具有不同自旋值的粒子．

与K—G方程的情形类似，在证明Dirac方程的正Lorentz不变性时，同样可从线性变换的主动观点出发：令四维坐标系不动，量子系统和时空经受无穷小转动，则转动后的波函数在$x$点的值与转动前的波函数在$a^{-1}x$点的值由下式联系：

$$\psi'(x)=\Lambda(\omega)\psi(a^{-1}x)=\Lambda(\omega)\psi(x-\delta x),\tag{1.52}$$

其中，$a=\left\{\delta_{\mu\nu}+\omega_{\mu\nu}\right\}$．容易看出，上式与被动变换（1.39）等效．把（1.47）$a$代入（1.52），并将$\psi(x-\delta x)$在$x$点展开，精确到一阶无穷小量，可得$\psi'(x)$的如下展开式：

$$\psi'(x)=\psi(x)-\delta x_\mu\partial_\mu\psi(x)+\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}S_{\mu\nu}\psi(x),\tag{1.53a}$$

波函数的主动变分为：

$$\begin{aligned}\delta\psi(x)&=\psi'(x)-\psi(x)\\&=-\delta x_\mu\partial_\mu\psi(x)+\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}S_{\mu\nu}\psi(x).\end{aligned}\tag{1.53b}$$

为了证明$\psi'(x)$仍满足Dirac方程式，可将（1.53）$a$式改写为：

$$\begin{aligned}\psi'(x)&=\psi'(x')-\delta x_\mu\partial_\mu\psi(x)\\&=\psi'(x)+\delta x_\mu\partial_\mu\psi'(x)-\delta x_\mu\partial_\mu\psi(x).\end{aligned}$$

此式给出

$$\delta x_\mu \partial_\mu \psi'(x) = \delta x_\mu \partial_\mu \psi(x), \tag{1.54}$$

把算符 $(\gamma_\lambda \partial_\lambda + m)$ 作用于上式左、右两边，就得到：

$$(\gamma_\lambda \partial_\lambda + m)\psi'(x) = (\gamma_\lambda \partial_\lambda + m)\psi(x) = 0.$$

这样，我们就证明了$\psi'(x)$的确满足Dirac方程式.

## §4 Dirac方程的空间反演不变性

一个广义的齐次 Lorentz 变换包括 Minkowski 空间的正转动和时、空反演. 本节要讨论 Dirac 方程的空间反演不变性. 至于时间反演的问题，将在自由场量子理论的有关章节进行讨论.

所谓空间反演，从数学上讲，就是把空间坐标轴的方向颠倒过来，把右手坐标系变成左手坐标系，或反之. 在反演后的四维坐标系里，各点的空间坐标改变一个负号，而时间坐标不变号，这相当于实现如下的线性变换：

$$\mathbf{x}' = -\mathbf{x},$$

$$t' = t. \tag{1.55}$$

从物理上说，我们可以用镜像来理解空间反演的含义. 设想在坐标原点相互垂直地放置三个平面镜，使它们的法线方向分别与三个空间坐标轴正向平行. 不难想象，镜里的空间坐标轴与真实的空间坐标轴方向正好相反，而镜里的时间轴与镜外的时间轴并无区别. 当我们观察某一物理过程时，可以在镜外的（即真实的）坐标系里进行观察，也可以在镜象坐标系里进行观察，从镜外到镜内(或反之)就实现了一次空间反演. 空间反演的物理结果从经典力学看来是相当直观的：若在反演前的坐标系里粒子动量为 $\mathbf{k}$，则在反演后的坐标系里粒子动量为 $-\mathbf{k}$；若在反演前的坐标系里粒子轨道角动量为 $\mathbf{l}=\mathbf{r}\times\mathbf{k}$，则在反演后的坐标系里为：

$$\mathbf{l}' = \mathbf{r}' \times \mathbf{k}' = (-\mathbf{r}) \times (-\mathbf{k}) = \mathbf{l},$$

这就是说，轨道角动量随空间坐标轴的反向而反向：若反演前的坐标系为右手坐标系，$\mathbf{l}$ 的方向用右手螺旋法则决定，则反演后的坐标系为左手坐标系，$\mathbf{l}'$ 的方向用左手螺旋法则决定，因而 $\mathbf{l}$ 在旧坐标系中的分量与 $\mathbf{l}'$ 在新坐标系中的分量一一保持相等. 在空间反演下空间分量不改变符号的四维矢量称为（空间性）赝矢量或轴矢量；反之，空间分量反号的四维矢量称为（正）矢量或极矢量. 粒子四维动量 $k$ 是极矢量；轨道角动量和自旋角动量都是赝矢量.

在上述的讨论里，只要把经典的力学量代之以相应的算符，则所得结果同样适用于量子力学.

量子体系的空间反演对称性导致宇称守恒定律. 在1956年以前，人们曾认为在微观

世界里左和右是完全对称的．换言之，在空间反演变换下，微观物理过程的规律性是不变的．但是，1956年李政道、杨振宁和吴健雄分别从理论和实验两方面发现了弱作用过程中的宇称破坏，自此，人们认识到左、右对称性不再是一种普遍成立的对称性了．

我们上面所说的是有相互作用的情况，对于自由粒子(中微子除外，见本章§11)，左、右对称性一般是成立的．现在回到本节的正题，即讨论 Dirac 方程的空间反演不变性．把（1.55）式改写为：

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= -x_1 \\ x_2' &= \quad -x_2 \\ x_3' &= \quad\quad -x_3 \\ x_4' &= \quad\quad\quad +x_4 \end{aligned}\right\} \tag{1.56}$$

或者

$$x_\mu' = \bar{\delta}_{\mu\nu} x_\nu, \tag{1.57a}$$

$$\bar{\delta}_{\mu\nu} = \begin{cases} 0, & \text{当}\mu \neq \nu \\ -1, & \text{当}\mu = \nu = j = 1, 2, 3 \\ +1, & \text{当}\mu = \nu = 4. \end{cases} \tag{1.57b}$$

由（1.57）$a$ 式可得

$$\partial_\mu = \bar{\delta}_{\nu\mu} \partial_\nu' \tag{1.58}$$

假设在变换（1.57）之下，$\psi(x)$按下式变换：

$$\psi'(x') = P\psi(x) \tag{1.59}$$

P称为波函数的反演算符或宇称算符．把（1.58）、（1.59）代入（1.34）式得：

$$(\gamma_\mu \bar{\delta}_{\nu\mu} \partial_\nu' + m) P^{-1} \psi'(x') = 0.$$

以P左乘上式又得到

$$(P\gamma_\mu \bar{\delta}_{\nu\mu} P^{-1} \partial_\nu' + m) \psi'(x') = 0. \tag{1.60}$$

因此，证明 Dirac 方程具有空间反演不变性的问题，转化为证明满足下式的算符P的存在性问题：

$$P\gamma_\mu \bar{\delta}_{\nu\mu} P^{-1} = \gamma_\nu. \tag{1.61}$$

利用（1.57）$b$ 可把（1.61）式重写为：

$$P\gamma_j P^{-1} = -\gamma_j, \qquad \text{当}\mu = \nu = j \tag{1.62a}$$

$$P\gamma_4 P^{-1} = \gamma_4, \qquad \text{当}\mu = \nu = 4 \tag{1.62b}$$

根据$\gamma$矩阵所满足的代数关系（1.36）$a$，不难由上式得到

$$P=\gamma_4 \tag{1.63}$$

至此，我们证明了 Dirac 方程的空间反演不变性。但这里对波函数的反演性质同样有了限制：在空间反演下，$\psi(x)$必须经受如下的幺正变换：

$$\psi'(x')=\gamma_4\psi(x). \tag{1.64}$$

## §5 γ矩阵与旋量二次式

γ矩阵的定义由(1.33)式给出，这些矩阵满足反对易关系（1.36）。由这四个γ矩阵可以构成如下的16个独立的 4 × 4 矩阵：

$$\Gamma_A\begin{cases}\Gamma_1=I_4;\\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \gamma_4;\\ i\gamma_2\gamma_3,\ i\gamma_3\gamma_1,\ i\gamma_1\gamma_2,\ i\gamma_1\gamma_4,\ i\gamma_2\gamma_4,\ i\gamma_3\gamma_4;\\ i\gamma_2\gamma_3\gamma_4,\ i\gamma_3\gamma_1\gamma_4,\ i\gamma_1\gamma_2\gamma_4,\ i\gamma_1\gamma_3\gamma_2;\\ \gamma_5=\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\end{cases} \tag{1.65}$$

16个矩阵$\Gamma_A$具有以下性质：

（1）$\Gamma_A^2=I_4$，　$A=1, 2, \cdots\cdots 16$　(1.66)

（2）$\Gamma_1$与所有$\Gamma_B$对易，，$B=2, 3, \cdots 16$　(1.67)

（3）对任意的$\Gamma_A(A\neq 1)$均至少存在一个$\Gamma_B$（$B\neq 1$，$B\neq A$），使得

$$\Gamma_A\Gamma_B+\Gamma_B\Gamma_A=0, \tag{1.68$a$}$$

例如，

$$\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu=0,\quad 当\mu\neq\nu \tag{1.68$b$}$$

$$\gamma_\mu\gamma_5+\gamma_5\gamma_\mu=0. \tag{1.68$c$}$$

（4）对任意的$\Gamma_A\neq\Gamma_B\neq I_4$，，必存在一个$\Gamma_C\neq I_4$，使得

$$\Gamma_A\Gamma_B=\pm i\Gamma_C. \tag{1.69}$$

（5）$\mathrm{Tr}\Gamma_A=0$.　$(A\neq 1)$　(1.70)

由（1.70）式可推出以下有用公式：

$$\mathrm{Tr}\gamma_\mu=0, \tag{1.71$a$}$$

$$\mathrm{Tr}\gamma_\mu\gamma_\nu=4\delta_{\mu\nu}, \tag{1.71$b$}$$

$$\mathrm{Tr}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho=0,\ \mu,\ \nu,\ \rho=1,\ 2,\ 3,\ 4 \tag{1.71$c$}$$

$$\mathrm{Tr}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma=4(\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma}-\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma}+\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho}). \tag{1.71$d$}$$

（6）所有16个$\Gamma_A$是线性独立的，即

$$\sum_{A=1}^{16} C_A \Gamma_A = 0\text{，仅当所有}C_A\text{为零。} \tag{1.72}$$

此外，在许多场论书籍里常用以下记号：

$$\hat{A} = \gamma_\mu A_\mu,\quad\text{（其中，}A_\mu\text{是某个四维矢量的分量）} \tag{1.73a}$$

或 $$\not{A} = \gamma_\mu A_\mu, \tag{1.73b}$$

利用这些记号，可以借助于反对易关系（1.36）验证以下诸公式：

$$\not{A}\not{B} + \not{B}\not{A} = 2A\cdot B, \tag{1.74a}$$

$$\not{A}\not{A} = A^2, \tag{1.74b}$$

$$\gamma_\mu \not{A} \gamma_\mu = -2\not{A} \tag{1.74c}$$

$$\gamma_\mu \not{A}\not{B} \gamma_\mu = 4A\cdot B, \tag{1.74d}$$

$$\gamma_\mu \not{A}\not{B}\not{C} \gamma_\mu = -2\not{C}\not{B}\not{A}. \tag{1.74e}$$

公式（1.68）$b$、（1.68）$c$以及（1.71）、（1.74）在微扰计算里很有用（见第十章）。

下面我们来讨论旋量二次式的变换性质，所谓旋量二次式是指由旋量波函数组成的下述 Lorentz 协变量：

$$S = \bar{\psi}(x)\psi(x),\ \text{〔其中，}\bar{\psi}(x) = \psi^+(x)\gamma_4\text{〕} \tag{1.75a}$$

$$P = i\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x), \tag{1.75b}$$

$$V_\mu = i\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x), \tag{1.75c}$$

$$A_\mu = i\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma_5\psi(x), \tag{1.75d}$$

$$T_{\mu\nu} = i\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma_\nu\psi(x). \tag{1.75e}$$

弄清这些旋量二次式的正 Lorentz 变换性质和空间反演性质，对于讨论理论的对称性、构造相互作用场系统的Lagrange函数密度（见第八章）都是很有帮助的。

首先来看（1.75）式的正Lorentz变换性质。为方便起见，仍考虑无穷小 Lorentz 变换（1.15）。由$\psi(x)$的变换式：

$$\psi'(x') = \Lambda(\omega)\psi(x), \tag{1.76a}$$

可得

$$\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x)\gamma_4\Lambda^+\gamma_4 \tag{1.76b}$$

因为$\omega_{jl}$为实数，$\omega_{j4}$和$\omega_{4l}$均为纯虚数；而且$\gamma_4$与$S_{jl}$对易，与$S_{j4}$和$S_{4l}$均反对易，所以由（1.47）$a$式可得

$$\gamma_4\Lambda^+(\omega)\gamma_4=I_4-\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}S_{\mu\nu}=\Lambda^{-1}(\omega) \tag{1.77}$$

把（1.77）代入（1.76）$b$，便得到$\overline{\psi}(x)$的变换法则：

$$\overline{\psi}'(x')=\overline{\psi}(x)\Lambda^{-1}(\omega). \tag{1.78}$$

利用（1.76）$a$和（1.78）不难推出旋量二次式的如下变换法则：

$$S'(x')=\overline{\psi}'(x')\psi'(x')=\overline{\psi}(x)\Lambda^{-1}(\omega)\Lambda(\omega)\psi(x)$$
$$=S(x), \tag{1.79)a$$

$$P'(x')=i\overline{\psi}'(x')\gamma_5\psi'(x')=i\overline{\psi}(x)\Lambda^{-1}(\omega)\gamma_5\Lambda(\omega)\psi(x)$$
$$=P(x), \tag{1.79)b$$

$$V'_\mu(x')=i\overline{\psi}'(x')\gamma_\mu\psi'(x')=i\overline{\psi}(x)\Lambda^{-1}(\omega)\gamma_\mu\Lambda(\omega)\psi(x)$$

(1.42)式

$$=a_{\mu\nu}i\overline{\psi}(x)\gamma_\nu\psi(x)=a_{\mu\nu}V_\nu(x), \tag{1.79)c$$

其中，$a_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}+\omega_{\mu\nu}$.

$$A'_\mu(x')=i\overline{\psi}'(x')\gamma_\mu\gamma_5\psi'(x')=a_{\mu\nu}A_\nu(x), \tag{1.79)d$$

$$T'_{\mu\nu}(x')=i\overline{\psi}'(x')\gamma_\mu\gamma_\nu\psi'(x')$$
$$=i\overline{\psi}(x)\Lambda^{-1}(\omega)\gamma_\mu\Lambda(\omega)\Lambda^{-1}(\omega)\gamma_\nu\Lambda(\omega)\psi(x)$$
$$=a_{\mu\rho}a_{\nu\sigma}T_{\rho\sigma}(x). \tag{1.79)e$$

（1.79）式表明：$S(x)$、$P(x)$是Lorentz标量；$V_\mu(x)$、$A_\mu(x)$分别是四维矢量$V=(V_1, V_2, V_3, V_4)$和$A=(A_1, A_2, A_3, A_4)$的分量；$T_{\mu\nu}(x)$是四维二秩张量的分量．但这样一来，我们就有两个标量和两个矢量．要弄清它们之间的区别，尚需进一步讨论它们的空间反演性质．由（1.64）式可得

$$\overline{\psi}'(x')=\overline{\psi}(x)\gamma_4. \tag{1.80}$$

利用（1.64）和（1.80），并注意反对易关系（1.36）$a$和（1.68）$c$，容易导出旋量二次式的的空间反演变换法则：

$$S'(x')=S(x), \tag{1.81)a$$

$$P'(x')=-P(x), \tag{1.81)b$$

$$V'_\mu(x')=i\overline{\psi}'(x')\gamma_\mu\psi'(x')=i\overline{\psi}(x)\gamma_4\gamma_\mu\gamma_4\psi(x),$$

即

$$V'_j(x')=-V_j(x), \tag{1.82)a$$

$$V'_4(x')=V_4(x); \tag{1.82)b$$

$$A_\mu^{\prime}(x') = i\overline{\psi}(x)\gamma_4\gamma_\mu\gamma_5\gamma_4\psi(x),$$

即

$$A_j'(x') = A_j(x), \tag{1.83a}$$

$$A_4'(x') = -A_4(x); \tag{1.83b}$$

$$T_{\mu\nu}'(x') = i\overline{\psi}'(x')\gamma_\mu\gamma_\nu\psi'(x')$$

$$= i\overline{\psi}(x)\gamma_4\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_4\psi(x);$$

即

$$T_{jk}'(x') = T_{jk}(x). \tag{1.84a}$$

$$T_{j4}'(x') = -T_{j4}(x). \tag{1.84b}$$

以上变换法则表明：$S(x)$是一个Lorentz（正）标量，$P(x)$是一个赝标量，$V(x)$是一个(正)矢量，$A(x)$是一个赝矢量；$T_{\mu\nu}(x)$是四维二秩（正）张量的分量。如果进一步讨论上述旋量二次式的时间反演变换法则，还可以将它们更加详细地分类[注1]。

在这一节的末了，我们来讨论Dirac理论的几率守恒定律。如§2所述，Dirac方程的解$\psi(x)$应能保持量子力学的几率解释，而且这种解释应能用Lorentz协变的语言来表达。将Dirac方程（1.34）取厄米共轭，并注意$\gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu$，$\partial_j^* = \partial_j$，$\partial_4^* = -\partial_4$，就得到：

$$\overline{\psi}(x)(\gamma_\mu \overleftarrow{\partial_\mu} - m) = 0. \quad [\overleftarrow{\partial_\mu}\text{向左作用于}\overline{\psi}(x)] \tag{1.85}$$

以$i\overline{\psi}(x)$左乘（1.34），并以$i\psi(x)$右乘（1.85），然后将所得式相加，就得到如下的微分守恒定律：

$$\partial_\mu J_\mu(x) = 0, \tag{1.86a}$$

其中，

$$J_\mu(x) = i\overline{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x). \tag{1.86b}$$

把（1.86）$b$与（1.75）$c$比较可知，$J_\mu(x)$是一个四维矢量的分量：

$$\mathbf{J}(x) = i\overline{\psi}(x)\boldsymbol{\gamma}\psi(x), \tag{1.87a}$$

$$J_4(x) = i\overline{\psi}(x)\gamma_4\psi(x) = i\rho(x), \tag{1.87b}$$

$$\rho(x) = \psi^+(x)\psi(x) \geqslant 0. \tag{1.87c}$$

我们看到，$\rho(x)$正是量子力学的几率密度，因$\rho(x)\geqslant 0$，这里不存在负几率困难。这样，把$\mathbf{J}(x)$解释为几率流密度矢量也完全没有问题。（1.86）$a$式就是微分形式的几率守恒定律。由于它具有显示的不变性，故Dirac方程的解确实能够给出Lorentz不变的几率解释。

---

〔注1〕 参见，例如$P$.罗曼，《基本粒子理论》，pp.82—90，上海科学技术出版社，1966年。

## §6 Dirac粒子的自旋

在 3 § 里曾证明，Lorentz不变性的限制，要求Dirac波函数$\psi(x)$必须按 Lorentz 群的双旋量表示进行变换。波函数的这种变换性质，意味着 Dirac 方程只能描写具有一定自旋值的粒子。在这一节里，我们用物理的方法来证明Dirac方程所描写的粒子(Dirac粒子）其自旋值为$\frac{1}{2}$。为了方便，把（1.26）式重写为：

$$\hat{H}=\frac{1}{i}\alpha_j\partial_j+\beta m,\quad (\text{对 } j \text{ 从 1 到 3 求和}) \tag{1.88}$$

或因 $\hat{k}_j=\frac{1}{i}\partial_j$，又有

$$\hat{H}=\alpha_j\hat{k}_j+\beta m=\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{k}}+\beta m, \tag{1.89}$$

其中，

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}\\ \boldsymbol{\sigma} & 0\end{pmatrix}=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3),$$

$$\hat{\mathbf{k}}=(\hat{k}_1,\ \hat{k}_2,\ \hat{k}_3). \tag{1.90}$$

为了求出Dirac粒子的自旋值，首先要找到相应的自旋算符。如果Dirac粒子的自旋值不为零，则其轨道角动量算符$\hat{\mathbf{l}}$将与$\hat{H}$不对易。下面就来检验$\hat{\mathbf{l}}$是否与$\hat{H}$对易：

$$[\hat{\mathbf{l}},\ \hat{H}]=[\hat{l}_1,\ \hat{H}]\mathbf{e}_1+[\hat{l}_2,\ \hat{H}]\mathbf{e}_2+[\hat{l}_3,\ \hat{H}]\mathbf{e}_3. \tag{1.91}$$

因为$\hat{l}_j$只对空间变数起作用，而矩阵$\boldsymbol{\alpha}$，$\beta$与空间坐标无关，故有；

$$[\hat{l}_j,\ \beta m]=[\hat{l}_j,\ \boldsymbol{\alpha}]=0, \tag{1.92}$$

$$[\hat{l}_j,\ \hat{H}]=[\hat{l}_j,\ \ \boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{k}}]=\boldsymbol{\alpha}\cdot[\hat{l}_j,\ \ \hat{\mathbf{k}}], \tag{1.93}$$

利用（1.88）式的求和约定，又可将（1.93）式写为：

$$[\hat{l}_j,\ \hat{H}]=\alpha_l[\hat{l}_j,\ \hat{k}_l]=i\alpha_l\varepsilon_{jlk}\hat{k}_k$$

$$\xrightarrow{\text{令 } j=1}\ =i\,(\alpha_2\hat{k}_3-\alpha_3\hat{k}_2)\neq 0. \tag{1.94a}$$

同样可得

$$[\hat{l}_2,\ \hat{H}]\neq 0,\ [\hat{l}_3,\ \hat{H}]\neq 0, \tag{1.94b}$$

因此，

$$[\hat{l}, \hat{H}] \neq 0. \tag{1.95}$$

在得出（1.94）式时，曾使用了以下公式：

$$[\hat{l}_j, \hat{k}_l] = i\varepsilon_{jlk}\hat{k}_k \tag{1.96}$$

其中，$\varepsilon_{jlk}$是三秩Levi-Civita张量的分量，它由下式定义：

$$\varepsilon_{jlk} = \begin{cases} +1 & \text{当}jlk\text{取123的偶排列,} \\ -1 & \text{当}jlk\text{取123的奇排列,} \\ 0 & \text{当有任意两个指标相同时.} \end{cases} \tag{1.97}$$

（1.95）式表明，Dirac 粒子的轨道角动量不是守恒量，或者说，它的自旋角动量不为零．假定自旋角动量算符为$\hat{s}$，则总角动量$\hat{J} = \hat{l} + \hat{s}$是一个守恒物理量算符，我们有：

$$\begin{aligned} 0 &= [\hat{J}, \hat{H}] = [\hat{l} + \hat{s}, \alpha\cdot\hat{k} + \beta m] \\ &= [\hat{l}, \alpha\cdot\hat{k}] + [\hat{l}, \beta m] + [\hat{s}, \alpha\cdot\hat{k}] + [\hat{s}, \beta m]. \end{aligned}$$

根据（1.92）式，$[\hat{l}, \beta m] = 0$．这样，上式右边只有最末一项含有粒子质量$m$，要使上式成立，此项必须单独为零：

$$[\hat{s}, \beta m] = 0,$$

即

$$[\hat{s}_j, \beta] = 0, \quad j = 1, 2, 3 \tag{1.98}$$

因为$\beta = \gamma_4$是一个准对角矩阵，故$\hat{s}_j$也是一个准对角矩阵，可令

$$\hat{s}_j = \begin{pmatrix} \mathfrak{s}^j_{11} & 0 \\ 0 & \mathfrak{s}^j_{22} \end{pmatrix} \tag{1.99}$$

其中，$\mathfrak{s}^j_{11}$和$\mathfrak{s}^j_{22}$都是 $2\times2$ 矩阵，为了把这些 $2\times2$ 矩阵的具体表示找出来，需要求解下式：

$$0 = [\hat{J}, \hat{H}] = [\hat{l}, \alpha\cdot\hat{k}] + [\hat{s}, \alpha\cdot\hat{k}],$$

或写成分量的形式：

$$[\hat{l}_j, \alpha\cdot\hat{k}] + [\hat{s}_j, \alpha\cdot\hat{k}] = 0, \quad j = 1, 2, 3 \tag{1.100}$$

首先看来$j = 1$的方程式：

$$[\hat{l}_1, \alpha\cdot\hat{k}] + [\hat{s}_1, \alpha\cdot\hat{k}] = 0. \tag{1.101}$$

由（1.92）式和（1.96）式可得

$$[\hat{l}_1, \alpha\cdot\hat{k}] = i\alpha_2\hat{k}_3 - i\alpha_3\hat{k}_2, \tag{1.102}$$

把（1.102）代入（1.101），并注意$\hat{s}_1$与$\hat{k}$对易即得

$$
[\hat{s}_1,\ \alpha_1]\hat{k}_1+[\hat{s}_1,\ \alpha_2]\hat{k}_2+[\hat{s}_1,\ \alpha_3]\hat{k}_3
$$

$$
=i\alpha_3\hat{k}_2-i\alpha_2\hat{k}_3. \tag{1.103}
$$

由（1.103）式立即得到$\hat{s}_1$所满足的方程组：

$$
[\hat{s}_1,\ \alpha_1]=0, \tag{1.104)a}
$$

$$
[\hat{s}_1,\ \alpha_2]=i\alpha_3, \tag{1.104)b}
$$

$$
[\hat{s}_1,\ \alpha_3]=-i\alpha_2. \tag{1.104)c}
$$

把（1.31）和（1.99）代入（1.104）$a$，可得以下二式：

$$
\mathfrak{A}^{1}_{1\,1}\sigma_1=\sigma_1\mathfrak{A}^{1}_{2\,2}, \tag{1.105)a}
$$

$$
\mathfrak{A}^{1}_{2\,2}\sigma_1=\sigma_1\mathfrak{A}^{1}_{1\,1}, \tag{1.105)b}
$$

（1.105）式有以下两组解：

$$
\mathfrak{A}^{1}_{1\,1}=\mathfrak{A}^{1}_{2\,2}=Const.;
$$

$$
\mathfrak{A}^{1}_{1\,1}=\mathfrak{A}^{1}_{2\,2}=b\sigma_1,\ （b\ 为待定常数）.
$$

前一组解使$\hat{s}_1$成为数量矩阵，这就使粒子不具有确定的自旋值，因而这是物理上不能接受的，我们应当取第二组解，这时，

$$
\hat{s}_1=b\begin{pmatrix}\sigma_1 & 0\\ 0 & \sigma_1\end{pmatrix} \tag{1.106}
$$

为了确定常数 $b$，把（1.106）和（1.31）代入（1.104)$b$，由此得到

$$
b(\sigma_1\sigma_2-\sigma_2\sigma_1)=i\sigma_3 \tag{1.107}
$$

上式与Pauli矩阵所满足的代数关系

$$
\sigma_l\sigma_j-\sigma_j\sigma_l=2i\varepsilon_{ljk}\sigma_k
$$

比较，就确定了常数 $b$：

$$
b=\frac{1}{2}.
$$

因此，

$$
\hat{s}_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sigma_1 & 0\\ 0 & \sigma_1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\Sigma_1, \tag{1.108)a}
$$

不难验证上式给出的$\hat{s}_1$满足(1.104)c。在（1.100）式里令 $j=2$ 和 $j=3$ 并重复前面的推算，就可分别得到$\hat{s}_2$和$\hat{s}_3$：

$$\hat{s}_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sigma_2 & 0\\ 0 & \sigma_2\end{pmatrix}\equiv\frac{1}{2}\Sigma_2, \tag{1.108b}$$

$$\hat{s}_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sigma_3 & 0\\ 0 & \sigma_3\end{pmatrix}\equiv\frac{1}{2}\Sigma_3. \tag{1.108c}$$

由（1.108）式容易得到自旋角动量平方算符为

$$\hat{s}^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\begin{pmatrix}I_2 & 0\\ 0 & I_2\end{pmatrix} \tag{1.109}$$

此式表明，Dirac粒子的自旋值为$\frac{1}{2}$.

有了自旋算符，不难找到Dirac粒子的自旋波函数。因为自旋算符是 4 × 4 矩阵，故自旋函数应当有 4 个，把它们记为$B_\alpha(\alpha=1,2,3,4)$，这样，就有以下本征值方程式：

$$\left.\begin{aligned}\hat{s}_3B_1=+\frac{1}{2}B_1,\qquad \hat{s}_3B_3=+\frac{1}{2}B_3,\\ \hat{s}_3B_2=-\frac{1}{2}B_2,\qquad \hat{s}_3B_4=-\frac{1}{2}B_4,\end{aligned}\right\} \tag{1.110}$$

应注意，$\hat{s}_3$有四个本征值：$+\frac{1}{2},-\frac{1}{2},+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}$，倘若在上式里令$B_1$、$B_3$属于本征值$-\frac{1}{2}$，而$B_2$、$B_4$属于本征值$+\frac{1}{2}$，则所得物理结果是相同的. 显然，$B_\alpha$是 4 × 1 矩阵，令$B_\alpha$为：

$$B_\alpha=\begin{pmatrix}b_1^\alpha\\ \vdots\\ b_4^\alpha\end{pmatrix},\quad \alpha=1,2,3,4$$

则由（1.110）式得到：

$$B_1=\begin{pmatrix}b_1^1\\ 0\\ b_3^1\\ 0\end{pmatrix},\quad B_2=\begin{pmatrix}0\\ b_2^2\\ 0\\ b_4^2\end{pmatrix},\quad B_3=\begin{pmatrix}b_1^3\\ 0\\ b_3^3\\ 0\end{pmatrix},\quad B_4=\begin{pmatrix}0\\ b_2^4\\ 0\\ b_4^4\end{pmatrix}.$$

这组自旋波函数必须是正交归一的，因而有：

$$\left.\begin{aligned}b_1^1=1,\ b_3^1=0,\\ b_1^3=0,\ b_3^3=1,\end{aligned}\right\}\qquad\left.\begin{aligned}b_2^2=1,\ b_4^2=0,\\ b_2^4=0,\ b_4^4=1.\end{aligned}\right\}$$

于是，

$$B_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\quad B_2=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\quad B_3=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\quad B_4=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \tag{1.111}$$

在非相对论量子力学里，有了自旋算符和自旋波函数，就可以对粒子的自旋状态进行严格的理论描写．但是，在相对论量子力学里，情况要复杂一些，这是因为，尽管粒子自旋值作为内部量子数，它与参考系无关，但自旋算符和自旋波函数则与参考系有关．因此，必须指明我们上面的讨论是在那个参考系里进行的．从（1.108）式看出，$\hat{s}_j$只与$\sigma_j$有关，而与时空坐标和粒子动量无关，由此可以推测，这些算符是在粒子自身参考系里确定的．相应的自旋波函数（1.111）也是在粒子自身参考系里确定的．为了证实这一推测的正确性，我们在粒子自身参考系里来求出 Dirac 方程的解，在粒子自身参考系里，$\mathbf{k}=0$，Hamilton 算符（1.89）简化为：$\hat{H}=\beta m$，与此相应，Dirac 方程(1.25）成为：

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=\beta m\psi. \tag{1.112}$$

另一方面，$i\dfrac{\partial\psi}{\partial t}=E\psi$，故

$$\beta\psi=\frac{E}{m}\psi, \tag{1.113}$$

由§2的讨论知道，Dirac方程仍然存在负能困难，而且在粒子自身参考系里$E=\pm m$，所以（1.113）式成为：

$$\beta\psi=\pm\psi,\quad \begin{matrix} E=+m\text{时取正号} \\ E=-m\text{时取负号}\end{matrix} \tag{1.114}$$

上式表明，$\psi$是$\beta$的本征函数．由于$\beta$是$4\times4$矩阵，故本征函数一共有四个．其中，$\psi^{(\mathrm{I})}$、$\psi^{(\mathrm{II})}$是$E=+m$的解，即正能解：

$$\beta\psi^{(\mathrm{I})}=\psi^{(\mathrm{I})},\qquad \beta\psi^{(\mathrm{II})}=\psi^{(\mathrm{II})} \tag{1.115}$$

而$\psi^{(\mathrm{III})}$、$\psi^{(\mathrm{IV})}$是$E=-m$的解，即负能解：

$$\beta\psi^{(\mathrm{III})}=-\psi^{(\mathrm{III})},\qquad \beta\psi^{(\mathrm{IV})}=-\psi^{(\mathrm{IV})}. \tag{1.116}$$

把（1.115）和（1.116）分别代入（1.112），并注意到在粒子自身参考系里 $\lambda=h/|\mathbf{k}|\to\infty$，de Bröglie波处处均匀，即$\psi(x)$与空间坐标无关，所以（1.112）中的$\dfrac{\partial}{\partial t}$可以改为$\dfrac{d}{dt}$：

$$i\frac{d}{dt}\psi^{(\mathrm{I})}=m\psi^{(\mathrm{I})}, \tag{1.117a}$$

$$i\frac{d}{dt}\psi^{(\mathrm{II})}=m\psi^{(\mathrm{II})}, \tag{1.117b}$$

$$i\frac{d}{dt}\psi^{(\mathrm{III})}=-m\psi^{(\mathrm{III})},\tag{1.117c}$$

$$i\frac{d}{dt}\psi^{(\mathrm{IV})}=-m\psi^{(\mathrm{IV})}.\tag{1.117d}$$

直接对上式积分得：

$$\left.\begin{aligned}\psi^{(\mathrm{I})}&=B_1e^{-imt},\\ \psi^{(\mathrm{II})}&=B_2e^{-imt};\end{aligned}\right\}E=+m\tag{1.118a}$$

$$\left.\begin{aligned}\psi^{(\mathrm{III})}&=B_3e^{+imt},\\ \psi^{(\mathrm{IV})}&=B_4e^{+imt}.\end{aligned}\right\}E=-m\tag{1.118b}$$

把（1.118）代入（1.115）和（1.116），就得到$B_1$、$B_2$、$B_3$、$B_4$所满足的本征值方程：

$$\left.\begin{aligned}\beta B_1&=B_1,\\ \beta B_2&=B_2;\end{aligned}\right\}E=+m\tag{1.119a}$$

$$\left.\begin{aligned}\beta B_3&=-B_3,\\ \beta B_4&=-B_4.\end{aligned}\right\}E=-m\tag{1.119b}$$

不难看出，（1.119）式的解正是（1.111）．因此，（1.118）式成为：

$$\left.\begin{aligned}\psi^{(\mathrm{I})}&=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}e^{-imt},\\ \psi^{(\mathrm{II})}&=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}e^{-imt},\end{aligned}\right\}E=+m\tag{1.120a}$$

$$\left.\begin{aligned}\psi^{(\mathrm{III})}&=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}e^{+imt},\\ \psi^{(\mathrm{IV})}&=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}e^{+imt}.\end{aligned}\right\}E=-m\tag{1.120b}$$

（1.120）式的波函数自动地分成两部分：描写粒子时空运动特性的相因子 $e^{\pm imt}$ 和与时空运动无关的旋量振幅 $B_\alpha$；后一部分必定与粒子的内部自由度相关。因而可以把 $B_\alpha$ 解释为粒子的自旋波函数。事实上，只要把（1.108）$c$ 式定义的算符 $\hat{s}_3$ 作用于（1.120）式的波函数即可看出：粒子的自旋状态是由旋量振幅 $B_\alpha$ 来描写的。至此，我们可以确信自旋算符（1.108）和自旋波函数（1.111）是在粒子自身参考系里确定的。

综上所述，在粒子自身参考系里，Dirac 方程的解按能量的符号分为两类：正能解 $\psi^{(\mathrm{I})}$、$\psi^{(\mathrm{II})}$ 和负能解 $\psi^{(\mathrm{III})}$、$\psi^{(\mathrm{IV})}$. 无论正能解或负能解又都分为两种自旋态：$\psi^{(\mathrm{I})}$、$\psi^{(\mathrm{III})}$ 描写自旋角动量在空间第三轴上投影为 $+\frac{1}{2}$ 的态，$\psi^{(\mathrm{II})}$、$\psi^{(\mathrm{IV})}$ 描写自旋角动量在空间第三轴上投影为 $-\frac{1}{2}$ 的态. 由于旋量振幅 $B_1$、$B_2$、$B_3$、$B_4$ 张成一个四维空间，双旋量空间（它是两个二维空间的直和），因而波函数必须、仅需具有四个分量这一事实与 Dirac 方程具有四类不同能量符号、不同自旋取向的解的事实之间有着深刻的内在联系。从 § 2 和 § 3 的讨论看到，这种内在的联系是通过 Lorentz 不变性的要求反映出来的。

为了以后的需要，这里顺便引入一个新的算符，即自旋张量算符 $\mathscr{S}_{\mu\nu}$. 它的定义如下：

$$\mathscr{S}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}S_{\mu\nu} \tag{1.121}$$

其中 $S_{\mu\nu}$ 由（1.50）式定义. 利用Pauli矩阵所满足的代数关系 $\sigma_j\sigma_l=i\sigma_k$（$jlk$取123的偶排列），不难证明：

$$\mathscr{S}_{jl}=\sum_k \varepsilon_{jlk}\hat{s}_k \tag{1.122}$$

上式给出自旋张量算符与自旋算符之间的关系.

## §7 Dirac方程的平面波解

这一节要在任意的Lorentz参考系里找出Dirac方程的平面波解，并讨论平面波解按能量、动量和自旋态的分类.

### （一）平面波解

一个以动量k作自由运动的Dirac粒子用如下的平面波来描写：

$$\psi_{\mathbf{k}}(x)=w(\mathbf{k},\ E)e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-Et)} \tag{1.123}$$

$w(\mathbf{k},\ E)$ 是平面波旋量振幅，$E=\pm E_k=\pm\sqrt{|\mathbf{k}|^2+m^2}$. 在粒子自身参考系里 $E=\pm E_k=\pm m$，（1.123）式成为

$$\psi_0(x)=w(0,\ \pm m)e^{\mp imt}. \tag{1.124}$$

上式便是（1.120）式. 换言之，（1.120）式就是波矢为$\mathbf{k}=0$，频率为$\omega_k=\pm m$的平面波解. 为了在任意的参考系里求得$w(\mathbf{k}, E)$的具体形式，尚需从稍微不同的角度来研究粒子自身参考系里的平面波解. 把（1.123）代入Dirac方程（1.34），并消去与时空坐标有关的相因子，就得到$w(\mathbf{k}, E)$所满足的方程式：

$$(i\gamma_\mu k_\mu + m)w(\mathbf{k}, E) = 0 \tag{1.125}$$

或

$$(i\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{k} - \gamma_4 E + m)w(\mathbf{k}, E) = 0 \tag{1.126}$$

旋量振幅$w(\mathbf{k}, E)$可分解为两个二分量基本旋量$\xi(\mathbf{k}, E)$和$\eta(\mathbf{k}, E)$的可约组合：

$$w(\mathbf{k}, E) = \begin{pmatrix} \xi(\mathbf{k}, E) \\ \eta(\mathbf{k}, E) \end{pmatrix} \tag{1.127}$$

把（1.127）代入（1.126），并利用（1.35）式，就得到基本旋量$\xi$、$\eta$所满足的方程式：

$$(E-m)\xi - \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k}\eta = 0, \tag{1.128$a$}$$

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k}\xi - (E+m)\eta = 0. \tag{1.128$b$}$$

在粒子自身参考系里，上式成为

$$(E-m)\xi = 0, \tag{1.129$a$}$$

$$(E+m)\eta = 0. \tag{1.129$b$}$$

对$E=m$的情形，从上式得到正能解

$$\left.\begin{aligned} \xi &\neq 0, \\ \eta &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.130}$$

对$E=-m$的情形则得到负能解

$$\left.\begin{aligned} \xi &= 0, \\ \eta &\neq 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.131}$$

（1.130）和（1.131）是唯一可能的非零解，把它们分别代入（1.127）就得到粒子自身参考系里的旋量振幅为：

$$w(0, +m) = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.132$a$}$$

$$w(0, -m) = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix} \tag{1.132$b$}$$

在（1.132）$a$式里非零的基本旋量$\xi$以及在（1.132）$b$式里非零的基本旋量$\eta$都是可以任意选择的，但我们要求（1.132）式与（1.120）式一致，这就必须如同上一节所做

的那样，使（1.132）式成为$\hat{s}^2$、$\hat{s}_3$和$\beta$的共同本征函数，即：

$$\hat{s}_3 w(0,\ +m)=\pm\frac{1}{2}w(0,+m),$$

$$\hat{s}_3 w(0,\ -m)=\pm\frac{1}{2}w(0,-m).$$

把（1.108）$c$和（1.132）代入上式，得到

$$\sigma_3\xi=\pm\xi, \tag{1.133$a$}$$

$$\sigma_3\eta=\pm\eta. \tag{1.133$b$}$$

即在粒子自身参考系里，$\xi$、$\eta$是$\sigma_3$的本征函数．据此可得

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \tag{1.134$a$}$$

$$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad \eta_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}. \tag{1.134$b$}$$

现在，我们通过求解（1.128）式来得到任意参考系里的平面波旋量振幅$w(\mathbf{k},\ E)$．当$E=+E_k$时，考虑到（1.130）式，可由（1.128）$b$式得

$$\eta=\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k}}{E_k+m}\xi, \tag{1.135$a$}$$

又当$E=-E_k$时，考虑到（1.131）式，可由（1.128）$a$式得

$$\xi=\frac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k}}{E_k+m}\eta. \tag{1.135$b$}$$

把上述二式分别代入（1.127）式就得到任意参考系里的$w(\mathbf{k},\ E)$：

$$w_s(\mathbf{k},E_k)=\begin{pmatrix}\xi_s\\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k}}{E_k+m}\xi_s\end{pmatrix},\quad s=1,\ 2 \tag{1.136$a$}$$

$$w_s(\mathbf{k},-E_k)=\begin{pmatrix}-\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k}}{E_k+m}\eta_s\\ \eta_s\end{pmatrix},\quad s=1,\ 2 \tag{1.136$b$}$$

只要令上式中的$\xi_s$和$\eta_s$与（1.134）式定义的$\xi_1$、$\xi_2$，$\eta_1$、$\eta_2$一致，则当转到粒子自身参考系时，（1.136）式就过渡到（1.132）式．应当指出，倘若我们不是采用（1.135）式，而是当$E=E_k$时，由（1.128）$a$式得到$\eta=\dfrac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k})(E_k-m)}{|\mathbf{k}|^2}\xi$，而当$E=-E_k$时，

由(1.128)$b$式得到$\xi=\dfrac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k})(-E_k+m)}{|\mathbf{k}|^2}\eta$，那么，在粒子自身参考系里，对正能解，$\eta$成为$\frac{0}{0}$；对负能解$\xi$成为$\frac{0}{0}$。这样一来，(1.136)式就不再过渡到(1.132)式，由于我们通过对自身参考系里的解进行研究并得到(1.130)式和(1.131)式，因而才能正确地选择了(1.135)式。

现在改变一下记号，把$\xi_s$、$\eta_s$统一地记为$\xi_s$：

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}. \tag{1.137}$$

相应地，(1.136)式可重新写为下式：

$$w_s(\mathbf{k},\ E_k)=\begin{pmatrix}\xi_s\\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k}}{E_k+m}\xi_s\end{pmatrix},\quad s=1,2 \tag{1.138$a$}$$

$$w_s(\mathbf{k},\ -E_k)=\begin{pmatrix}-\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k}}{E_k+m}\xi_s\\ \xi_s\end{pmatrix},\quad s=1,2 \tag{1.138$b$}$$

把(1.138)代入(1.123)就得到如下的平面波解：

$$\psi_{\mathbf{k}s}=w_s(\mathbf{k},E_k)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-iE_kt},\quad (\text{正能解：}E=+E_k) \tag{1.139$a$}$$

$$\psi_{\mathbf{k}s}=w_s(\mathbf{k},-E_k)\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+iE_kt}\quad (\text{负能解：}E=-E_k) \tag{1.139$b$}$$

$$s=1,2$$

(1.139)式便是在任意参考系里的平面波解。容易看出，在粒子自身参考系里它过渡到(1.120)式。

### (二) 平面波解按自旋态的分类

在非相对论量子力学里，将平面波解按自旋态分类是没有任何困难的。这是因为在任何一个Galileo参考系里，Hamilton算符$\hat{H}$与自旋第三分量算符（它是根据实验事实唯象地定义的）总是相互对易，因而包括自旋函数在内的波函数一经确定，就总是$\hat{H}$与自旋第三分量算符的共同本征函数。这样，就使我们能够用自旋角动量在某一指定方向上的投影来区分平面波解所描写的自旋态，而不必追问这种区分是在哪个Galileo参考系里进行的。在相对论量子力学里，情形就不同了。由§6知道，在粒子自身参考系里，Hamilton算符$\hat{H}=\beta m$、动量算符$\hat{\mathbf{k}}$（它的本征值为零）与自旋算符$\hat{s}_3$组成可以对易的力学量算符的完全集合。所以这时，在能量、动量有定值的态里，即用平面波(1.120)描写的态里，自旋角动量在某一指定方向（通常取为$x_3$轴方向）的投影值也是确定的。换

言之，在粒子自身参考系里，可以用$\hat{s}_3$的本征值来区分平面波解（1.120）；但是，当转到任意参考系时，$\hat{H}=\alpha\cdot\hat{\mathbf{k}}+\beta m$与$\hat{s}_3$不再彼此对易，$\hat{s}_3$与$\hat{H}$、$\hat{\mathbf{k}}$不再构成可对易的力学量算符的完全集合，因而，仍然用$\hat{s}_3$的本征值来区分平面波解（1.139）的办法不再是可行的。事实上不难看出，（1.139）式里的平面波旋量振幅并不是$\hat{s}_3$的本征函数。那么在任意的Lorentz参考系里应当怎样来描写Dirac粒子的自旋态呢？下面分成若干小段来讨论这一问题。

**通常使用的两种方法** 在相对论量子力学里，描写自由粒子自旋态的方法通常有以下两种：

第一法：用所谓螺旋度算符$h$的本征值来描写自由粒子的自旋态。算符$h$所对应的力学量是粒子自旋角动量在其动量方向上的投影。对于Dirac粒子，$h=\frac{\mathbf{\Sigma}\cdot\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$，其中，$\mathbf{\Sigma}=(\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3)$。只要把（1.136）中的$\xi_s$、$\eta_s$选择为$\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$的本征函数〔而不是像（1.134）那样把$\xi$、$\eta$选择为$\sigma_3$的本征函数〕，则（1.138）式就成为$\hat{H}$、$\hat{\mathbf{k}}$和$h$的共同本征函数，$h$的本征值为$\pm 1$，分别描写自旋角动量在动量方向的投影值为$\pm\frac{1}{2}$的状态。但因$h$不是一个Lorentz标量算符，故这种方法不具有Lorentz不变性。

第二法：便是本节要采用的方法。其要点是：构造一个自旋角动量矢量算符$\frac{\omega(k)}{2m}$，并定义一个四维极化矢量$e$（关于“极化”、“极化矢量”，详见附录二），二者的标积$\frac{\omega(k)\cdot e}{2m}$是一个Lorentz标量算符。这个标量算符与$\hat{H}$、$\hat{\mathbf{k}}$一起构成一组对易力学量算符的完全集合，用$\frac{\omega(k)\cdot e}{2m}$的本征值来区分Dirac方程的平面波解。这种方法具有Lorentz不变性，而且在粒子自身参考系里将给出§6的全部结果。

**构造负能负动量的平面波解** 在粒子自身参考系里，平面波解便是（1.120），它的旋量振幅$B_\alpha(\alpha=1,2,3,4)$便是自旋波函数。在任意一个Lorentz参考系里，我们曾得到平面波解（1.139）。按照（1.39)式，（1.139）与（1.120）之间应有以下变换关系：

$$\psi_{\mathbf{k}s}=\Lambda(a)\psi_{os}\quad s=1,2 \tag{1.140)a}$$

这里，$\psi_{os}$是$\psi^{(\mathrm{I})}$，……$\psi^{(\mathrm{IV})}$中的任何一个。上式应能导致旋量振幅之间的同一关系：

$$w_s(\mathbf{k},\ \pm E_k)=\Lambda(a)\begin{matrix}B_{1,2}\\ \\ B_{3,4}\end{matrix}, \tag{1.140)b}$$

但是，由于（1.139）$b$式的相因子$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+iE_kt}$不是Lorentz标量函数，因而当把（1.139）$b$

式代入（1.140）$a$ 式时，不可能导致（1.140）$b$。解决这一矛盾的办法是在（1.139）$b$ 式里以 $-\mathbf{k}$ 代替 $\mathbf{k}$，从而构成如下的平面波解：

$$\psi_{\mathbf{k}s}^{(+)} = u_{\mathbf{k}s}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - iE_k t} = u_{\mathbf{k}s}\, e^{ik\cdot x}, \tag{1.141$a$}$$

$$\psi_{\mathbf{k}s}^{(-)} = v_{\mathbf{k}s}\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + iE_k t} = v_{\mathbf{k}s}\, e^{-ik\cdot x} \tag{1.141$b$}$$

$$s = 1,\ 2$$

其中，

$$u_{\mathbf{k}s} = w_s(\mathbf{k},\ E_k) = \begin{pmatrix} \xi_s \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k}}{E_k + m}\xi_s \end{pmatrix} \tag{1.142$a$}$$

$$v_{\mathbf{k}s} = w_s(-\mathbf{k},\ -E_k) = \begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k}}{E_k + m}\xi_s \\ \xi_s \end{pmatrix} \tag{1.142$b$}$$

（1.141）$b$ 就是负能、负动量的平面波解。我们可以不去求解Dirac方程，而直接通过一个Lorentz变换，由粒子自身参考系里的平面波解（1.120）求得某个运动参考系里的平面波解（1.141），反之，不难验证，当$\mathbf{k}=0$时，（1.141）过渡到（1.120）。如§6所述，（1.120）式的旋量振幅$B_\alpha$便是粒子自身参考系里的自旋波函数，下面将要证明，旋量振幅$u_{\mathbf{k}s}$和$v_{\mathbf{k}s}$即是运动参考系里的自旋波函数。因此，我们将用Lorentz协变的语言来描写Dirac粒子的自旋态。

把（1.141）代入（1.34），分别得到$u_{\mathbf{k}s}$和$v_{\mathbf{k}s}$满足的方程式：

$$(\gamma\cdot k - im)u_{\mathbf{k}s} = 0, \tag{1.143$a$}$$

$$\bar{u}_{\mathbf{k}s}(\gamma\cdot k - im) = 0; \quad \bar{u}_{\mathbf{k}s} = u_{\mathbf{k}s}^{+}\gamma_4 \tag{1.143$b$}$$

$$(\gamma\cdot k + im)v_{\mathbf{k}s} = 0, \tag{1.144$a$}$$

$$\bar{v}_{\mathbf{k}s}(\gamma\cdot k + im) = 0. \quad \bar{v}_{\mathbf{k}s} = v_{\mathbf{k}s}^{+}\gamma_4 \tag{1.144$b$}$$

方程（1.143）和（1.144）在以后的计算里很有用。

**引入Pauli-Lubanski协变自旋矢量算符** 定义如下的四维矢量算符：

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) \tag{1.145$a$}$$

其中，

$$\omega_\alpha = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\mu\nu\lambda}S_{\mu\nu}\partial_\lambda \tag{1.145$b$}$$

$\varepsilon_{\alpha\mu\nu\lambda}$是四秩Levi-Civita张量的分量：

$$\varepsilon_{\alpha\mu\nu\lambda}=\begin{cases}+1, & \text{当}\alpha\mu\nu\lambda\text{是1234的偶排列,}\\ -1, & \text{当}\alpha\mu\nu\lambda\text{是1234的奇排列.}\\ 0, & \text{当任意两个指标相同时.}\end{cases}$$

(1.145)式定义的$\omega$称为Pauli-Lubanski协变自旋矢量算符，或简称P—L算符．在运动参考系里算符$\omega$没有直接明显的物理意义．为了弄清它的意义，必须在粒子自身参考系里来考察它．首先，将$\omega_\alpha$作用于平面波解(1.141)$a$：

$$\omega_\alpha\psi_{\mathbf{k}s}^{(+)}=-\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\mu\nu\lambda}S_{\mu\nu}\partial_\lambda u_{\mathbf{k}s}e^{ik\cdot x}$$

$$=-\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\mu\nu\lambda}S_{\mu\nu}(ik_\lambda)\psi_{\mathbf{k}s}^{(+)}\tag{1.146}$$

即对于正能、正动量的解，$\omega_\alpha$的动量空间表示式为：

$$\omega_\alpha=-\frac{i}{2}\varepsilon_{\alpha\mu\nu\lambda}S_{\mu\nu}k_\lambda,\tag{1.147$a$}$$

类似地，将$\omega_\alpha$作用于(1.141)$b$，就得到(对于负能、负动量的解)$\omega_\alpha$的动量空间表示式为：

$$\omega_\alpha=\frac{i}{2}\varepsilon_{\alpha\mu\nu\lambda}S_{\mu\nu}k_\lambda.\tag{1.147$b$}$$

用$\omega^{(0)}$来表示粒子自身参考系里的P—L算符．由于在粒子自身参考系里$\mathbf{k}=0$，故$\omega_4^{(0)}=0$，从而，(1.147)$a$和(1.147)$b$分别成为下式：

$$\omega_j^{(0)}=-\frac{i}{2}\varepsilon_{jkl4}S_{kl}k_4,\quad(\text{对}\begin{matrix}+E_k\\+\mathbf{k}\end{matrix}\text{的解})\tag{1.148$a$}$$

$$\omega_j^{(0)}=\frac{i}{2}\varepsilon_{jkl4}S_{kl}k_4,\quad(\text{对}\begin{matrix}-E_k\\-\mathbf{k}\end{matrix}\text{的解})\tag{1.148$b$}$$

上式右边相同的张量指标表示自1到3求和．利用(1.121)和(1.122)，并注意到$k_4=iE_k=im$，又可把上式写为：

$$\omega_j^{(0)}=m\Sigma_j,\quad(\text{对}\begin{matrix}+E_k\\+\mathbf{k}\end{matrix}\text{的解})\tag{1.149$a$}$$

$$\omega_j^{(0)}=-m\Sigma_j,\quad(\text{对}\begin{matrix}-E_k\\-\mathbf{k}\end{matrix}\text{的解})\tag{1.149$b$}$$

$$j=1,2,3$$

或者写成矢量形式：

$$\boldsymbol{\omega}^{(0)}=m\boldsymbol{\Sigma},\quad(\text{对}\begin{matrix}+E_k\\+\mathbf{k}\end{matrix}\text{的解})\tag{1.150$a$}$$

$$\omega^{(0)} = -m\boldsymbol{\Sigma},\ (对\ {-E_k \atop -\mathbf{k}}\ 解的) \tag{1.150)b}$$

至此，我们得到粒子自身参考系里的P—L算符如下：

$$\omega^{(0)} = (m\boldsymbol{\Sigma},\ 0),\ (对\ {+E_k \atop +\mathbf{k}}\ 的解) \tag{1.151)a}$$

$$\omega^{(0)} = (-m\boldsymbol{\Sigma},\ 0),\ (对\ {-E_k \atop -\mathbf{k}}\ 的解) \tag{1.151)b}$$

此二式表明，在粒子自身参考系里，P—L算符与通常的自旋算符$\hat{s} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}$只差一个常数因子。对于正能、正动量的解，这个因子是$\frac{1}{2m}$；对于负能、负动量的解，这个因子是$\frac{-1}{2m}$。

**定义标量算符$\frac{\omega(k)\cdot e}{2m}$** 粒子的自旋值与参考系无关。但是，自旋角动量是总角动量在粒子自身参考系里的剩余部分，只有在自身参考系里，自旋角动量才是一个纯空间矢量。当转到任一运动参考系时，自旋角动量作为某一四维矢量的空间分量而受到变换，我们把这个抽象的四维矢量称为协变自旋角动量。这一小节的目的是要定义一个标量算符$\frac{\omega(k)\cdot e}{2m}$，它的本征值是粒子的协变自旋角动量在四维极化矢量$e$方向的投影值。这里提出一个问题：应当怎样来定义协变自旋角动量矢量算符呢？倘若直接采用P—L算符，就会导致如下的困难，即在任意参考系里将同时存在两个相差负号的自旋角动量矢量算符，它们分别作用于正能解和负能解。这就与量子力学里的算符定义不符合。将(1.147)$a$和(1.147)$b$分别与(1.151)$a$和(1.151)$b$比较可知：当从自身参考系转到任意运动参考系时，四维矢量算符$\omega^{(0)} = (m\boldsymbol{\Sigma},\ 0)$变换为$\omega = (\omega_\alpha) = (-\frac{i}{2}\varepsilon_{\alpha\mu\nu\lambda}S_{\mu\nu}k_\lambda)$，因此，我们把协变自旋角动量算符定义为：

$$\frac{\omega(k)}{2m} = \left(\frac{\omega_1(k)}{2m},\ \cdots\cdots,\ \frac{\omega_4(k)}{2m}\right)$$

$$= \left(-\frac{i}{4m}\varepsilon_{1\mu\nu\lambda}S_{\mu\nu}k_\lambda,\ \cdots\cdots,\ -\frac{i}{4m}\varepsilon_{4\mu\nu\lambda}S_{\mu\nu}k_\lambda\right) \tag{1.152)a}$$

这样，标量算符$\frac{\omega(k)\cdot e}{2m}$就由下式定义：

$$\frac{\omega(k)\cdot e}{2m} = \frac{1}{2m}\omega_\alpha(k)e_\alpha = \frac{-i}{4m}\varepsilon_{\alpha\mu\nu\lambda}S_{\mu\nu}k_\lambda e_\alpha. \tag{1.152)b}$$

在上式右方，只有$\alpha\neq\mu\neq\nu\neq\lambda$的那些项不为零，假定$\alpha\mu\nu\lambda$是1234的偶排列（不失普遍性），我们有

$$\varepsilon_{\alpha\mu\nu\lambda}S_{\mu\nu}=\varepsilon_{\alpha\underline{\mu}\underline{\nu}\lambda}S_{\underline{\mu}\underline{\nu}}+\varepsilon_{\alpha\underline{\nu}\underline{\mu}\lambda}S_{\underline{\nu}\underline{\mu}}=2S_{\mu\nu}$$

$$=2\gamma_5\gamma_5 S_{\mu\nu}=-2\gamma_5 S_{\alpha\lambda}, \tag{1.153}$$

其中，划有短横线的重复指标不再表示求和。这样（1.152）$b$式又可重写如下：

$$\frac{\omega(k)\cdot e}{2m}=\frac{i\gamma_5 S_{\alpha\lambda}k_\lambda e_\alpha}{2m}. \tag{1.154}$$

下一步工作是要适当定义四维极化矢量$e$。按照标量算符$\frac{\omega(k)\cdot e}{2m}$的物理意义，我们必须要求它在粒子自身参考系里成为通常的自旋分量算符$\hat{s}_3$。这一要求相当于实现如下的过渡：

$$\frac{\omega(k)\cdot e}{2m}\xrightarrow[\text{转到粒子自身参考系}]{}\frac{\omega^{(0)}(k)\cdot e^{(0)}}{2m}=\hat{s}_3 \tag{1.155}$$

这里，$e^{(0)}$是在粒子自身参考系里的四维极化矢量，它是一个纯空间矢量：$e^{(0)}=(\mathbf{e}^{(0)}, 0)$。据此就有

$$\frac{m\boldsymbol{\Sigma}\cdot\mathbf{e}^{(0)}}{2m}+0\times 0=\frac{1}{2}\Sigma_1 e_1^{(0)}+\frac{1}{2}\Sigma_2 e_2^{(0)}+\frac{1}{2}\Sigma_3 e_3^{(0)}$$

$$+0=\frac{1}{2}\Sigma_3,$$

即$\mathbf{e}^{(0)}=(0, 0, 1)$是粒子自身参考系里的空间第三轴基矢（见图1—1）。至此，我们就在粒子自身参考系里确定了四维极化矢量：

$$e^{(0)}=(\mathbf{e}^{(0)}, 0)=(0, 0, 1, 0), \tag{1.156}$$

它的空间分量$\mathbf{e}^{(0)}$即是通常的极化矢量。

为了找到运动参考系里的四维极化矢量$e$，我们用一个特殊Lorentz变换来变换$e^{(0)}$。假定运动参考系$O'$与自身参考系$O$有相对速度$\mathbf{v}$，在两个参考系中分别选择空间坐标轴，使之一一对应平行（见图1—2），并使两者的第三轴与相对速度$\mathbf{v}$正向平行。参考系$O'$和$O$就相差一个特殊Lorentz变换：

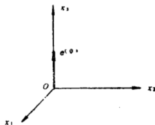


图 1—1

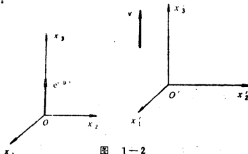


图 1—2

$$x_1' = x_1,$$

$$x_2' = x_2,$$

$$x_3' = \frac{x_3}{\sqrt{1-v_3^2}} + \frac{iv_3}{\sqrt{1-v_3^2}} x_4,$$

$$x_4' = \frac{-iv_3}{\sqrt{1-v_3^2}} x_3 + \frac{1}{\sqrt{1-v_3^2}} x_4.$$

在上式里，$v_3 = |\mathbf{v}|$，$c=1$。由于 $e_1^{(0)} = e_2^{(0)} = e_4^{(0)} = 0$，故 $e$ 与 $e^{(0)}$ 之间由下述变换相互联系：

$$e_1 = e_1^{(0)} = 0,$$

$$e_2 = e_2^{(0)} = 0,$$

$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{1-v_3^2}} e_3^{(0)},$$

$$e_4 = -i \frac{v_3}{\sqrt{1-v_3^2}} e_3^{(0)}.$$

或者把前两个恒等式去掉：

$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{1-v_3^2}} e_3^{(0)}, \tag{1.157a}$$

$$e_4 = -i \frac{v_3}{\sqrt{1-v_3^2}} e_3^{(0)}. \tag{1.157b}$$

考虑到粒子对运动参考系 $O'$ 有动量、能量分别为：

$$\mathbf{k} = (0, 0, k_3) = \left(0, 0, \frac{m(-v_3)}{\sqrt{1-v_3^2}}\right), \tag{1.158a}$$

$$E_k = \frac{m}{\sqrt{1-v_3^2}}, \tag{1.158b}$$

而且借助于简单的运算可以得到

$$\frac{1}{\sqrt{1-v_3^2}} = 1 + \frac{k_3 k_3}{m(E_k+m)}, \tag{1.159}$$

则 (1.157)式可重写为下式：

$$e_3 = e_3^{(0)} + \frac{k_3(k_3 e_3^{(0)})}{m(E_k+m)}, \tag{1.160a}$$

$$e_4 = i \frac{k_3 e_3^{(0)}}{m}. \tag{1.160b}$$

由于$e_1^{(0)}=e_2^{(0)}=0$，$k_1=k_2=0$，所以又有

$$\mathbf{e}=\mathbf{e}^{(0)}+\frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}^{(0)})}{m(E_k+m)} \tag{1.161}a$$

$$e_4=i\,\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}^{(0)}}{m}. \tag{1.161}a$$

到此为止，我们已找到了运动参考系里的四维极化矢量$e=(\mathbf{e},e_4)$，因而（1.154)式的标量算符已完全确定.

**Lorentz不变的本征值方程**　如前所述，在粒子自身参考系里，标量算符$\frac{\omega(k)\cdot e}{2m}$和旋量振幅$u_{\mathrm{ks}}$、$v_{\mathrm{ks}}$分别成为自旋分量算符$\hat{s}_3$和通常的自旋波函数$B_\alpha(\alpha=1,2,3,4)$. 换言之，在粒子自身参考系里，上述的标量算符和旋量振幅对粒子自旋能够给出熟知的量子力学描写. 由于算符$\frac{\omega(k)\cdot e}{2m}$的标量性质，它的本征值与参考系无关，因此，在任意的运动参考系里应有如下的本征值方程成立：

$$\frac{\omega(k)\cdot e}{2m}u_{\mathrm{ks}}=\begin{cases}+\frac{1}{2}u_{\mathrm{ks}}, & s=1\\ -\frac{1}{2}u_{\mathrm{ks}}, & s=2\end{cases} \tag{1.162}a$$

$$\frac{\omega(k)\cdot e}{2m}v_{\mathrm{ks}}=\begin{cases}+\frac{1}{2}v_{\mathrm{ks}}, & s=1\\ -\frac{1}{2}v_{\mathrm{ks}}, & s=2\end{cases} \tag{1.162}b$$

现在就来证明（1.162)式. 利用（1.154）和（1.143）$a$可得

$$\frac{\omega(k)\cdot e}{2m}u_{\mathrm{ks}}=\frac{i\gamma_5 S_{\alpha\lambda}k_\lambda e_\alpha}{2m}u_{\mathrm{ks}}$$

$$=\frac{1}{2m}\gamma_5\gamma\cdot e\gamma\cdot k u_{\mathrm{ks}}=\frac{i}{2}\gamma_5\gamma\cdot e u_{\mathrm{ks}}, \tag{1.163}a$$

同样，利用（1.154）和（1.144）$a$可得

$$\frac{\omega(k)\cdot e}{2m}v_{\mathrm{ks}}=-\frac{i}{2}\gamma_5\gamma\cdot e v_{\mathrm{ks}}. \tag{1.163}b$$

把$\gamma$矩阵的表示式（1.35）$a$，$e$的表示式（1.161）以及$u_{\mathrm{ks}}$的表示式(1.142)$a$代入(1.163)$a$，并利用如下的公式：

$$(\sigma\cdot\mathbf{A})(\sigma\cdot\mathbf{B})=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})+i\,(\sigma,[\mathbf{A}\times\mathbf{B}]), \tag{1.164}a$$

$$(\sigma\cdot\mathbf{A})(\sigma\cdot\mathbf{B})+(\sigma\cdot\mathbf{B})(\sigma\cdot\mathbf{A})=2\,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}), \tag{1.164}b$$

(其中，A、B是与σ对易的三维矢量)，即可得到

$$\frac{\omega(k)\cdot e}{2m}u_{ks}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}(\sigma\cdot e^{(0)})\xi_s\\ \frac{(\sigma\cdot k)(\sigma\cdot e^{(0)})}{E_k+m}\xi_s\end{pmatrix}$$

因$(\sigma\cdot e^{(0)})\xi_s=\sigma_3\xi_s=\begin{cases}+\xi_s, & s=1,\\ -\xi_s, & s=2,\end{cases}$ 故上式成为

$$\frac{\omega(k)\cdot e}{2m}u_{ks}=\begin{cases}+\frac{1}{2}u_{ks}, & s=1\\ -\frac{1}{2}u_{ks}, & s=2\end{cases}$$

这就证明了(1.162) $a$ 式。用同样的方法可以证明(1.162) $b$ 式。

(1.162) 式具有显示的Lorentz不变性。在运动参考系里它没有直接、明显的物理意义，但在粒子自身参考系里它成为通常的自旋本征值方程式：

$$\hat{s}_3\begin{matrix}B_1\\ B_2\end{matrix}=\begin{matrix}+\frac{1}{2}B_1,\\ -\frac{1}{2}B_2,\end{matrix}\qquad(1.165)a$$

$$\hat{s}_3\begin{matrix}B_3\\ B_4\end{matrix}=\begin{matrix}+\frac{1}{2}B_3,\\ -\frac{1}{2}B_4,\end{matrix}\qquad(1.165)b$$

此式表明，Dirac粒子自旋角动量在空间第三轴上的投影值为$\pm\frac{1}{2}$，这是熟知的量子力学结论。借助于自身参考系里的直观物理图象，可对本征值方程(1.162) 作如下解释：在任意的 Lorentz 参考系里的观察者看来，粒子的协变自旋角动量在四维极化矢量 $e$ 方向的投影值是$\pm\frac{1}{2}$。尽管自旋算符和自旋波函数均分别按 Lorentz 群的一定表示进行变换，但协变自旋角动量的投影值（标量算符$\frac{\omega(k)\cdot e}{2m}$的本征值）并不因参考系的变化而变化。

**平面波解的分类** 到此为止，平面波解按自旋态的分类已告完成。(1.141) 式的平面波解$\psi_{ks}^{(+)}$和$\psi_{ks}^{(-)}$是算符$\hat{H}$、$\hat{k}$和$\frac{\omega(k)\cdot e}{2m}$的共同本征函数。这三个算符的本征值完全确定了自由 Dirac 粒子的状态，因而这三个算符构成一组对易力学量算符的完全集合。平面波解 (1.141)可以更详尽地表示如下：

$$
\begin{array}{llll}
 & \widehat{\mathrm{H}} & \widehat{\mathbf{k}} & \dfrac{\omega(k)\cdot e}{2m} \\
\psi_{ks}^{(+)}(x)=u_{ks}e^{ik\cdot x}, & +E_k & +\mathbf{k} & \begin{cases} +\dfrac{1}{2}, & s=1 \\ -\dfrac{1}{2}, & s=2 \end{cases} \\
\psi_{ks}^{(-)}(x)=v_{ks}e^{-ik\cdot x}, & -E_k & -\mathbf{k} & \begin{cases} +\dfrac{1}{2}, & s=1 \\ -\dfrac{1}{2}, & s=2 \end{cases}
\end{array}
\tag{1.166}
$$

在粒子自身参考系里，上式成为：

$$
\begin{array}{llll}
 & \widehat{\mathrm{H}} & \widehat{\mathbf{k}} & \dfrac{\omega^{(0)}(k)\cdot e^{(0)}}{2m}=\widehat{s}_3 \\
\psi_{01}^{(+)}=u_{01}e^{-imt}, & +m & 0 & +\dfrac{1}{2} \\
\psi_{02}^{(+)}=u_{02}e^{-imt}, & +m & 0 & -\dfrac{1}{2} \\
\psi_{01}^{(-)}=v_{01}e^{+imt}, & -m & 0 & +\dfrac{1}{2} \\
\psi_{02}^{(-)}=v_{02}e^{+imt}, & -m & 0 & -\dfrac{1}{2}
\end{array}
$$

$$
(u_{01}=B_1,\ u_{02}=B_2;\ v_{01}=B_3,\ v_{02}=B_4) \tag{1.167}
$$

# §8 平面波解的正交归一性

## （一）正交性的讨论

从初等量子力学知道，厄米算符的属于不同本征值的本征函数在通常量子力学意义下相互正交。但我们立刻就会看到，平面波旋量振幅 $u_{ks}$、$v_{ks}$既是厄米算符的本征函数，也是非厄米算符的本征函数，因而对它们的正交性需作进一步的讨论。

如上一节所述，$u_{ks}$、$v_{ks}$是厄米算符$\dfrac{\omega(k)\cdot e}{2m}$的本征函数，相应的本征值为$\pm\dfrac{1}{2}$。因此，对这个算符的本征值而言，$u_{ks}$、$v_{ks}$满足通常量子力学意义下的正交关系：

$$
u_{ks}^{+}u_{ks'}=0,\quad s'\neq s \tag{1.168a}
$$

$$
v_{ks}^{+}v_{ks'}=0,\quad s'\neq s \tag{1.168b}
$$

这里及以后，我们用指标$\begin{matrix}s=1\\s=2\end{matrix}$分别表示本征值$\begin{matrix}+\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{matrix}$. 正交关系（1.168)可以将(1.142)直接代入来进行验证。

另方面，由$u_{ks}$和$v_{ks}$所满足的方程式(1.143) $a$ 和(1.144) $a$ 可得：

$$i\gamma\cdot k u_{ks}=-mu_{ks},\quad s=1,2 \tag{1.169a}$$

$$i\gamma\cdot k v_{ks}=+mv_{ks},\quad s=1,2 \tag{1.169b}$$

即$u_{ks}$和$v_{ks}$同时又是非厄米算符$i\gamma\cdot k$的本征函数，其相应本征值分别为$-m$和$+m$. 不难证明，$u_{ks}$与$v_{ks}$之间没有通常量子力学意义下的正交关系，但存在以下特殊的正交关系：

$$\bar{u}_{ks}v_{ks'}=0, \quad s、s'=1,2 \tag{1.170a}$$

$$\bar{v}_{ks}u_{ks'}=0. \tag{1.170b}$$

事实上，由(1.143) $b$ 可得$\bar{u}_{ks}ir\cdot k=-m\bar{u}_{ks}$，以$v_{ks'}$右乘此式并利用(1.169) $b$ 便得到$2m\bar{u}_{ks}v_{ks'}=0$，这就证明了(1.170) $a$；同样，借助于(1.144) $b$ 和(1.169) $a$ 可以证明(1.170) $b$. 是否存在如下的正交关系呢：

$$u^+_{ks}v_{ks'}=0, \quad s'\neq s \quad ?$$

$$v^+_{ks}u_{ks'}=0. \quad s'\neq s \quad ?$$

单纯从$\frac{\omega(k)\cdot e}{2m}$的本征值来看，这两式似乎都应成立. 但由于$u_{ks}$和$v_{ks}$同时又是$ir\cdot k$的属于不同本征值的本征函数，因而这两式事实上并不成立。

$\frac{\omega(k)\cdot e}{2m}$是一个4×4矩阵算符，它有4个本征值以及与之相应的四个本征函数。但本征值方程（1.162)表明，它的本征值都是二度简并的. 如果我们同时考虑$ir\cdot k$的本征值，这种简并性就得到说明：

$\frac{\omega(k)\cdot e}{2m}$的同一本征值　　　　　　$ir\cdot k$的不同本征值

$s=1$ 或 2 ＜ $u_{ks}$ ———————— $-m$
　　　　　　　$v_{ks}$ ———————— $+m$

$ir\cdot k$也是4×4矩阵算符，它也有4个本征值. 但从（1.169)式看到，它的本征值也是二度简并的. 同样地，这种简并性可用$\frac{\omega(k)\cdot e}{2m}$的本征值来加以说明：

$ir\cdot k$的同一本征值　　　　　　$\frac{\omega(k)\cdot e}{2m}$的不同本征值

$$-m\begin{cases} u_{k_1} \text{———————————} s=1 \\ u_{k_2} \text{———————————} s=2 \end{cases}$$

$$+m\begin{cases} v_{k_1} \text{———————————} s=1 \\ v_{k_2} \text{———————————} s=2 \end{cases}$$

综上所述，算符$\frac{\omega(k)\cdot e}{2m}$和$ir\cdot k$的本征值都是二度简并的，两者之间起着相互解释简并性的作用. 这一点，正好是如下事实的反映：即 Dirac 方程具有正能解和负能解，而且无论正能粒子或负能粒子都具有两种自旋态.

除了（1.168）和（1.170）以外，还有以下正交关系：

$$\bar{u}_{ks}u_{ks'}=0, \qquad s'\neq s \tag{1.171a}$$

$$\bar{v}_{ks}v_{ks'}=0. \qquad s'\neq s \tag{1.171b}$$

$$u^+_{ks}v_{-ks'}=0, \qquad s、s'=1,2 \tag{1.172a}$$

$$v^+_{ks}u_{-ks'}=0. \qquad s、s'=1,2 \tag{1.172b}$$

这些关系均可借助于$u_{ks}$、$v_{ks}$的表示式（1.142)来直接进行验证.

## （二）旋量振幅的归一化

有两种可能的归一化方案. 其一是以$u^+u$、$v^+v$的方式归一化，其二是以$\bar{u}u$、$\bar{v}v$的方式归一化. 我们首先来找出这两种方案之间的联系. 为此，把方程(1.143)和（1.144）重写如下：

$$(i\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{k}+i\gamma_4k_4+m)u_{ks}=0, \tag{1.173a}$$

$$\bar{u}_{ks}(i\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{k}+ir_4k_4+m)=0; \tag{1.173b}$$

$$(i\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{k}+i\gamma_4k_4-m)v_{ks}=0 \tag{1.174a}$$

$$\bar{v}_{ks}(i\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{k}+ir_4k_4-m)=0. \tag{1.174b}$$

以$u^+_{ks}$左乘(1.173) $a$，再以$r_4u_{ks}$右乘(1.173) $b$，然后将所得式相加而得下式：

$$\bar{u}_{ks}u_{ks}=\frac{m}{E_k}u^+_{ks}u_{ks}, \tag{1.175a}$$

同样，以$v^+_{ks}$左乘(1.174) $a$，再以$r_4v_{ks}$右乘(1.174) $b$，然后将所得式相加，又得：

$$\bar{v}_{ks}v_{ks}=-\frac{m}{E_k}v^+_{ks}v_{ks}. \tag{1.175b}$$

(1.175)式给出了两种归一化方案之间的联系. 下面就从该式出发来讨论旋量振幅的归一化. 为了得到Lorentz不变的归一化条件，应当以$\bar{u}u$、$\bar{v}v$的方式归一化. 不难验证，在

粒子自身参考系里有：

$$\bar{u}_{os}u_{os}=1,$$

$$\bar{v}_{os}v_{os}=-1,$$

由于$\bar{u}u$、$\bar{v}v$都是 Lorentz标量，故在任何一个 Lorentz 参考系里均有以下归一化条件成立：

$$\bar{u}_{ks}u_{ks}=1, \qquad (1.176)a$$

$$\bar{v}_{ks}v_{ks}=-1. \qquad (1.176)b$$

把（1.176）代入（1.175），便得到：

$$u^{+}_{ks}u_{ks}=\frac{E_k}{m} \qquad (1.177)a$$

$$v^{+}_{ks}v_{ks}=\frac{E_k}{m} \qquad (1.177)b$$

由于$u^+u$、$v^+v$不是Lorentz标量，故上式没有Lorentz不变性。

为了使（1.176）式得到满足，尚需引入适当的归一化系数．利用（1.142）式可得：

$$\bar{u}_{ks}u_{ks}=\left(\xi_s^+ \quad -\xi_s^+\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k}}{E_k+m}\right)\begin{pmatrix}\xi_s\\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k}}{E_k+m}\xi_s\end{pmatrix}=\frac{2m}{E_k+m},$$

和

$$\bar{v}_{ks}v_{ks}=-\frac{2m}{E_k+m},$$

因此，必须引入归一化系数$\sqrt{\frac{E_k+m}{2m}}$．相应地，（1.142）式应改写为下式：

$$u_{ks}=\sqrt{\frac{E_k+m}{2m}}\begin{pmatrix}\xi_s\\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k}}{E_k+m}\xi_s\end{pmatrix} \qquad s=1,2 \qquad (1.178)a$$

$$v_{ks}=\sqrt{\frac{E_k+m}{2m}}\begin{pmatrix}\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k}}{E_k+m}\xi_s\\ \xi_s\end{pmatrix} \qquad s=1,2 \qquad (1.178)b$$

现在把（一）、（二）两小节的结果综合起来，就得到旋量振幅（1.178）所满足的如下正交归一条件：

$$u^{+}_{\mathbf{k}s}u_{\mathbf{k}s'}=\frac{E_k}{m}\delta_{ss'},\tag{1.179a}$$

$$v^{+}_{\mathbf{k}s}v_{\mathbf{k}s'}=\frac{E_k}{m}\delta_{ss'};\tag{1.179b}$$

$$\bar{u}_{\mathbf{k}s}u_{\mathbf{k}s'}=\delta_{ss'},\tag{1.180a}$$

$$\bar{v}_{\mathbf{k}s}v_{\mathbf{k}s'}=-\delta_{ss'};\tag{1.180b}$$

$$\bar{u}_{\mathbf{k}s}v_{\mathbf{k}s'}=0,\quad s、s'=1,2\tag{1.181a}$$

$$\bar{v}_{\mathbf{k}s}u_{\mathbf{k}s'}=0;\quad s、s'=1,2\tag{1.181b}$$

$$u^{+}_{\mathbf{k}s}v_{-\mathbf{k}s'}=0,\quad s、s'=1,2\tag{1.182a}$$

$$v^{+}_{\mathbf{k}s}u_{-\mathbf{k}s'}=0.\quad s、s'=1,2\tag{1.182b}$$

## （三）平面波解的正交归一性

现在来看平面波(1.166)的正交归一性．其中的旋量振幅要由(1.178)式确定，并满足正交归一条件（1.179）—（1.182）．为方便起见，引入归一化体积$V$，并假定旋量波函数在$V$的边界面上满足周期性边界条件．这样，就可将波函数归一化为1，并在以后的计算里用对间断动量的求和代替对连续动量的积分．因为$\psi^{(\pm)}_{\mathbf{k}s}(x)$都是厄米算符的本征函数，故对厄米算符的本征值而言，有通常量子力学意义下的正交归一条件：

$$\int_V \overset{+}{\psi}{}^{(+)}_{\mathbf{k}s}(x)\,\psi^{(+)}_{\mathbf{k}'s'}(x)d^3x=\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\delta_{s,s'},\quad (d^3x=dx_1dx_2dx_3)\tag{1.183a}$$

$$\int_V \overset{+}{\psi}{}^{(-)}_{\mathbf{k}s}(x)\,\psi^{(-)}_{\mathbf{k}'s'}(x)d^3x=\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\delta_{ss'}\tag{1.183b}$$

为使这一条件得到满足，需要引入适当的归一化系数．把（1.166）代入上式，并利用（1.179）式和如下的积分公式：

$$\int_V e^{\pm i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}}d^3x=V\delta_{\mathbf{k}',-\mathbf{k}},\tag{1.184a}$$

$$\int_V e^{\pm i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}}d^3x=V\delta_{\mathbf{k}',\mathbf{k}},\tag{1.184b}$$

不难得到：

$$\int_V \overset{+}{\psi}{}^{(+)}_{\mathbf{k}s}(x)\,\psi^{(+)}_{\mathbf{k}'s'}(x)d^3x=V\frac{E_k}{m}\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\delta_{ss'},\tag{1.185a}$$

$$\int_V \overset{+}{\psi}{}^{(-)}_{\mathbf{k}s}(x)\,\psi^{(-)}_{\mathbf{k}'s'}(x)d^3x=V\frac{E_k}{m}\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\delta_{ss'}\tag{1.185b}$$

因此，所要引入的归一化系数是$\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{E_k}}$．与此相应，（1.166)式应改写为下式：

$\widehat{\mathrm{H}}$ $\widehat{\mathbf{k}}$ $\frac{\omega(k)\cdot e}{2m}$

$$\psi_{\mathbf{k}s}^{(+)}(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{E_k}}u_{\mathbf{k}s}e^{ik\cdot x},\qquad E_k\quad \mathbf{k}\quad \begin{cases}+\frac{1}{2}, & s=1\\ -\frac{1}{2}, & s=2\end{cases}$$

$$\psi_{\mathbf{k}s}^{(-)}(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{E_k}}v_{\mathbf{k}s}e^{-ik\cdot x},\qquad -E_k\quad -\mathbf{k}\quad \begin{cases}+\frac{1}{2}, & s=1\\ -\frac{1}{2}, & s=2\end{cases}\tag{1.186}$$

上式右边的旋量振幅由（1.178）式确定。

平面波解 $\psi_{\mathbf{k}s}^{(+)}(x)$ 和 $\psi_{\mathbf{k}s}^{(-)}(x)$ 同时又是非厄米算符 $i\gamma\cdot k$ 的本征函数，其相应本征值同样是 $-m$ 和 $+m$。因此，又有以下正交关系：

$$\left.\begin{aligned}&\int_V\overline{\psi}_{\mathbf{k}s}^{(+)}(x)\psi_{\mathbf{k}s'}^{(-)}(x)d^3x=0,\\&\int_V\overline{\psi}_{\mathbf{k}s}^{(-)}(x)\psi_{\mathbf{k}s'}^{(+)}(x)d^3x=0;\end{aligned}\right\}\quad(s,s'=1,2)\tag{1.187a}$$

$$\left.\begin{aligned}&\int_V\psi_{\mathbf{k}s}^{\dagger(+)}(x)\psi_{\mathbf{k}'s'}^{(-)}(x)d^3x=0,\\&\int_V\psi_{\mathbf{k}s}^{\dagger(-)}(x)\psi_{\mathbf{k}'s'}^{(+)}(x)d^3x=0.\end{aligned}\right\}\quad(\text{对}s、s'，\mathbf{k}、\mathbf{k}'\text{的一切可能值})\tag{1.187b}$$

在（1.183）和（1.187）式的意义下，（1.186）式对 $\mathbf{k}$、$s$ 的一切可能值构成Dirac方程的一组完全、正交、归一的平面波解，因而方程的任意解可用这组平面波解来线性表示：

$$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k},s=1}^{2}\sqrt{\frac{m}{E_k}}(c_{\mathbf{k}s}u_{\mathbf{k}s}e^{ik\cdot x}+d_{\mathbf{k}s}^{*}v_{\mathbf{k}s}e^{-ik\cdot x}),\tag{1.188a}$$

$$\overline{\psi}(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k},s=1}^{2}\sqrt{\frac{m}{E_k}}(c_{\mathbf{k}s}^{*}\overline{u}_{\mathbf{k}s}e^{-ik\cdot x}+d_{\mathbf{k}s}\overline{v}_{\mathbf{k}s}e^{ik\cdot x}),\tag{1.188b}$$

其中，$c_{\mathbf{k}s}$、$d_{\mathbf{k}s}$ 是一些展开系数。

## §9 投影算符与自旋求和公式

本节要定义 Dirac 粒子的正、负能投影算符，并推出自旋求和公式。这些公式在以后要用到。所谓投影算符，乃是 Hilbert 空间的投影运算，它与普通三维空间的投影运算相当（详见附录二）。

（一）正能与负能的投影算符

用$u_k$ 表示任意自旋态的正能旋量振幅，$v_k$ 表示任意自旋态的负能旋量振幅，则有

$$\left.\begin{aligned} &u_k = C_1 u_{k1} + C_2 u_{k2}, \\ &|C_1|^2 + |C_2|^2 = 1; \end{aligned}\right\} \tag{1.189a}$$

$$\left.\begin{aligned} &v_k = D_1 v_{k1} + D_2 v_{k2}, \\ &|D_1|^2 + |D_2|^2 = 1. \end{aligned}\right\} \tag{1.189b}$$

利用（1.180）和（1.181）不难验证以下等式：

$$\bar{u}_k u_k = 1,$$

$$\bar{v}_k v_k = -1,$$

$$\bar{u}_k v_k = \bar{v}_k u_k = 0.$$

再用$u$表示一个任意的量旋振幅，它是$u_k$、$v_k$的线性组合：

$$u = Au_k + Bv_k. \tag{1.190}$$

显然，旋量振幅$u$不满足方程（1.143）和（1.144）。

定义正能态投影算符为：

$$P_+ = u_k \bar{u}_k. \tag{1.191}$$

$P_+$把$u$投影为$Au_k$：

$$P_+ u = u_k \bar{u}_k (Au_k + Bv_k) = Au_k, \tag{1.192a}$$

$P_+$把$u_k$仍投影为它自己：

$$P_+ u_k = u_k \bar{u}_k \ u_k = u_k, \tag{1.192b}$$

$P_+$把$v_k$投影为零：

$$P_+ v_k = u_k \bar{u}_k v_k = 0. \tag{1.192c}$$

所有上面这些投影运算都可在普通三维空间找到类比。

同样地，定义负能态投影算符为：

$$P_- = -v_k \bar{v}_k. \tag{1.193}$$

与（1.192）类似地有：

$$P_- u = Bv_k, \tag{1.194a}$$

$$P_- v_k = v_k, \tag{1.194b}$$

$$P_- u_k = 0, \tag{1.194c}$$

把$P_+$重复作用于$u$得到

$$P_+P_+u = P_+Au_k = P_+u,$$

因此，

$$P_+P_+ = P_+, \tag{1.195a}$$

同样，把$P_-$重复作用于$u$可得

$$P_-P_- = P_-, \tag{1.195b}$$

通过计算$P_+P_-u$和$P_-P_+u$又得到

$$P_+P_- = P_-P_+ = 0. \tag{1.195c}$$

(1.195) 式是投影算符所应满足的基本关系式。

## (二) $P_+$、$P_-$用旋量振幅$u_{ks}$、$v_{ks}$来表示

利用 (1.189)式可得

$$\begin{aligned}
P_+ &= u_k\bar{u}_k = (C_1u_{k1} + C_2u_{k2})(C_1^*\bar{u}_{k1} + C_2^*\bar{u}_{k2}) \\
&= u_{k1}\bar{u}_{k1} + u_{k2}\bar{u}_{k2} + \\
&\quad + C_1C_2^*u_{k1}\bar{u}_{k2} + C_2C_1^*u_{k2}\bar{u}_{k1} \\
&\quad - |C_2|^2u_{k1}\bar{u}_{k1} - |C_1|^2u_{k2}\bar{u}_{k2}.
\end{aligned} \tag{1.196}$$

因为$P_+$应满足基本关系式 (1.195) $a$ 和(1.195) $c$，故 (1.196)右边最后四项的总和必须为零。因此，

$$P_+ = \sum_{s=1}^{2} u_{ks}\bar{u}_{ks}, \tag{1.197a}$$

用类似的方法可得

$$P_- = -\sum_{s=1}^{2} v_{ks}\bar{v}_{ks}. \tag{1.197b}$$

## (三) $P_+$、$P_-$的$\gamma$矩阵表示

$P_+$、$P_-$都是 4 × 4 矩阵算符. 这一点，从 (1.197) 式就可以看出来. 现在我们用$\gamma$ 矩阵来表示它. 因为$u_k$和$v_k$分别是$u_{ks}$和$v_{ks}$的线性组合〔见 (1.189) 式〕，故它们满足方程 (1.143) 和 (1.144)：

$$(\gamma\cdot k - im)u_k = 0, \tag{1.198a}$$

$$(\gamma\cdot k + im)v_k = 0. \tag{1.198b}$$

把(1.198) $a$ 与(1.194) $c$ 比较可知，$P_-$与 $(\gamma\cdot k - im)$ 只相差一个 c 数常数，把此常数记为$A_-$：

$$P_- = A_-(\gamma\cdot k - im), \tag{1.199a}$$

再把(1.198) $b$ 与(1.192) $c$ 比较可得：

$$P_+=A_+(\gamma\cdot k+im). \tag{1.199)b}$$

把(1.199) $b$ 代入(1.192) $b$ 便确定了常数$A_+$：

$$P_+u_{\mathbf{k}}=A_+(\gamma\cdot k+im)u_{\mathbf{k}}=A_+(\gamma\cdot k-im+2im)\,u_{\mathbf{k}}=u_{\mathbf{k}}$$

即

$$A_+=\frac{1}{2im}, \tag{1.200)a}$$

同样，把(1.199) $a$ 代入(1.194) $b$ 可确定常数$A_-$：

$$A_-=\frac{-1}{2im} \tag{1.200)b}$$

最后，把(1.200) $a$ 和(1.200) $b$ 分别代入(1.199) $b$ 和(1.199) $a$ 便得到投影算符的 $\gamma$ 矩阵表示式：

$$P_+=\frac{\gamma\cdot k+im}{2im}, \tag{1.201)a}$$

$$P_-=-\frac{\gamma\cdot k-im}{2im}. \tag{1.201)b}$$

### （四）自旋求和公式

把（1.197）和（1.201）相结合可以得到如下的自旋求和公式：

$$\sum_{s=1}^{2}(u_{\mathbf{k}s}\bar{u}_{\mathbf{k}s}-v_{\mathbf{k}s}\bar{v}_{\mathbf{k}s})=I_4, \tag{1.202}$$

它实际上就是 $\frac{\omega(k)\cdot e}{2m}$ 和$i\gamma\cdot k$的四个共同本征函数 $u_{\mathbf{k}s}$、$v_{\mathbf{k}s}$所满足的封闭性关系式。

因为

$$u_{\mathbf{k}s}=\begin{pmatrix}u_{\mathbf{k}s}^1\\ \vdots\\ u_{\mathbf{k}s}^4\end{pmatrix},\qquad v_{\mathbf{k}s}=\begin{pmatrix}v_{\mathbf{k}s}^1\\ \vdots\\ v_{\mathbf{k}s}^4\end{pmatrix},\quad s=1,2$$

故（1.202)式又可写成分量的形式：

$$\sum_{s=1}^{2}(u_{\mathbf{k}s}^{\alpha}\bar{u}_{\mathbf{k}s}^{\beta}-v_{\mathbf{k}s}^{\alpha}\bar{v}_{\mathbf{k}s}^{\beta})=\delta^{\alpha\beta} \tag{1.203}$$

其中，$\alpha$、$\beta=1,2,3,4$，

## §10 电荷共轭变换

如§1、§2两节所述，K—G方程和Dirac方程均存在负能困难. 从理论上看来，

负能解是无法回避的，问题在于如何去解释它，并弄清它对方程式本身的影响是什么？

### （一）Dirac“空穴”理论

Dirac粒子的自旋为$\frac{1}{2}$。这一点，恰好为解释Dirac方程的负能解提供了可能性。1930年，Dirac提出电子的“空穴”理论来解释方程的负能解。他的基本思想是：

（1）宇宙间每处都有密度为无限大的负能电子分布，形成所谓“负能电子海”。

（2）在负能电子海里，所有负能态（负能级）几乎已被电子占满，由于Fermi统计，处于正能态的通常电子，不可能跃迁到已被占据的负能级上去。因此，客观上存在的正能态（通常的正能电子）是稳定的。

（3）一个未被占据的负能态，就是负能电子海里的一个空穴，它表现为一个具有正能量、正电荷的电子——正电子。正电子与电子具有相同的质量和自旋，仅电荷符号相反。

（4）当一个通常的正能电子放射能量足够大的光子时（即当$E_\gamma=\hbar\omega\geqslant 2m_e$时），它就会跃迁到空着的负能级上去。于是，通常电子与空穴成对消失；反之，当一个处于负能态的电子因吸收电磁辐射而获得足够大的能量（$\Delta E\geqslant 2m_e$）时，它就会跃迁到正能态，成为一个具有正能量、负电荷的通常电子。与此同时，在负能电子海里留下一个具有正能量、正电荷的空穴——正电子。因此，电子与空穴成对产生。

（5）如果在宇宙空间的某些区域，所有负能态全都被电子占满，而所有正能态都空着，则这些区域就是所谓“电荷真空”。真空本身没有可观察的物理效应。真空便是能量、动量、电荷、自旋……都为零的状态（这一点，正好符合Lorentz不变性的要求，因为狭义相对论正是在真空是一无所有的这样一幅世界图景上建立起来的；注意到：负能解的出现，正是对方程的Lorentz不变性要求所导致的结果，就能更好地理解这一点）。

1932年，实验上发现了Dirac“空穴”理论预言的正电子，这是对这一理论的一大支持，也是Dirac方程的一大成功。此外，借助于空穴理论可以定性解释电子——正电子偶产生毁灭的实验现象。虽然，空穴理论对负能解的上述解释是不能令人满意的（密度为无限大的“负能电子海”不是一个可以接受的物理概念，因为它颇具有人为性；理论解释只适用于Fermi子，对Bose子便不适用），但它却为量子场论的建立提供了重要的线索：既然负能解意味着存在正电子，那么，Dirac方程便应同时描写电子和正电子。换言之，它不再描写单粒子的运动，而是描写“多粒子体系”的运动，人们应当把它看成一个场方程式。

### （二）电荷共轭不变性

在上述“空穴”理论的解释里，若把电子与正电子的地位互换，即把Dirac方程看成是描写正电子的方程式，并用“负能正电子海”去代替“负能电子海”……，那么，整个Dirac理论的形式体系将是不变的。这意味着Dirac方程还具有一种新的对称性：对于交换电子与正电子的操作，方程应具有不变性。

为了从数学上描写这种不变性，我们定义如下的 4 × 4 非奇异矩阵C：〔注1〕

$$C^{-1}\gamma_\mu C = -\gamma_\mu^T, \qquad (1.204)a$$

$$C^{+} = C^{-1}, \qquad (1.204)b$$

$$C^{T} = -C, \qquad (1.204)c$$

矩阵算符右上角的字母 "T" 代表转置. 借助于矩阵 C 定义如下的电荷共轭变换：

$$\psi^C(x) = C\,\overline{\psi}^T(x), \qquad [\overline{\psi}^T = (\psi^+\gamma_4)^T] \qquad (1.205)a$$

$$\psi(x) = C\,\overline{\psi}^{CT}(x). \qquad (1.205)b$$

$\psi^C(x)$ 称为$\psi(x)$ 的电荷共轭波函数，反之亦然. 下面一小节就会看到，电荷共轭变换（1.205）即是交换电子与正电子的操作.

现在来证明 Dirac 方程（1.34）在电荷共轭变换下具有不变性. 将（1.34）取厄米共轭，并右乘$\gamma_4$得：

$$\overline{\psi}(x)\,(\gamma_\mu \overleftarrow{\partial_\mu} - m) = 0,$$

此式取转置并左乘以矩阵C，然后利用（1.204）$a$ 式就得到$\psi^C(x)$ 满足的方程式：

$$(\gamma_\mu\partial_\mu + m)\,\psi^C(x) = 0. \qquad (1.206)$$

(1.206)式与(1.34) 式具有相同形式，这就证明了Dirac方程在电荷共轭变换(1.205)之下具有不变性.

## （三）正、反粒子共轭变换

在这一小节里，我们要证明电荷共轭变换（1.205)即是交换粒子与反粒子的操作. $\psi^C(x)$ 所描写的态　首先来考察旋量振幅$u_{ks}$、$v_{ks}$的电荷共轭变换：

$$u_{ks}^C = C\,\overline{u}_{ks}^T, \qquad [\overline{u}^T = (u^+\gamma_4)^T] \qquad (1.207)a$$

$$v_{ks}^C = C\,\overline{v}_{ks}^T. \qquad [\overline{v}^T = (v^+\gamma_4)^T] \qquad (1.207)b$$

把（1.143）$b$ 取转置并左乘矩阵C即得

$$(\gamma\cdot k + im)\,u_{ks}^C = 0, \qquad (1.208)a$$

再把（1.144）$b$ 取转置并左乘矩阵C又得

$$(\gamma\cdot k - im)\,v_{ks}^C = 0. \qquad (1.208)b$$

将(1.208) $a$ 和(1.208) $b$ 分别与(1.144) $a$ 、(1.143) $a$ 比较，便不难看出：

$$u_{ks}^C = a_1^s v_{k1} + a_2^s v_{k2}, \qquad (1.209)a$$

$$v_{ks}^C = b_1^s u_{k1} + b_2^s u_{k2}, \qquad (1.209)b$$

---

〔注1〕 也可以从方程的不变性出发来定义C. 见A. И. 阿希叶泽尔《量子电动力学》PP. 66—67，科学出版社，1964年

其中，$a_\sigma^s$和$b_\sigma^s$($\sigma$、$s=1，2$)是一些常系数．因为

$$\psi_{\mathbf{k}s}^{(+)C}(x)=C\bar{\psi}_{\mathbf{k}s}^{(+)T}(x)=u_{\mathbf{k}s}^{C}e^{-ik\cdot x}, \tag{1.210a}$$

$$\psi_{\mathbf{k}s}^{(-)C}(x)=C\bar{\psi}_{\mathbf{k}s}^{(-)T}(x)=v_{\mathbf{k}s}^{C}e^{+ik\cdot x}, \tag{1.210b}$$

故由（1.209)可得：

$$\psi_{\mathbf{k}s}^{(+)C}(x)=a_1^s\psi_{\mathbf{k}1}^{(-)}(x)+a_2^s\psi_{\mathbf{k}2}^{(-)}(x), \tag{1.211a}$$

$$\psi_{\mathbf{k}s}^{(-)C}(x)=b_1^s\psi_{\mathbf{k}1}^{(+)}(x)+b_2^s\psi_{\mathbf{k}2}^{(+)}(x), \tag{1.211b}$$

此式表明：在电荷共轭变换下，$\begin{smallmatrix}+E_k\\+\mathbf{k}\end{smallmatrix}$的平面波解变换为$\begin{smallmatrix}-E_k\\-\mathbf{k}\end{smallmatrix}$的平面波解，反之亦然．

为了确定电荷共轭波函数所描写的自旋态，我们来做下面的推算：

$$\frac{\omega(k)\cdot e}{2m}u_{\mathbf{k}s}^{C}\overset{\text{由(1.154)}}{=}\frac{\gamma_5\gamma\cdot e\gamma\cdot k}{2m}u_{\mathbf{k}s}^{C}$$

$$=\frac{\gamma_5\gamma\cdot e\gamma\cdot k}{2m}C\gamma_4u_{\mathbf{k}s}^{*}\overset{\text{由(1.204)}a}{=}\frac{\gamma_5\gamma\cdot e}{2m}C\gamma_4\left\{\gamma\cdot ku_{\mathbf{k}s}\right\}^{*}$$

$$\overset{\text{由(1.143)}a}{=}-\frac{i}{2}\gamma_5\gamma\cdot eu_{\mathbf{k}s}^{C} \tag{1.212a}$$

同样可得

$$\frac{\omega(k)\cdot e}{2m}v_{\mathbf{k}s}^{C}=\frac{i}{2}\gamma_5\gamma\cdot ev_{\mathbf{k}s}^{C}. \tag{1.212b}$$

把(1.212)$a$、(1.212)$b$分别与(1.163)$a$、(1.163)$b$进行比较可知：$u_{\mathbf{k}s}^{C}$与$u_{\mathbf{k}s}$，$v_{\mathbf{k}s}^{C}$与$v_{\mathbf{k}s}$都是算符$\frac{\omega(k)\cdot e}{2m}$的本征函数，但本征值的符号两两相反．换言之，$\psi_{\mathbf{k}s}^{(+)C}(x)$与$\psi_{\mathbf{k}s}^{(+)}(x)$以及$\psi_{\mathbf{k}s}^{(-)C}(x)$与$\psi_{\mathbf{k}s}^{(-)}(x)$所描写的态，其自旋方向两两相反．

综上所述，如果$\psi(x)$是Dirac方程的一个能量为$+E_k$动量为$+\mathbf{k}$且自旋向$\frac{上}{下}$〔注1〕的平面波解，则$\psi^C(x)$便是一个能量为$-E_k$动量为$-\mathbf{k}$且自旋向$\frac{下}{上}$的平面波解，反之亦然．因此，方程（1.34）在电荷共轭变换下的不变性，即

〔注1〕 我们这里用自旋向$\frac{上}{下}$来分别代表$\frac{\omega(k)\cdot e}{2m}$的本征值为$\pm\frac{1}{2}$的态．

$$
\begin{array}{c}
(\gamma\cdot\partial+m)\psi(x)=0 \\
\Big\downarrow \psi^{C}=C\overline{\psi}^{T} \\
(\gamma\cdot\partial+m)\psi^{C}(x)=0
\end{array}
\qquad (\gamma\cdot\partial\equiv\gamma_\mu\partial_\mu)
$$

意味着在Dirac方程（1.34）的正能解（$+E_k$、$+\mathbf{k}$且自旋向$\frac{上}{下}$的解）与负能解（$-E_k$、$-\mathbf{k}$且自旋向$\frac{下}{上}$的解）之间存在一一对应的关系.

**电子与正电子的互换** 一个在电磁场里运动的电子，它的波动方程为

$$(\gamma\cdot\partial-ie\gamma\cdot A+m)\psi(x)=0, \tag{1.213}$$

在电荷共轭变换(1.205) $a$ 之下，上式成为：

$$(\gamma\cdot\partial+ie\gamma\cdot A+m)\psi^{C}(x)=0. \tag{1.214}$$

其中，$\gamma\cdot A\equiv\gamma_\mu A_\mu$（$A_\mu$是电磁场的四维矢势）. 前已述及，电子与正电子具有相同的质量和自旋，仅电荷符号相反. 因此，若（1.213）是描写电子在电磁场里运动的波动方程式，则（1.214）便是描写正电子在同一电磁场里运动的波动方程式. 简言之，在有外电磁场的情形下，电荷共轭变换(1.205)$a$的作用是使电子的波动方程式与正电子的波动方程式互换. 如果$\psi_{ks}^{(-)}(x)$是方程（1.213）的解，它描写能量为$-E_k$、动量为$-\mathbf{k}$且自旋向$\frac{上}{下}$的电子——负能电子，那么，在电荷共轭变换下，$\psi_{ks}^{(-)}(x)$将变换为$\psi_{ks}^{(-)C}(x)$，后者是方程（1.214）的正能解，它描写能量为$+E_k$、动量为$+\mathbf{k}$且自旋向$\frac{下}{上}$的正电子. 于是，引入外电磁场，使我们能够直观地显示电荷共轭变换的物理内容：电荷共轭变换(1.205)$a$是将Dirac方程的负能电子解变换为正能正电子解，或将正能电子解变为负能正电子解，它是把电子与正电子在理论里的地位互换. 电子是（正）粒子，正电子是反粒子. 因此，电荷共轭变换是交换粒子与反粒子的操作. 以后将会看到，电荷共轭变换同样适用于中性的粒子与反粒子. 所以电荷共轭变换又称为正、反粒子共轭变换.

由上述讨论看到，在相对论量子力学范围内，电荷共轭变换并未直接将电子态与正电子态相互交换，还必须引入负能电子作为中介，并辅之以从负能态到正能态的跃迁. 电子态与正电子态之间的互换关系可用如右的示意图来表示.

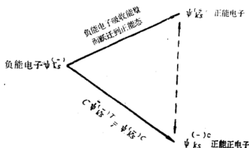



图1——3

在第五章和第六章里将会看到，在量子场论的理论框架里，不再出现负能困难，空穴理论的解释也不再是必要的，电荷共轭变换将直接交换粒子与反粒子.

（四）矩阵C的存在性

条件（1.204）对矩阵C的限制是比较强的. 这就产生一个问题：满足条件(1.204)

的矩阵C是否存在？若找不到这样一个矩阵C，则前面两小节的讨论便不能成立．现在，我们就从（1.204)出发来找出矩阵C．因为

$$\gamma_1^T=-\gamma_1,\quad \gamma_2^T=\gamma_2,\quad \gamma_3^T=-\gamma_3,\quad \gamma_4^T=\gamma_4$$

所以由(1.204)$a$得到：

$$\begin{aligned}&[\gamma_1,C]=0,\quad \{\gamma_2,C\}=0,\\&[\gamma_3,C]=0,\quad \{\gamma_4,C\}=0.\end{aligned}\tag{1.215}$$

这里，$[\hat{A},\hat{B}]=\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}$，$\{\hat{A},\hat{B}\}=\hat{A}\hat{B}+\hat{B}\hat{A}$．按照(1.215)式以及$\gamma$矩阵所满足的代数关系(1.36)$a$，可令

$$C=\gamma_2\gamma_4\times const.$$

根据(1.204)$b$，应有$C^+C=I_4$，因而$const.=1$，由此得到

$$C=\gamma_2\gamma_4.\tag{1.216}$$

不难验证，由上式确定的矩阵C已自动满足(1.204C)式．

## §11　中微子二分量理论

Dirac方程描写自旋值为$\frac{1}{2}$的粒子，但中微子情况特殊．由于中微子质量为零[注1]，使理论形式产生一系列的变化．

### （一）从m≠0的Dirac理论过渡到中微子理论

我们首先来看当$m=0$时前面各节的理论应当如何变化．

**波动方程及其解**　当$m=0$时，Dirac方程简化为

$$\gamma_\mu\partial_\mu\psi(x)=0.\tag{1.217}$$

把(1.178)代入(1.186)并令$m=0$，就得到方程(1.217)的平面波解：

$$\psi_{ks}^{(+)}(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}u_{ks}e^{ik\cdot x}\tag{1.218a}$$

$$\psi_{ks}^{(-)}(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}v_{ks}e^{-ik\cdot x}\tag{1.218b}$$

其中，

$$u_{ks}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\xi_s\\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}\xi_s\end{pmatrix},\quad \begin{matrix}|\mathbf{k}|=E_k\\ s=1,2\end{matrix}\tag{1.219a}$$

〔注1〕　迄今为止的实验事实尚未证明中微子质量不为零，但实验和理论的进一步发展，可能完全改变我们现在的认识．读者可参阅《高能物理》，1983年第1期，pp.13—14的介绍．

$$v_{\mathbf{k}s}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\frac{\sigma\cdot\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}\xi_s\\ \xi_s\end{pmatrix}. \tag{1.219b}$$

方程（1.217）的任意解可表示为（1.218）式的线性组合：

$$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}s}(c_{\mathbf{k}s}u_{\mathbf{k}s}e^{ik\cdot x}+d^*_{\mathbf{k}s}v_{\mathbf{k}s}e^{-ik\cdot x}), \tag{1.220a}$$

$$\bar{\psi}(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}s}(c^*_{\mathbf{k}s}\bar{u}_{\mathbf{k}s}e^{-ik\cdot x}+d_{\mathbf{k}s}\bar{v}_{\mathbf{k}s}e^{ik\cdot x}). \tag{1.220b}$$

**归一化条件** 由（1.175）式可知，当$m=0$时，恒有

$$\bar{u}_{\mathbf{k}s}u_{\mathbf{k}s}=\bar{v}_{\mathbf{k}s}v_{\mathbf{k}s}=0,$$

因而归一化条件（1.180）不能再用，而必须用如下的归一化条件：

$$u^+_{\mathbf{k}s}u_{\mathbf{k}s'}=\delta_{ss'}, \tag{1.221a}$$

$$v^+_{\mathbf{k}s}v_{\mathbf{k}s'}=\delta_{ss'}. \tag{1.221b}$$

不难验证，（1.219）式的旋量振幅已自动满足归一化条件（1.221）。

**投影算符** 首先，当$m\neq 0$时，若取（1.221）式作为归一化条件，则由（1.175）式可得：

$$\bar{u}_{\mathbf{k}s}u_{\mathbf{k}s'}=\frac{m}{E_k}\delta_{ss'}, \tag{1.222a}$$

$$\bar{v}_{\mathbf{k}s}v_{\mathbf{k}s'}=-\frac{m}{E_k}\delta_{ss'}. \tag{1.222b}$$

因此，利用(1.197) $a$ 和(1.189) $a$ 有

$$P_+u_{\mathbf{k}}=\frac{m}{E_k}u_{\mathbf{k}},$$

将此式与(1.199) $b$ 结合，便得到

$$P_+=\sum_{s=1}^{2}u_{\mathbf{k}s}\bar{u}_{\mathbf{k}s}=\frac{\gamma\cdot k+im}{2iE_k}, \tag{1.223a}$$

类似地，可得

$$P_-=-\sum_{s=1}^{2}v_{\mathbf{k}s}\bar{v}_{\mathbf{k}s}=-\frac{\gamma\cdot k-im}{2iE_k} \tag{1.223b}$$

在上式中令$m=0$就得到中微子态的投影算符：

$$P_+=\sum_{s=1}^{2}u_{\mathbf{k}s}\bar{u}_{\mathbf{k}s}=\frac{\gamma\cdot k}{2i|\mathbf{k}|} \tag{1.224a}$$

$$P_-=-\sum_{s=1}^{2}v_{\mathbf{k}s}\bar{v}_{\mathbf{k}s}=-\frac{\gamma\cdot k}{2i|\mathbf{k}|}. \tag{1.224b}$$

其中，$u_{ks}$、$v_{ks}$由（1.219)式确定.

**平面波解按自旋态的分类** 如§7所述，在$m\neq 0$的情况下，将平面波解按标量算符$\frac{\omega(k)\cdot e}{2m}$的本征值分类具有Lorentz不变性. 但当$m=0$时，标量算符无法定义，况且$m=0$的粒子不存在自身参考系，因而本征值方程（1.162)将没有意义.

对于$m=0$的粒子，采用螺旋度算符的本征值来区分平面波解是完全适当的. 分析如下：若$m\neq 0$，总可以找到两个Lorentz参考系$O$和$O'$，粒子对$O$有速度$\mathbf{v}$，$O'$对$O$有速度$\mathbf{V}$，$\mathbf{V}\parallel\mathbf{v}$，且$|\mathbf{v}|<|\mathbf{V}|<c$（见图1—4）. 这样，在$O'$系的观察者看来，粒子的速度为$\mathbf{v}'$，它与$\mathbf{v}$方向恰相反. 换言之，粒子在上述两个参考系里的动量方向相反，而自旋方向不变. 因而若在$O$系的观察者看来$h=+1$，粒子处于右旋态[注1]，则在$O'$系的观察者看来，$h=-1$，粒子处于左旋态. $m\neq 0$的Dirac粒子有两种螺旋态，即右旋态和左旋态. 如上所述，这两种自旋态都没有Loretz不变性，当参考系转换时，右旋态可以转变为左旋态，左旋态也可以转变为右旋态. 但若$m=0$，粒子速度对一切参考系恒为光速$c$，在任意两个参考系里，粒子动量方向不会倒转. 因此，对一切参考系而言，粒子的螺旋度或者恒为$+1$. 或者恒为$-1$，即左旋态和右旋态分别具有Lorentz不变性.

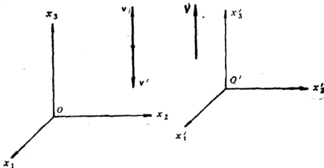



图1—4

由于上述原因，我们就用螺旋度来区分中微子波动方程的平面波解. 这意味着$u_{ks}$、和$v_{ks}$都是螺旋度算符的本征函数. 或者说，中微子和反中微子是纵向极化的[注2]. 实验事实证明[注3]，中微子总是处于左旋态（$h=-1$），反中微子总是处于右旋态（$h=+1$）. 在自然界里不存在右旋中微子和左旋反中微子.

最后应指出，由于我们现在选择$u_{ks}$、$v_{ks}$是$h=\mathbf{\Sigma}\cdot\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$的本征函数，故(1.219)式

〔注1〕 所谓右旋态，是指自旋方向与动量方向的关系恰如右手四指与大拇指的关系，而所谓左旋态，是指自旋方向与动量方向的关系恰如左手四指与大拇指的关系。

〔注2〕，所谓纵向极化，就是指粒子自旋角动量之平均取向与粒子动量方向平行或反平行. 例如，中微子处于左旋极化态，自旋与动量反平行；反中微子处于右旋极化态，自旋与动量平行.

〔注3〕 见《基本粒子译文集》第二集，p18，科学技术文献出版社重庆分社，1978年。

中的$\xi_s$不再是$\sigma_3$的本征函数. 不难证明, $\xi_s$是$\sigma\cdot\frac{k}{|k|}$的本征函数, 而且有

$$\xi_1=\frac{1}{\sqrt{2(n_3+1)}}\begin{pmatrix} n_3+1 \\ n_1+in_2 \end{pmatrix} \tag{1.225$a$}$$

$$\xi_2=\frac{1}{\sqrt{2(n_3+1)}}\begin{pmatrix} -n_1+in_2 \\ n_3+1 \end{pmatrix} \tag{1.225$b$}$$

其中, $\mathbf{n}=\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$.

## （二）二分量理论

中微子理论的特点之一是: 它破坏了空间反演和电荷共轭变换下的不变性（我们知道, $m\neq 0$的 Dirac 理论在这两种变换下均具有不变性）. 这一特点反映在理论的形式上, 便是在理论里出现$\gamma_5$矩阵, 因而中微子态和反中微子态具有所谓“手征性”. 理论的上述特点引出了第二个特点: 即中微子、反中微子波函数不再具有四个独立分量, 而只有两个独立分量.

**手征性** 把平面波(1.218) $a$和(1.218) $b$分别代入 (1.217)式得

$$\gamma_\mu k_\mu u_{ks}=0, \tag{1.226$a$}$$

$$\gamma_\mu k_\mu v_{ks}=0. \tag{1.226$b$}$$

因为$\gamma_5$与$\gamma_\mu$反对易〔见(1.68)$c$式〕, 故$\pm\gamma_5 u_{ks}$和 $\pm\gamma_5 v_{ks}$同样是 (1.226)式的解:

$$\gamma_\mu k_\mu(\pm\gamma_5 u_{ks})=0, \tag{1.227$a$}$$

$$\gamma_\mu k_\mu(\pm\gamma_5 v_{ks})=0. \tag{1.227$b$}$$

因此, 我们有:

$$\gamma_5 u_{ks}=\pm u_{ks}, \tag{1.228$a$}$$

$$\gamma_5 v_{ks}=\pm v_{ks}. \tag{1.228$b$}$$

此式表明, $u_{ks}$和$v_{ks}$都是$\gamma_5$的本征函数. 相应的本征值称为手征性, 其值为$\pm 1$.

现在来寻找手征性和螺旋度之间的关系. 注意到$\gamma\cdot k=\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{k}+\gamma_4 k_4$, 并以$i\gamma_5\gamma_4$左乘(1.226) $a$ 式可得

$$(i\gamma_5\gamma_4\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{k}-\gamma_5 E_k)u_{ks}=0,$$

利用$\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\gamma}$、$\boldsymbol{\Sigma}$之间的如下关系:

$$i\gamma_4\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}, \qquad \gamma_5\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\Sigma}, \tag{1.229}$$

可将上面的方程式改写为

$$\boldsymbol{\Sigma}\cdot\mathbf{k}u_{ks}=-E_k\gamma_5 u_{ks}$$

即

$$\frac{\boldsymbol{\Sigma}\cdot\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}u_{\mathbf{k}s} = -\gamma_5 u_{\mathbf{k}s}. \tag{1.230}$$

对于$+E_{\mathbf{k}}$、$+\mathbf{k}$的解，螺旋度算符为

$$h^{(+)} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}\cdot\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}, \tag{1.231}$$

因此，(1.230)式给出$h^{(+)}$与$\gamma_5$的如下关系：

$$h^{(+)} u_{\mathbf{k}s} = -\gamma_5 u_{\mathbf{k}s}, \tag{1.232}$$

这就是说，在正能解情形下，螺旋度与手征性总是等大反号（注意，我们都在Pauli度规下讨论，$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$，见附录三）：

$$\left.\begin{aligned} h^{(+)} &= +1, \quad \text{当}\gamma_5\text{的本征值为}-1 \\ h^{(+)} &= -1, \quad \text{当}\gamma_5\text{的本征值为}+1 \end{aligned}\right\} \tag{1.233}$$

从(1.226) $b$式出发进行类似的推算可得

$$h^{(-)} v_{\mathbf{k}s} = \gamma_5 v_{\mathbf{k}s}, \tag{1.234}$$

其中，$h^{(-)} = -h^{(+)}$.因此，在负能解情形下，螺旋度与手征性总是相同：

$$\left.\begin{aligned} h^{(-)} &= +1, \quad \text{当}\gamma_5\text{的本征值为}+1 \\ h^{(-)} &= -1, \quad \text{当}\gamma_5\text{的本征值为}-1 \end{aligned}\right\} \tag{1.235}$$

**左旋态与右旋态**　以$\pm\gamma_5$左乘（1.217)，并将所得式与（1.217）式相加，再乘以$\frac{1}{2}$便得到下式：

$$\gamma_\mu \partial_\mu \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)\psi(x) = 0. \tag{1.236}$$

令[注1]

$$\psi_L = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi, \tag{1.237a}$$

$$\psi_R = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi, \tag{1.237b}$$

则不难看出，$\psi_L(x)$和$\psi_R(x)$都是$\gamma_5$的本征态，其手征性分别为$+1$和$-1$：

$$\gamma_5 \psi_L(x) = \psi_L(x), \tag{1.238a}$$

$$\gamma_5 \psi_R(x) = -\psi_R(x). \tag{1.238b}$$

---

〔注1〕 如果用B—D度规（附录三），则$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$，那时，$\psi_L$与$\psi_R$的表示式互换。

$\psi_L(x)$和$\psi_R(x)$所描写的态分别称为左旋态和右旋态. 这是因为当它们都是方程(1.236)的正能解时，$\psi_L$描写左旋粒子，$h=-1$；$\psi_R(x)$ 描写右旋粒子，$h=+1$.按照前面述及的实验事实，可取$\psi_L(x)$为中微子波函数，$\psi_R(x)$为反中微子波函数. 我们看到，$m\neq0$的Dirac粒子的波函数$\psi(x)$可以分解为$\psi_L(x)$与$\psi_R(x)$之和：

$$\psi(x)=\psi_L(x)+\psi_R(x). \tag{1.239}$$

但是，如前一小节已谈到的，当$m\neq0$时，上式的分解不具有 Lorentz 不变性，这是因为$m\neq0$的 Dirac 粒子有两种纵向极化态，左旋态和右旋态，而当$m=0$时，粒子只有一种纵向极化态，左旋态或右旋态，因而(1.239) 式的分解具有Lorentz不变性.

**中微子波函数的独立分量数目** 由于$\xi_s$是$\frac{\sigma\cdot k}{|k|}$的本征函数，因而(1.219) 式的旋量振幅$u_{ks}$、$v_{ks}$事实上都只有两个独立分量. 于是，(1.217)式的任意解$\psi(x)$不再是具有四个分量的双旋量，而是只有两个独立分量的旋量波函数. 这一点，从$\psi_L(x)$ 和$\psi_R(x)$的矩阵形式里可以看得更清楚：

$$\psi_L(x)=\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi(x)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}(\varphi-\chi)\\-(\varphi-\chi)\end{pmatrix} \tag{1.240a}$$

$$\psi_R(x)=\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi(x)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\varphi+\chi\\\varphi+\chi\end{pmatrix} \tag{1.240b}$$

其中，$\psi(x)=\begin{pmatrix}\varphi\\\chi\end{pmatrix}$是一个双旋量，它现在只有两个独立分量，而 (1.240) 式把这一点表示得更加明显.

**P 破坏和 C 破坏** 在二分量中微子理论里出现$\gamma_5$矩阵，使得理论不再具有空间反演不变性. 这一点，只要回忆§5里关于赝标量、赝矢量的讨论便不难理解。对 $\psi_L(x)$ 和$\psi_R(x)$ 分别进行空间反演：

$$P\psi_L(x)=\gamma_4\psi_L(x)=\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi'(x')=\psi_R'(x'), \tag{1.241a}$$

$$P\psi_R(x)=\gamma_4\psi_R(x)=\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi'(x')=\psi_L'(x'). \tag{1.241b}$$

这一结果表明，一个左旋中微子的镜像是一个右旋中微子；而一个右旋反中微子的镜像则是一个左旋反中微子. 但是这些镜像粒子都是不存在的，所以二分量理论不具有空间反演不变性. 顺便指出，正是由于中微子和反中微子都只具有一种螺旋态（纵向极化态），因而在弱作用过程里，宇称守恒定律不再成立.

二分量理论同样破坏了电荷共轭对称性：

$$\psi_L^C=C\bar{\psi}_L^T=\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi^C \tag{1.242a}$$

$$\psi_R^C = C\overline{\psi}_R^T = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi^C \tag{1.242b}$$

由此不难验证：

$$\gamma_5\psi_L^C = -\psi_L^C,$$

$$\gamma_5\psi_R^C = \psi_R^C.$$

把以上二式与（1.238）比较可知，在电荷共轭变换下，$\psi_L$与$\psi_R$的手征性互换．因此，电荷共轭变换的结果是：粒子与反粒子交换而螺旋度不变．这显然破坏了电荷共轭对称性．

请读者自己证明，中微子二分量理论具有C、P联合变换下的不变性．

## §12 光子的量子力学方程式

非相对论量子力学只适用于有质量粒子的低速运动，对于质量为零的粒子，它的量子力学理论一开始便是相对论性的量子理论．那么，像光子这样的零质量粒子，应当怎样建立它的量子力学理论呢？本节就来讨论这个问题．

### （一）光子波动方程

在建立非相对论波动方程时，人们是把相应的经典体系的运动方程拿来进行量子化；而在建立中微子的相对论波动方程时，人们又是从$m\neq 0$的Dirac理论开始向$m=0$的理论进行自然的过渡．光子作为微观粒子，它的运动没有经典类比．但是，人们在相对论量子力学出现之前就已提出了光的量子学说（见第二章§1），因此，可以设想：加上适当的量子化假设，便可把Maxwell方程式作为光子的量子力学方程式．在$\hbar=c=1$的单位制里，真空中的Maxwell方程组有以下形式：

$$\nabla\cdot\mathbf{H}=0, \tag{1.243a}$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} \tag{1.243b}$$

$$\nabla\times\mathbf{H}=\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \tag{1.243c}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=0. \tag{1.243d}$$

或者

$$\mathbf{H}=\nabla\times\mathbf{A}, \tag{1.244a}$$

$$\mathbf{E}=-\nabla A_0-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \tag{1.244b}$$

$$\nabla\times\mathbf{H}=\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}. \tag{1.244c}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=0. \tag{1.244d}$$

其中，A和$A_0$分别是电磁场的矢势和标势。方程组(1.243)是在坐标空间建立的，而对于光子来说，“在空间某点出现的几率”这一概念并不适用，这是由于光子不能被定域在比波长小的范围内。由于这样，光子的量子力学理论不能在坐标空间来建立，而必须在动量空间来建立[注1]。把Maxwell方程组(1.243)转到波矢k空间，并进行适当的变换，可以导出Schrödinger形式的波动方程如下：

$$i\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{f}_k=W\mathbf{f}_k \tag{1.245a}$$

其中，向量函数$\mathbf{f}_k$与电场矢量的付里叶分量$\mathbf{E}_k$有以下关系：

$$\mathbf{E}_k=N(|\mathbf{k}|)\ (\mathbf{f}_k+\mathbf{f}^*_{-k}),$$

$$\dot{\mathbf{E}}_k=i|\mathbf{k}|N(|\mathbf{k}|)(\mathbf{f}_k-\mathbf{f}^*_{-k}).$$

方程(1.245)$a$与横向条件

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{f}_k=0 \tag{1.245b}$$

相结合，便与Maxwell方程组(1.243)等效。倘若加入下述的量子假设：(1)光子的波动性即是电磁波的波动性；(2)(1.245)$a$中的算符$W$便是光子的Hamilton算符，它的本征值$E_k=\omega_k=|\mathbf{k}|$即是一个光子的量子力学能量(其中，k和$\omega_k$在经典的意义下分别是电磁波的波矢量和角频率，而现在k又应解释为单个光子的动量)，那么，方程(1.245)$a$就可作为光子的量子力学方程式，$\mathbf{f}_k$即是光子的动量空间波函数。从波动方程(1.245)$a$出发，可以建立起一整套光子的量子力学理论。

然而，当从量子力学过渡到量子场论时，把(1.245)$a$作为二次量子化的出发点是很不方便的。那时，我们将根据(1.245)式与Maxwell方程组之等效性，直接从Maxwell方程组出发来建立量子场论的理论体系，并把电磁场的四维矢势$A_\mu$与光子波函数等同看待。

## (二) 规范变换与规范不变性

方程(1.243)可以写为如下的四维形式：

$$\partial_\lambda\hat{F}_{\lambda\nu}=0, \tag{1.246a}$$

$$\partial_\lambda F_{\lambda\nu}=0. \tag{1.246b}$$

其中

$$\hat{F}_{\lambda\nu}=\frac{1}{2}\varepsilon_{\lambda\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma},$$

$$F_{\lambda\nu}=\partial_\lambda A_\nu-\partial_\nu A_\lambda,\ \text{(电磁场张量)}$$

---

[注1] 关于光子的量子力学理论，在A.И.阿希叶泽尔，Б.В.别列斯捷茨基著《量子电动力学》，第一章已有详尽的论述。(科学出版社，1964年)。

$$A_\mu = (\mathbf{A}, iA_0). \quad \text{(电磁场的四维矢量势)}$$

电磁场张量分量$F_{\mu\nu}$与电磁场矢量诸分量由下式联系：

$$F_{jk} = \varepsilon_{jkl} H_l, \quad j, k, l = 1, 2, 3$$

$$F_{4l} = -F_{l4} = iE_l.$$

由经典电动力学已熟知，Maxwell方程在规范变换

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x) \tag{1.247}$$

之下具有不变性。其中，$\alpha(x)$是一个Lorentz标量函数，我们这里称它为规范函数。不同的规范函数给出不同的规范，因此，$A'_\mu(x)$可以取无穷多种规范，或者说，它有无限多的规范自由度。但并非所有规范都能反映真实的电磁运动，必须加入适当的辅助条件来限制取某些规范。

**Lorentz规范**　引入协变形式的Lorentz辅助条件

$$\partial_\mu A_\mu(x) = 0 \tag{1.248}$$

来限制规范变换（1.247）。这时，规范函数要满足如下条件：

$$\Box \alpha(x) = 0. \tag{1.249}$$

但由于满足上式的规范函数很多，所以规范自由度并不唯一。把（1.248)代入 Maxwell方程（1.246）$b$可得$A_\mu(x)$满足的微分方程式

$$\Box A_\mu(x) = 0. \tag{1.250}$$

此式与Lorentz条件（1.248）一起构成一个与Maxwell 方程组（1.246）等效的方程组〔注1〕，因此，在建立量子场论的理论体系时，我们可以直接把（1.250）式看成是光子的量子力学方程式。

在Lorentz规范下，电磁场有四个独立分量$A_\mu(x)(\mu = 1, 2, 3, 4)$。如果在动量空间选用纵横坐标系：即选择第三个空间坐标轴与波矢量$\mathbf{k}$同向平行，则存在四个分量$A_\mu(x)$的事实就相应于宏观电磁波有四种独立的偏振态，或微观光子有四种独立的极化态。这四种极化态是：与光子动量方向（即波矢$\mathbf{k}$方向）垂直的两种横向极化态，与动量方向平行的纵向极化态以及与时间轴"平行"的时间极化态。但客观上只存在横光子，不存在纵光子和时间光子。因此，在Lorentz 规范下，电磁场理论仍然提供多余的自由度。不过，由于势分量所满足的方程式（1.250）在加入 Lorentz 条件（1.248）之后与Maxwell 方程等效，因而满足（1.250）式的 $A_\mu(x)$ 描写真实的电磁运动。在自由电磁场的量子理论里将证明（见第七章），Lorentz 条件的作用是使纵光子和时间光子对场物理量不作贡献，从而使理论描写与实验事实一致。

**Coulomb规范**　引入辅助条件

---

〔注1〕参见J.D.杰克逊，《经典电动力学》，中译本上册§6.4，人民教育出版社，1978年。

$$\left.\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{A}(x)=0,\\ A_0(x)=0.\end{aligned}\right\}\tag{1.251}$$

相应地，规范变换（1.247）化为如下的三维形式：

$$\mathbf{A}'(x)=\mathbf{A}(x)+\nabla\alpha(x).\tag{1.252}$$

这时，应取满足

$$\nabla^2\alpha(x)=0\tag{1.253}$$

的规范函数．由于这样的规范函数不唯一，因而规范自由度仍不唯一．但从条件(1.251)不难验证，在Coulomb规范下，电磁场的纵向分量和时间分量均为零[注1]．换言之，多余自由度已全部消去，电磁场是一个横场．这与实验事实是一致的．

把辅助条件（1.251）代入（1.246）$b$便得到Coulomb规范下的场方程为：

$$\Box\mathbf{A}^t(x)=0.\tag{1.254}$$

这里，我们把横向矢势记为$\mathbf{A}^t$．(1.254）式与（1.251）式一起，与Maxwell方程等效．采用Coulomb规范的好处是能够消除非物理的自由度，但在Coulomb规范下，理论不具有Lorentz协变性．

### （三）平面波解

场方程（1.250）和（1.254）都是线性齐次方程式．它们的任意解可表示为一系列单色平面波解的线性组合．

**Coulomb规范下的平面波解**　场方程（1.254）的一组完全、正交的平面波解为：

$$\mathbf{A}^{(+)}_{k\lambda}(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}}\boldsymbol{\varepsilon}_{k\lambda}e^{ik\cdot x},\tag{1.255a}$$

$$\lambda=1,2$$

$$\mathbf{A}^{(-)}_{k\lambda}(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}}\boldsymbol{\varepsilon}_{k\lambda}e^{-ik\cdot x}.\tag{1.255b}$$

其中，$\mathbf{A}^{(+)}_{k\lambda}(x)$和$\mathbf{A}^{(-)}_{k\lambda}(x)$分别是正、负频率的平面波解，$\frac{1}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}}$是归一化常数，$\boldsymbol{\varepsilon}_{k\lambda}$是$\mathbf{A}^{(\pm)}_{k\lambda}(x)$方向之单位向量，称为光子的极化矢量．$\lambda=1,2$对应于光子的两种横向极化态（或平面电磁波的两种横向偏振态）．由于两种横向极化态相互独立，故$\boldsymbol{\varepsilon}_{k\lambda}$满足以下正交归一条件：

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{k\lambda}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{k\lambda'}=\delta_{\lambda\lambda'}\tag{1.256}$$

又由于$\mathbf{A}^t$的横向性，故有以下横向条件：

---

〔注1〕参见张宗燧，《电动力学及狭义相对论》，§9，科学出版社，1965年。

$$\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}\lambda}=0\,. \tag{1.257}$$

把（1.255）代入（1.254），不难得到光子的质量壳关系[注1]

$$k^2=0\,. \tag{1.258}$$

因为$\hbar=c=1$，故单个光子的能量为

$$E_k=\omega_k=|\mathbf{k}|. \tag{1.259}$$

现在，可把方程（1.254）的任意解表示为如下的线性组合：

$$\mathbf{A}^t(x)=\sum_{\mathbf{k},\lambda=1}^{2}\left(a_{\mathbf{k}\lambda}\mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}^{(+)}(x)+a_{\mathbf{k}\lambda}^{*}\mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}^{(-)}(x)\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}}\sum_{\lambda=1}^{2}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}\lambda}\left(a_{\mathbf{k}\lambda}e^{ik\cdot x}+a_{\mathbf{k}\lambda}^{*}e^{-ik\cdot x}\right). \tag{1.260}$$

其中，$a_{\mathbf{k}\lambda}$和$a_{\mathbf{k}\lambda}^{*}$是展开系数。因$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}\lambda}$可以作为纵横坐标系第一二轴的基矢，故上式即是在纵横坐标系里写出来的。如果把每个波矢量为$\mathbf{k}$的平面波$\mathbf{A}_{\mathbf{k}}^{t}(x)$各自分解到动量空间的某一任意选定的坐标系里去，则有：

$$\mathbf{A}^t(x)=\sum_{\mathbf{k}}\sum_{\sigma=1}^{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}\sigma}A_{\mathbf{k}\sigma}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}}\sum_{\sigma=1}^{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}\sigma}\left(a_{\mathbf{k}\sigma}e^{ik\cdot x}+a_{\mathbf{k}\sigma}^{*}e^{-ik\cdot x}\right). \tag{1.261}$$

其中，$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}\sigma}\,(\sigma=1,2,3)$是动量空间的任意选定的坐标系的一组基矢。常常需要把（1.260）式在三维坐标空间的任意坐标系里写成分量的形式：

$$A_j^t(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}}\sum_{\lambda=1}^{2}\varepsilon_{\mathbf{k}\lambda}^{j}\left(a_{\mathbf{k}\lambda}e^{ik\cdot x}+a_{\mathbf{k}\lambda}^{*}e^{-ik\cdot x}\right)$$

$$j=1,2,3 \tag{1.262}$$

上式中的$\varepsilon_{\mathbf{k}\lambda}^{j}$是极化矢量$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}\lambda}$在第$j$个坐标轴上的投影。

**Lorentz规范下的平面波解** 在Lorentz规范下，光子有四种独立的极化态，相应的极化矢量分别是纵横坐标系四个轴的基矢量。为了找到四个独立的基矢量，首先在一个

---

〔注1〕所谓质量壳关系，即是粒子质量与其四维动量$k$之间的关系。例如对标量粒子和Dirac粒子，由（1.119）式得到质量壳关系为$k^2=|\mathbf{k}|^2-E_k^2=-m^2$。因此可作如下理解：各类基本粒子的质量各自对应于四维动量空间的某一球面，而光子和中微子质量为零，它们均与坐标原点对应。

特定的参考系里（即在我们选定Coulomb规范的参考系里）把$\varepsilon_{k\lambda}(\lambda=1, 2)$进行如下扩充：

$$e_{k1}=(\varepsilon_{k1}, \ 0), \tag{1.263a}$$

$$e_{k2}=(\varepsilon_{k2}, \ 0). \tag{1.263b}$$

其次，再把第三个空间轴的基矢$\varepsilon_{k3}=\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$扩充为

$$e_{k3}=(\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}, \ 0). \tag{1.263c}$$

在特定参考系里，以上三式定义的四维矢量$e_{k1}$、$e_{k2}$、$e_{k3}$便是纵横坐标系三个空间轴的基矢量，它们都是纯空间性矢量．为了定义纵横坐标系时间轴的基矢量$e_{k4}$，我们引进一个纯时间性矢量$\eta$，使得

$$e_{k4}=i\eta \tag{1.263d}$$

而为了使$e_{k4}$是一个单位矢量，$\eta$必须由下式定义：

$$\eta=(0, 0, 0, i) \tag{1.263e}$$

在任意的Lorentz参考系里，$e_{k1}$、$e_{k2}$和$e_{k3}$都是类空矢量，$\eta$是一个类时矢量．虽然，(1.263) $a$、$b$、$c$、$e$的定义依赖于特定参考系，因而没有Lorentz协变性，但是，$e_{k1}$、$e_{k2}$、$e_{k3}$和$\eta$仍然是一些Lorentz矢量，当参考系转换时，它们按Lorentz群的矢量表示进行变换．基矢量$e_{k4}$随参考系的变化，由$\eta$的变化决定．为了以后的需要，我们来找出$e_{k3}$在任意参考系里的形式，由（1.263）式容易看出，在特定参考系里有

$$k=(0, 0, |\mathbf{k}|, i|\mathbf{k}|),$$

$$|\mathbf{k}|=-k\cdot\eta,$$

因此，

$$e_{k3}=-\frac{k+\eta(k\cdot\eta)}{-k\cdot\eta} \tag{1.263f}$$

由于$k\cdot\eta$是一个Lorentz标量，所以上式右边具有Lorentz协变性，上式也即是$e_{k3}$在任意参考系里的表示式．

至此，我们已找到四类光子的极化矢量．其中，$e_{k1}$、$e_{k2}$是两类横光子的极化矢量，$e_{k3}$是纵光子的极化矢量，$e_{k4}$是时间光子的极化矢量，由（1.263）$a$、$b$、$c$、$d$式可知，四个极化矢量满足以下正交归一条件：

$$e_{k\lambda}\cdot e_{k\lambda'}=\delta_{\lambda\lambda'}, \quad \lambda、\lambda'=1, 2, 3, 4 \tag{1.264}$$

根据上述讨论，条件（1.264）具有Lorentz不变性。

有了极化矢量，就可以写出场方程（1.250）的一组完全、正交的平面波解如下：

$$A_{k\lambda}^{(+)}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2|k|}} e_{k\lambda} e^{ik\cdot x} \tag{1.265a}$$

$$A_{k\lambda}^{(-)}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2|k|}} e_{k\lambda} e^{-ik\cdot x} \tag{1.265b}$$

$$\lambda = 1, 3, 3, 4$$

场方程的任意解$A(x)=[A_1(x)、A_2(x)、A_3(x)、A_4(x)]$可以表示为如下的线性组合：

$$A(x) = \sum_{k,\lambda=1}^{4} \left( a_{k\lambda} A_{k\lambda}^{(+)}(x) + \bar{a}_{k\lambda} A_{k\lambda}^{(-)}(x) \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{k} \frac{1}{\sqrt{2|k|}} \sum_{\lambda=1}^{4} e_{k\lambda} (a_{k\lambda} e^{ik\cdot x} + \bar{a}_{k\lambda} e^{-ik\cdot x}).$$

在四维时空选取任意的坐标系，就可把上式写成势分量的形式：

$$A_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{k} \frac{1}{\sqrt{2|k|}} \sum_{\lambda=1}^{4} e_{k\lambda}^{\mu} (a_{k\lambda} e^{ik\cdot x} + \bar{a}_{k\lambda} e^{-ik\cdot x}) \tag{1.266}$$

其中，

$$\bar{a}_{k\lambda} = \begin{cases} a_{k\lambda}^{*}, & \text{当 } \lambda = 1, 2, 3 \\ -a_{k\lambda}^{*}, & \text{当 } \lambda = 4 \end{cases} \tag{1.267}$$

这样定义展开系数，是为了使$\mathbf{A}(x)$为实函数，$A_4(x)$为纯虚函数，以保证理论的Lorentz协变性。

## （四）光子的极化、自旋求和公式

光子自旋为1，按照量子力学（取Coulomb规范），它应有三种独立的极化态。但由于电磁波的横向性，光子事实上只有两种独立的横向极化态。为了物理的直观性，我们采用Coulomb规范。

**自旋算符和螺旋度算符** 为了找到光子的自旋算符，首先来看当三维空间经受无穷小转动$R_a$时，一个坐标矢量将如何变化（这里，$R_a$是主动转动的转动算符）。设$\delta\boldsymbol{\theta}$是一个无穷小转动向量，它的定义是

$$\delta\boldsymbol{\theta} = \delta\theta\mathbf{n}$$

其中$\mathbf{n}$是转轴方向的单位矢量，$\delta\theta$是无穷小转角。坐标矢量$\mathbf{x}$在转动后成为$R_a\mathbf{x}$（图1—5）：

$$\mathbf{x} \to \mathbf{x}' = R_a \mathbf{x},$$

或者

$$\mathbf{x}' = R_a \mathbf{x} = \mathbf{x} + \delta\mathbf{x} = \mathbf{x} + \delta\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{x}. \quad (1.268)$$

这里使用了明显的等式

$$\delta\mathbf{x} = \delta\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{x}$$

读者只要考察二维平面绕空间第三轴的转动，就可以确信这一等式的正确性。

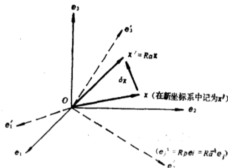



图1—5　当坐标系（0, $e_1$, $e_2$, $e_3$）固定，而空间经受主动转动$R_a$时，x点转动到$\mathbf{x}'=R_a\mathbf{x}$点；在被动转动情形下，空间不动，坐标系（0, $e_1$, $e_2$, $e_3$）经受转动$R_p = R_a^{-1}$而变换到新坐标系（0, $e_1'$, $e_2'$, $e_3'$）。x点在新坐标系中的坐标与$\mathbf{x}'$点在旧坐标系中的坐标一一对应相等。

其次来看电磁场矢势$\mathbf{A}^t(x)$。显然，空间转动不但转动了矢量$\mathbf{A}^t$，也同时转动了空间点。因此，在主动转动下，$\mathbf{A}^t(x)$按下式变换：

$$\mathbf{A}^t(\mathbf{x}, t) \to \mathbf{A}'^t(R_a\mathbf{x}, t) = R_a \mathbf{A}^t(\mathbf{x}, t),$$

或者

$$\mathbf{A}'^t(\mathbf{x}', t) = R_a \mathbf{A}^t(\mathbf{x}, t) \quad (1.269)$$

根据（1.268）式可得

$$\mathbf{A}'^t(\mathbf{x}', t) = R_a \mathbf{A}^t(\mathbf{x}, t)$$

$$= \mathbf{A}^t(\mathbf{x}, t) + \delta\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{A}^t(\mathbf{x}, t). \quad (1.270)a$$

如本小节开始所述，我们上面讨论矢势$\mathbf{A}^t(\mathbf{x}, t)$的转动变换性质是从线性变换的主动观点出发，即坐标系固定而电磁场和空间点一同经受转动；另方面，我们也可以从线性变换的被动观点出发，即电磁场和空间不动，而坐标系转动。主动变换与被动变换是相互等效的[注1]。事实上，从主动观点出发我们有：

$$\mathbf{A}'^t(\mathbf{x}', t) = R_a \mathbf{A}^t(\mathbf{x}, t) = R_a \sum_{j=1}^{3} \mathbf{A}_j^t(\mathbf{x}, t)\mathbf{e}_j$$

$$= \sum_{j=1}^{3} [R_a A_j^t(\mathbf{x}, t)]\mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^{3} A'^t_j(R_a\mathbf{x}, t)\mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^{3} A'^t_j(\mathbf{x}', t)\mathbf{e}_j;$$

设$R_p$是绕同一轴n转动同一角度$\delta\theta$的被动转动的转动算符（显然$R_p = R_a^{-1}$），则从被动观点出发又有：

---

〔注1〕 参见ROBERT GILMORE, 《Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications》, p.66, Wiley, 1974; 或参见JEAN-MARIE NORMAND, 《A Lie Group: Rotations In Quantum Mechanics》, pp. 16—17, NORTH-HOLLAND PUBLISHING, COMPANY, 1980.

$$\overset{\boxed{\text{在旧坐标系里}}}{\mathbf{A}^t(\mathbf{x},\ t)=\sum_{j=1}^{3}A_j^t(\mathbf{x},t)\mathbf{e}_j}=R_p^{-1}R_p\mathbf{A}^t(\mathbf{x},t)$$

$$=\sum_{j=1}^{3}[R_p^{-1}A_j^t(\mathbf{x},t)](R_p\mathbf{e}_j)=\sum_{j=1}^{3}[R_aA_j^t(\mathbf{x},t)](R_a^{-1}\mathbf{e}_j)$$

$$\overset{\boxed{\text{在新坐标系里}}}{=\sum_{j=1}^{3}A_j'^t(\mathbf{x}',t)\mathbf{e}_j'=\mathbf{A}'^t(\mathbf{x}',t)}.$$

以上二式中的$\mathbf{A}'^t(\mathbf{x}',t)$是不相等的矢量．但将二式比较可知：在主动变换下，$R_a\mathbf{A}^t(\mathbf{x},t)$在旧坐标系中的分量与在被动变换下，$\mathbf{A}^t(\mathbf{x},t)$在新坐标系中的分量一一对应相等，这便是主动变换与被动变换的等效性．

如本章§1和§3所述，在主动变换的情形下，我们感兴趣的是在固定坐标系中同一点波函数的变化，即波函数的泛函变化〔例如见(1.53)$a$式〕．在第五章里将看到：在正Lorentz变换下，波函数的主动变换的生成元是总角动量张量算符，若仅考虑三维空间的正转动，则波函数的主动变换的生成元便是量子力学里的总角动量算符．在被动变换的情形下，我们需要考察在四维时空同一点波函数的变化〔例如见(1.39)式〕，而波函数的被动变换的生成元是自旋角动量张量算符〔注1〕．倘若只考虑三维空间正转动，则波函数的被动变换的生成元便是自旋角动量算符．我们这里以旋量波函数为例来证明这一点．为了方便，用(1.47)$a$式的$\Lambda(\omega)$去代替(1.39)式里的$\Lambda(a)$．当只考虑三维空间正转动时，(1.39)式成为下式：

$$\psi'(x')=\psi(x)+\frac{i}{4}\omega_{jl}S_{jl}\psi(x),$$

上式右边的重复指标$j$、$l$表示从1到3求和．将(1.121)代入上式得

$$\psi'(x')=\psi(x)+\frac{i}{2}\omega_{jl}\mathscr{S}_{jl}\psi(x),$$

令$\omega_{jl}=-\delta\theta_k$($jlk$取123的偶排列)，并按(1.122)式把$\mathscr{S}_{jl}$代换成自旋分量算符$\hat{s}_k$，考虑到对两个重复指$j$、$l$的求和其结果等于对一个重复指标$k$求和的二倍，就有

$$\psi'(x')=\psi(x)-i\delta\theta_k\hat{s}_k\psi(x)=\psi(x)-i\delta\boldsymbol{\theta}\cdot\hat{\mathbf{s}}\psi(x),$$

由此可见，在三维空间正转动下，旋量波函数的被动变换的生成元的确是旋量粒子的自旋角动量算符$\hat{\mathbf{s}}$．类比于上式可写出矢势$\mathbf{A}^t(\mathbf{x},t)$的被动变换如下：

〔注1〕在主动变换与被动变换下群表示生成元不同，是由于在主动变换下我们比较$\psi'(x)$与$\psi(x)$，而在被动变换下则比较$\psi'(x')$与$\psi(x)$。参阅Michael D. Scadron,《Advanced Quantum Theoy》, pp. 19—20, Springer-Verlag, 1979; P.罗曼,《基本粒子理论》, pp. 90—94, 上海科学技术出版社, 1966。

$$A'^{t}(x', t)=A^{t}(x,t)-i\delta\theta\cdot\hat{s}A^{t}(x,t). \qquad (1.270)b$$

式中$\hat{s}$是光子的自旋角动量算符．根据主动变换与被动变换的等效性，可由(1.270)$a$和(1.270) $b$式得到

$$[(\delta\theta\cdot\hat{s})A^{t}(x,t)]_j=[i\delta\theta\times A^{t}(x,t)]_j,\ (j=1,2,3) \qquad (1.271)$$

利用（1.261）式即可由上式导出如下的方程式：

$$[(\delta\theta\cdot\hat{s})\varepsilon_{k\sigma}]^j=[i\delta\theta\times\varepsilon_{k\sigma}]^j \qquad (1.272)$$

或者

$$\delta\theta_i\hat{s}_i\ \varepsilon^j_{k\sigma}=i\delta\theta_l\varepsilon^k_{k\sigma}-i\delta\theta_k\varepsilon^l_{k\sigma} \qquad (1.273)$$

上式左边重复的下指标 $i$ 表示自 1 到 3 求和；$jlk$取123的偶排列．因为$\delta\theta_1$、$\delta\theta_2$、$\delta\theta_3$相互独立，故（1.273）式又可写为以下三式：

$$\hat{s}_j\ \varepsilon^j_{k\sigma}=0, \qquad (1.274)a$$

$$\hat{s}_k\,\varepsilon^j_{k\sigma}=-i\varepsilon_{kjl}\varepsilon^l_{k\sigma}, \qquad (1.274)b$$

$$\hat{s}_l\,\varepsilon^j_{k\sigma}=-i\varepsilon_{ljk}\varepsilon^k_{k\sigma}, \qquad (1.274)c$$

上式右边的重复指标表示求和；$j=1,\ 2,\ 3$．

从量子力学观点看来，光子的自旋属于内部自由度，而在平面波解（1.255)式里，除了时空相因子以外便是极化矢量$\varepsilon_{k\lambda}$，因而与Dirac 粒子的情况进行对比，可把极化矢量$\varepsilon_{k\lambda}$（$\lambda=1,\ 2$）作为光子的自旋波函数．由于电磁波的横向性，故纵横坐标系第三轴的基矢$\varepsilon_{k3}$不是光子的极化矢量，不能作为光子的自旋波函数（当讨论光子的极化态时，我们采用纵横坐标系，因而在（1.261）式里与$\varepsilon_{k3}$相应的项事实上不存在)．但是，如果我们暂时忘却电磁波的横向性，则可暂时假定$\varepsilon_{k3}$也是光子的极化矢量，而且也是光子的自旋波函数．这样，$\varepsilon_{k\sigma}(\sigma=1,2,3)$就构成$\hat{s}^2$和$\hat{s}_3$的一组“完全”、正交、归一的共同本征函数：

$$\varepsilon_{k\sigma}\cdot\varepsilon_{k\sigma'}=\delta_{\sigma\sigma'},\ \sigma,\sigma'=1,2,3 \qquad (1.275)$$

$\varepsilon_{k\sigma}$作为三维矢量，可以表示为如下的列矩阵：

$$\varepsilon_{k\sigma}=\begin{pmatrix}\varepsilon^1_{k\sigma}\\ \varepsilon^2_{k\sigma}\\ \varepsilon^3_{k\sigma}\end{pmatrix},\qquad \sigma=1,2,3$$

相应地，自旋分量算符$\hat{s}_j$（$j=1, 2, 3$）应为$3\times3$矩阵：

$$\hat{s}_j=\begin{pmatrix} s_j^{11} & s_j^{12} & s_j^{13} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ s_j^{31} & s_j^{32} & s_j^{33} \end{pmatrix}.$$

按照（1.274）式，当$j=1$时，有

$$\hat{s}_1\boldsymbol{\varepsilon}_{k\sigma}=\hat{s}_1\begin{pmatrix}\varepsilon_{k\sigma}^1\\ \varepsilon_{k\sigma}^2\\ \varepsilon_{k\sigma}^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -i\varepsilon_{k\sigma}^3\\ i\varepsilon_{k\sigma}^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s_1^{11}\varepsilon_{k\sigma}^1+s_1^{12}\varepsilon_{k\sigma}^2+s_1^{13}\varepsilon_{k\sigma}^3\\ s_1^{21}\varepsilon_{k\sigma}^1+s_1^{22}\varepsilon_{k\sigma}^2+s_1^{23}\varepsilon_{k\sigma}^3\\ s_1^{31}\varepsilon_{k\sigma}^1+s_1^{32}\varepsilon_{k\sigma}^2+s_1^{33}\varepsilon_{k\sigma}^3\end{pmatrix},$$

由此式便确定了算符$\hat{s}_1$的矩阵元：

$$s_1^{23}=-i,\quad s_1^{32}=i,$$

其余矩阵元皆为零。因此，我们得到光子的自旋分量算符$\hat{s}_1$为

$$\hat{s}_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},\tag{1.276a}$$

当$j=2, 3$时，利用（1.274）式并重复上述之推算可得：

$$\hat{s}_2=\begin{pmatrix}0&0&i\\0&0&0\\-i&0&0\end{pmatrix},\tag{1.276b}$$

$$\hat{s}_3=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\tag{1.276c}$$

以上三式平方相加又得：

$$\hat{s}^2=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\tag{1.276d}$$

算符$\hat{s}^2$的矩阵形式表明光子自旋为1．不难看出，在纵横坐标系里，自旋第三分量算符$\hat{s}_3$与螺旋度算符$h$一致：

$$\hat{s}_3 = \hat{s}\cdot\varepsilon_{k3} = \hat{s}\cdot\frac{k}{|k|} = h . \tag{1.277}$$

因为光子静止质量为零，所以和中微子的情形一样，采用 $h$ 的本征值来描写自旋态具有 Lorentz 不变性。我们强调指出：由于光子静止质量为零，因而光子的自旋角动量和轨道角动量都存在于同一个Minkowski空间内，不存在另外的"自旋空间"。因此，把光子的自旋角动量从总角动量里分出来单独讨论，只是为了方便，并无实际的物理意义。事实上，在处理原子发光问题时，常常只谈光子的总角动量。

**光子的极化态**：在纵横坐标系里，$\varepsilon_{k3}$具有如下的矩阵表示：

$$\varepsilon_{k3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.278a}$$

因此，

$$h\varepsilon_{k3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

即$\varepsilon_{k3}$描写 $h=0$ 的极化态。由此可知$\varepsilon_{k\lambda}$（$\lambda=1,2$）应分别是 $h=\pm 1$ 的极化态。利用本征值方程$h\varepsilon_{k1}=\varepsilon_{k1}$，$h\varepsilon_{k2}=-\varepsilon_{k2}$以及正交归一条件（1.275），不难得到：

$$\varepsilon_{k1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon_{k2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.278b}$$

由于横向条件（1.257），因而 $h=0$ 的态（纵向极化态）自动被排除掉，光子只具有两种独立的横向极化态。相应的自旋波函数(也即是极化矢量)分别是$\varepsilon_{k1}$和$\varepsilon_{k2}$。(1.278)$b$ 式给出的是在与 k 垂直的平面内的两种园极化态。$\varepsilon_{k1}$描写右旋园极化态，$\varepsilon_{k2}$ 描写左旋园极化态。我们看到，横光子自旋角动量的平均取向（参阅附录一）分别与动量平行或反平行。光子极化矢量的定义与旋量粒子极化矢量的定义是很不相同的。

**自旋求和公式**　首先来看 Coulomb 规范下的自旋求和公式。从（1.275）式不难得到以下的封闭性关系式：

$$\sum_{\sigma=1}^{3} \varepsilon_{k\sigma}\varepsilon_{k\sigma} = I_3 . \tag{1.279}$$

当$\varepsilon_{k\sigma}$采用（1.278）式的矩阵表示时，上式成为

$$\sum_{\sigma=1}^{3} \boldsymbol{\varepsilon}_{k\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}_{k\sigma}^{+} = I_3, \tag{1.280a}$$

或者

$$\sum_{\sigma=1}^{3} \varepsilon_{k\sigma}^{j} \varepsilon_{k\sigma}^{l*} = \delta^{jl}. \quad j, l = 1, 2, 3 \tag{1.280b}$$

在（1.280）$a$ 式 两 边减去$\boldsymbol{\varepsilon}_{k3}$的贡献，便得到光子的自旋求和公式

$$\sum_{\lambda=1}^{2} \boldsymbol{\varepsilon}_{k\lambda} \boldsymbol{\varepsilon}_{k\lambda}^{+} = I_3 - \boldsymbol{\varepsilon}_{k3} \boldsymbol{\varepsilon}_{k3}^{+}. \tag{1.281}$$

在一般情形下，我们仍用（1.279）式．这时，自旋求和公式为：

$$\sum_{\lambda=1}^{2} \boldsymbol{\varepsilon}_{k\lambda} \boldsymbol{\varepsilon}_{k\lambda} = I_3 - \boldsymbol{\varepsilon}_{k3} \boldsymbol{\varepsilon}_{k3} \tag{1.282a}$$

或者在三维空间的任意坐标系里写成分量形式：

$$\sum_{\lambda=1}^{2} \varepsilon_{k\lambda}^{j} \varepsilon_{k\lambda}^{l} = \delta^{jl} - \frac{k^j k^l}{|\mathbf{k}|^2}, \tag{1.282b}$$

这里，把$\boldsymbol{\varepsilon}_{k3}$的分量记为：$\frac{k_1}{|\mathbf{k}|}$、$\frac{k_2}{|\mathbf{k}|}$、$\frac{k_3}{|\mathbf{k}|}$．

下面再来看Lorentz规范下的自旋求和公式．由正交关系（1.264）可得如下封闭性关系式：

$$\sum_{\lambda=1}^{4} e_{k\lambda} e_{k\lambda} = I_4. \tag{1.283}$$

由于光子自旋波函数只与$e_{k1}$、$e_{k2}$有关，故有以下自旋求和公式：

$$\sum_{\lambda=1}^{2} e_{k\lambda} e_{k\lambda} = I_4 - e_{k3} e_{k3} - e_{k4} e_{k4}, \tag{1.284a}$$

注意到在任意参考系里，$e_{k4} = i\eta = i\ (\eta^1, \cdots\cdots, \eta^4)$, $e_{k3} = -\frac{k + \eta(k\cdot\eta)}{k\cdot\eta}$

$= \left(-\frac{k^1 + \eta^1(k\cdot\eta)}{k\cdot\eta}, \cdots\cdots, -\frac{k^4 + \eta^4(k\cdot\eta)}{k\cdot\eta}\right)$，就可将上式写为分量形式：

$$\sum_{\lambda=1}^{2} e_{k\lambda}^{\alpha} e_{k\lambda}^{\beta} = \delta^{\alpha\beta} - \frac{k^\alpha k^\beta}{(k\cdot\eta)^2} - \frac{\eta^\alpha k^\beta + k^\alpha \eta^\beta}{k\cdot\eta} \tag{1.284b}$$

一般认为（参见任何一本量子场论的教科书或专著），极化矢量$e_{k\lambda}$（$\lambda = 1, 2, 3, 4$）均

不是Lorentz矢量，因为它们的定义依赖于特定的参考系．基于这种原因，(1.284)$a$式也没有Lorentz协变性．但是，我们在（1.263）$a$－$d$式后面已述及：虽然这些极化矢量的定义(1.263)不具有协变性（而且$e_{k4}$的确不是一个Lorentz矢量，因为它的第4分量为实数），但$e_{k1}$、$e_{k2}$、$e_{k3}$和η仍然是Lorentz矢量．这就使得正交归一条件（1.264）具有Lorentz不变性。（1.284）$a$式是经过完全协变的推算，由（1.264）式得来的，因此，后者的协变性导致前者也具有协变性．事实上，在微扰计算里（见第十章），常常需要对光子极化求和，在那里，人们并不追问参考系而直接使用（1.284）$a$式，这样做之所以可行，正是基于（1.284）$a$式之协变性．如上所述，我们这里提出的看法是基于如下事实的：$e_{k1}$、$e_{k2}$、$e_{k3}$和η在特定参考系里的定义不具有协变性，这并（不）因此改变了它们的矢量性质。但应注意，（1.284）$b$式并没有形式的协变性。

## 习　　题

（1）K－G方程的解是一个Lorentz标量函数，而Dirac方程的解则是一个双旋量函数，试从Lorentz协变性的要求出发，从两个方程的结构里找出产生上述差异的原因．

（2）通过适当的推算证明K－G方程的负能困难必定伴随着负几率困难．

（3）在建立相对论波动方程时，量子力学的哪些原理、概念是不能违背的？在哪些方面曾进行了修改、发展？

（4）证明（1.49）式，并由此推出下式：

$$[\gamma_\mu, iS_{\alpha\beta}]=[\gamma_\mu, \frac{1}{2}[\gamma_\alpha,\gamma_\beta]].$$

（5）推导（1.74）式。

（6）证明（1.152）$b$式定义的标量算符是厄米算符。

（7）证明

$$\bar{u}_{ks}\frac{\omega(k)}{m}u_{ks}=\pm e,$$

$$\bar{v}_{ks}\frac{\omega(k)}{m}v_{ks}=\pm e.$$

并说明结果的物理意义。〔其中，$e$是（1.161）式定义的四维极化矢量〕.

（8）证明在$m\neq 0$的Dirac理论里，$\gamma_4$在态$u_{ks}$之下的期望值为

$$\langle\gamma_4\rangle=\sqrt{1-v^2},$$

而$\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$在态$u_{ks}$之下的期望值为

$$\langle\boldsymbol{\alpha}\rangle=\mathbf{v},$$

其中，$\mathbf{v}$是粒子速度本征值。

（9）$u_{ks}$、$v_{ks}$（$s=1,2$）可作为双旋量空间的一组基矢，通常，从基矢的正交关系出发即可推出封闭性关系式。但是，若仅从正交关系

$$\bar{u}_{ks}u_{ks'}=\delta_{ss'},\quad \bar{v}_{ks}v_{ks'}=-\delta_{ss'}$$

出发，并不能导致封闭性关系（1.202），这是为什么？

（10）通过一个正Lorentz变换从（1.111）式定义的 $B_\alpha$ 求出（1.142）式定义的$u_{ks}$和$v_{ks}$。

（11）证明（1.225）式.

（12）分别找出左手态$\psi_L$ 和右手态$\psi_R$ 的投影算符$P_R$ 和$P_L$，使得

$$P_LP_L=P_L,\qquad P_RP_R=P_R,$$

$$P_LP_R=P_RP_L=0,\ P_L+P_R=1.$$

（13）运用附录二里介绍的方法证明，当在动量空间选用纵横坐标系时，有下式成立：

$$\varepsilon_{k1}^{+}\hat{s}\,\varepsilon_{k1}=\varepsilon_{k3}\ ;$$

并将这一结果与本章§12里关于光子极化矢量的定义进行比较，由此应得出什么结论？〔其中，$\varepsilon_{k1}$、$\varepsilon_{k3}$和$\hat{s}$分别由（1.278）$b$、（1.278）$a$和（1.276）式定义〕.

（14）推出以下各量在正Lorentz变换和空间反演变下的变换法则，并指明它们是什么类型的Lorentz协变量：

$$\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A_\mu(x),$$

$$\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)\phi(x),$$

$$\bar{\psi}(x)S_{\mu\nu}\psi(x).$$

其中$A_\mu(x)$是极矢量的分量，$\phi(x)$是赝标量，$\psi(x)$是双旋量。$S_{\mu\nu}$由（1.50）式定义.

（15）从本章§12，第（四）小节里讨论的被动变换出发证明：在被动变换下，矢量$\mathbf{A}^t(\mathbf{x},t)$ 的分量的变换矩阵与基矢量$\mathbf{e}^j$（$j=1,2,3$）的变换距阵互为逆步矩阵。并进一步利用正交变换的特性说明，上述两个变换矩阵在事实上相等.

# 第二章　量子场论的物理思想

如上一章所述，K—G方程和Dirac方程均存在负能困难，前者还存在负几率困难。因此，严格地说，这些方程式都不能作为量子力学的波动方程式。退一步说，在相对论量子力学的范围内，即使不存在负能困难和负几率困难，也仍然无法描写粒子相互作用和转化的现象。这是因为在一切相互作用过程里，粒子数目至少为2，而且参与相互作用的粒子，其数目和种类一般要起变化，而量子力学方程式则是单粒子方程式，更谈不上允许粒子的数目和种类有变化。基于上述原因，人们必须建立新的量子理论。在新的理论里，赋以波函数以新的含义，而不再把它看成是单粒子的几率幅。这种新的理论必须是一个"多粒子理论"，并允许粒子的数目和种类发生变化，以便能够描写粒子相互作用和转化的现象。所要建立的新理论便是量子场论。

如果从1927年，Dirac把电磁场进行量子化的时候算起，量子场论到今天已有近六十年的发展历史了，它早已不是一个新理论了。但是我们学习量子场论的目的，主要在于学习其中的研究方法，吸取宝贵的经验和教训，以便开创我们后人所面临的新发展，因此，设想我们自己生活在近六十年前，以此来体验一下从量子力学到量子场论的飞跃是很有益处的。为了突出物理内容，本章将不去讲求数学形式的标准性。同时，仍令$\hbar=c=1$，但在必要时将$\hbar$写出并置于圆括号内。

## §1　电磁场的粒子性

爱因斯坦曾于本世纪初提出了光的量子学说。他认为，连续的电磁波同时又是许多不连续的粒子——光子，频率为$\omega$的电磁波即是一些能量为$(\hbar)\omega$的光子。光的量子学说早已得到实验事实的肯定。问题在于应当怎样从理论上来反映电磁波的粒子性？

### （一）经典电磁谐振子

一个量子力学谐振子的能量每次只能改变$(\hbar)\omega$的整数倍。而按照光的量子学说，一个光子的能量也正是$(\hbar)\omega$。这就启示人们，要揭示电磁场的粒子性，首先应将经典电磁场分解为许多不同频率，不同波矢的谐振动。为了物理的直观性，这里不去涉及非物理的自由度，所以采用Coulomb规范来进行讨论，引入归一化体积$V=l^3$，并假定电磁场在$V$的界面上满足同期性边界条件。这时，波矢$\mathbf{k}$的各个分量将取下述的分立值：

$$k_j=\frac{2\pi}{l}n_j \qquad j=1,2,3 \tag{2.1}$$

与此相应，场方程（1.254）的解可表为平面波解的级数和：

$$\mathbf{A}^t(\mathbf{x},t)=\sum_{\mathbf{k}}\left\{\mathbf{c}_{\mathbf{k}}(t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}+\mathbf{c}_{\mathbf{k}}^*(t)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\right\} \tag{2.2}$$

(2.2) 式与 (1.260) 式是一致的〔见后面的 (2.19) 式和 (2.41) 式〕,把 (2.2)代入 (1.254) ,便得到$\mathbf{c}_{\mathbf{k}}(t)$满足的运动方程式:

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{c}_{\mathbf{k}}(t)+\omega_{\mathbf{k}}^2\mathbf{c}_{\mathbf{k}}(t)=0\,. \tag{2.3}$$

它也就是频率为$\omega_k$,波矢为k的谐振动的运动方程式. 我们把每一个这样的谐振动视为一个电磁谐振子 (k、$\omega_k$) . (2.3) 式具有如下的解:

$$\mathbf{c}_{\mathbf{k}}(t)=\mathbf{c}_{\mathbf{k}}e^{-i\omega_k t}. \tag{2.4}$$

为了求出谐振子 (k, $\omega_k$) 的能量,首先来把电磁场的总能量

$$E=\frac{1}{2}\int_V(|\mathbf{E}|^2+|\mathbf{H}|^2)d^3x=\mathrm{H}\quad(\mathrm{H}\text{是Hamilton量}) \tag{2.5}$$

表示为各个谐振子能量之和. 为此,只要把 (2.2)式代入下式:

$$\mathbf{H}=\nabla\times\mathbf{A}^t,$$

$$\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{A}^t}{\partial t},$$

再将所得结果代入 (2.5) 式,并利用积分公式 (1.184) 以及

$$\nabla\times\mathbf{c}_{\mathbf{k}}(t)=0\,,$$

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{c}_{\mathbf{k}}(t)=0\,,$$

$$[\mathbf{k}\times\mathbf{c}_{\mathbf{k}}(t)]\cdot[\mathbf{k}\times\mathbf{c}_{\mathbf{k}}(t)]=|\mathbf{k}|^2|\mathbf{c}_{\mathbf{k}}(t)|^2,$$

就得到:

$$\mathrm{H}=2V\sum_{\mathbf{k}}|\mathbf{k}|^2\mathbf{c}_{\mathbf{k}}^*(t)\mathbf{c}_{\mathbf{k}}(t)=\sum_{\mathbf{k}}\mathrm{H}_{\mathbf{k}}\,. \tag{2.6}$$

其中, $\mathrm{H}_{\mathbf{k}}$便是经典电磁谐振子 (k、$\omega_k$) 的能量或Hamilton量:

$$\mathrm{H}_{\mathbf{k}}=2V|\mathbf{k}|^2\,\mathbf{c}_{\mathbf{k}}^*(t)\,\mathbf{c}_{\mathbf{k}}(t)\,. \tag{2.7}$$

既然我们把一个谐振动(k、$\omega_k$)视为一个电磁谐振子,就可以把它的运动方程(2.3)纳入正则形式。假设它的正则坐标和正则共轭动量分别是$\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}(t)$和$\mathbf{P}_{\mathbf{k}}(t)$, 则其Hamilton量为

$$\mathrm{H}_{\mathbf{k}}=\frac{1}{2}[|\mathbf{P}_{\mathbf{k}}(t)|^2+\omega_k^2|\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}(t)|^2]=E_{\mathbf{k}}\,, \tag{2.8}$$

正则运动方程式为

$$\left.\begin{aligned}\dot{Q}_k(t)&=\partial H_k/\partial P_k(t),\\ \dot{P}_k(t)&=-\partial H_k/\partial Q_k(t).\end{aligned}\right\}\tag{2.9}$$

因为$P_k^*(t)$与$P_k(t)$$Q_k^*(t)$与$Q_k(t)$均不是相互独立的正则变数，故把（2.8）代入(2.9)，并将所得结果再对 $t$ 微分一次可得：

$$\ddot{P}_k(t)=-\omega_k^2P_k(t)\tag{2.10$a$}$$

$$\ddot{Q}_k(t)=-\omega_k^2Q_k(t)\tag{2.10$b$}$$

因此，$P_k(t)$、$Q_k(t)$、与$c_k(t)$满足同样的运动方程式，它们之间必有以下线性关系：

$$c_k(t)=AP_k(t)+BQ_k(t)\tag{2.11}$$

把（2.11）代入（2.7）并令所得式与（2.8）相等，便可确定常数$A$和$B$：

$$A=\frac{i}{2\sqrt{V}|\mathbf{k}|},\qquad B=\frac{|\mathbf{k}|}{2\sqrt{V}|\mathbf{k}|}.$$

于是，

$$c_k(t)=\frac{i}{2\sqrt{V}|\mathbf{k}|}\left(P_k(t)-i|\mathbf{k}|Q_k(t)\right),\tag{2.12$a$}$$

$$c_k^*(t)=\frac{-i}{2\sqrt{V}|\mathbf{k}|}\left(P_k^*(t)+i|\mathbf{k}|Q_k^*(t)\right).\tag{2.12$b$}$$

考虑到(2.10)具有和（2.4）式一样的解，即$P_k(t)=P_ke^{-i\omega_kt}$，$Q_k(t)=Q_ke^{-i\omega_kt}$，又可把（2.12）写为常数振幅之间的线性关系：

$$c_k=\frac{i}{2\sqrt{V}|\mathbf{k}|}(P_k-i|\mathbf{k}|Q_k),\tag{2.13$a$}$$

$$c_k^*=\frac{-i}{2\sqrt{V}|\mathbf{k}|}(P_k+i|\mathbf{k}|Q_k).\tag{2.13$b$}$$

相应地，（2.8）式和（2.9）式分别成为：

$$H_k=\frac{1}{2}(|P_k|^2+\omega_k^2|Q_k|^2)=E_k.\tag{2.14}$$

$$\left.\begin{aligned}|\dot{Q}_k(t)|&=\partial H_k/\partial|P_k(t)|,\\ |\dot{P}_k(t)|&=\partial H_k/\partial|Q_k(t)|\end{aligned}\right\}\tag{2.15}$$

(2.14) 式表明，代替 $P_k(t)$、$Q_k(t)$同样可用 $P_k$、$Q_k$作为谐振子的正则变数。

## (二) 量子电磁谐振子

在上一小节里，我们把经典电磁场的每一个谐振动均视为一个经典电磁谐振子 ($\mathbf{k}$, $\omega_k$)．虽然电磁谐振子与力学谐振子完全不同，电磁场的运动与经典粒子的运动完全不同，但是我们试图把从经典质点力学过渡到量子力学时所使用的量子化方法（一次量子化）推广应用于波动的领域．即与从经典力学谐振子过渡到量子力学谐振子相应，假定从经典电磁谐振子到量子电磁谐振子也要经过形式上相同的量子化步骤，这种推广后的量子化步骤称为二次量子化．我们希望经过二次量子化所得到的量子电磁谐振子能够显示电磁波的粒子性．

现在，类比于一次量子化，我们把经典电磁谐振子的正则坐标 $Q_k$和正则动量$P_k$用相应的厄米算符来表示：

$$Q_k \longrightarrow \widehat{Q}_k = Q_k, \tag{2.16$a$}$$

$$P_k \longrightarrow \widehat{P}_k = -i(\hbar)\nabla_{Q_k} \tag{2.16$b$}$$

并假定量子电磁谐振子（$\mathbf{k},\omega_k$）的状态要用波函数 $\Phi_k(Q_k)$ 来描写。在算符对应关系 (2.16) 和波函数的假设之下，不难得到算符 $\widehat{Q}_k$、$\widehat{P}_k$ 所满足的如下对易关系：

$$[\widehat{Q}_k,\ \widehat{P}_{k'}] = i\hbar\delta_{kk'}, \tag{2.17$a$}$$

$$[\widehat{Q}_k,\ \widehat{Q}_{k'}] = [\widehat{P}_k,\ \widehat{P}_{k'}] = 0\,. \tag{2.17$b$}$$

借用量子力学的已知结果很容易写出量子电磁谐振子的定态Schrödinger方程式：

$$\left(-\frac{(\hbar^2)}{2}\nabla^2_{Q_k} + \frac{1}{2}\omega_k^2|Q_k|^2\right)\Phi_k(Q_k) = E_k\Phi_k(Q_k). \tag{2.18}$$

如第一章所述，横向矢势$\mathbf{A}^t$可以分解到两个独立的偏振方向，此二方向之单位矢量便是极化矢量$\boldsymbol{\varepsilon}_{k1}$、$\boldsymbol{\varepsilon}_{k2}$：

$$\mathbf{A}^t(\mathbf{x},\ t) = \sum_{\mathbf{k}}\sum_{\lambda=1}^{2}\boldsymbol{\varepsilon}_{k\lambda}\left(c_{k\lambda}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega_k t}\right.$$
$$\left. + c^*_{k\lambda}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+i\omega_k t}\right) \tag{2.19}$$

这里，我们把$\mathbf{c}_k$做了如下的分解：

$$\mathbf{c}_k = \sum_{\lambda=1}^{2}\boldsymbol{\varepsilon}_{k\lambda}c_{k\lambda}. \tag{2.20}$$

按照线性关系 (2.13)，对$Q_k$ 和$P_k$ 也可进行同样的分解，因此 (2.18) 式就分解成两个独立的一维谐振子波动方程式：

$$\left(-\frac{(\hbar^2)}{2}\frac{d^2}{dQ_{k\lambda}^2}+\frac{1}{2}\omega_k^2 Q_{k\lambda}^2\right)\Phi_{k\lambda}(Q_{k\lambda})=E_{k\lambda}\Phi_{k\lambda}(Q_{k\lambda}),$$

$$\lambda=1,2 \tag{2.21}$$

相应地，对易关系（2.17）也可写为如下的分量形式：

$$[\widehat{Q}_{k\lambda},\widehat{P}_{k'\lambda'}]=i(\hbar)\delta_{kk'}\delta_{\lambda\lambda'}, \tag{2.22a}$$

$$[\widehat{Q}_{k\lambda},\widehat{Q}_{k'\lambda'}]=[\widehat{P}_{k\lambda},\widehat{P}_{k'\lambda'}]=0. \tag{2.22b}$$

借用量子力学里求解一维谐振子问题的结果，立刻可以写出方程（2.21）的如下本征解：

$$\Phi_{k\lambda}^{(n)}(Q_{k\lambda})=N_n e^{-\frac{\xi^2}{2}}H_n(\xi) \tag{2.23a}$$

$$E_{k\lambda}^{(n)}=(n_{k\lambda}+\frac{1}{2})(\hbar)\omega_k. \tag{2.23b}$$

其中，$n_{k\lambda}$为零或正整数，$N_n$是归一化常数，$H_n(\xi)$是以$\xi=\alpha Q_{k\lambda}=\sqrt{\omega_k}Q_{k\lambda}$为变量的厄米多项式，整个电磁场的总能量是所有一维量子电磁谐振子能量之和：

$$E=\sum_{k\lambda}E_{k\lambda}^{(n)}=\sum_{k,\lambda=1}^{2}(n_{k\lambda}+\frac{1}{2})(\hbar)\omega_k \tag{2.24}$$

此式是对经典电磁场的每一谐振动（k、$\omega_k$）进行二次量子化所得到的结果。它表明，电磁场的能量不是连续变化的，其中，波矢为k、频率为$\omega_k$、偏振为$\lambda$的谐振动，能量每次只能增、减$(\hbar)\omega_k$的整数倍，换言之，电磁波的能量以普朗克能量子$(\hbar)\omega_k$为最小单位。

但是，从量子力学观点看来，(2.24）式仅仅表明了电磁场能量的不连续性，而能量子$(\hbar)\omega_k$也仅仅是量子电磁谐振子的两个相邻能级之间的间隔。这样一来，我们把一次量子化推广应用于电磁场，成为二次量子化，并未因此对电磁场的本质获得新的认识。换言之，要使我们的认识前进一步，唯有跳出量子力学的概念范围。事实上，在高速运动的范围内把一次量子化推广为二次量子化，使之应用于波动的领域，这已经超出了量子力学的理论框架，为了正确地解释经由这种推广所得到的能量子，尚需进一步抛弃量子力学的旧概念。根据光的量子学说，$(\hbar)\omega_k$正是一个光子的能量，因此，我们不再把$(\hbar)\omega_k$看成两个相邻能级之差，而是将它与一个光子等同看待。相应地，(2.24）式中的整数$n_{k\lambda}$也不再只是一个标明能级顺序的数字，它是能量为$(\hbar)\omega_k$、动量为$(\hbar)$k、极化为$\lambda$的光子数目。在这里，我们已经放弃了量子力学对定态Schrödinger方程的解所做的解释，而采取了一种新的解释。

现在，我们对电磁场的认识有了进一步的深化：从宏观上看来作连续波动运动的电磁场，在其微观结构上不但具有波动性，而且还具有粒子性，它是具有波、粒二重性的

客体．我们称它为量子场，量子化电磁场包含许多不同波矢、不同频率、不同偏振的谐振动．其中每一谐振动同时又是许多具有一定能量、动量和一定极化的光子．

## §2 量子场论的基本假设

同量子力学一样，量子场论也是建立在几条基本假设（即基本原理）之上的．在这一节里，我们试图来归纳出这些基本假设．

### （一）非相对论波动方程的量子化

由§1的讨论看到，从量子力学到量子场论，存在着物理思想和概念的飞跃．为了更全面地看出这种飞跃，现在再来看一个另外的例子．在非相对论量子力学里，自由粒子的Schrödinger方程为

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{x},t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{x},t),\quad(m\neq 0)\tag{2.25}$$

此式有以下的解：

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x},t)=Ae^{i/\hbar(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\varepsilon_k t)}\tag{2.26a}$$

$$\varepsilon_k=\hbar\omega_k=\frac{\hbar^2|\mathbf{k}|^2}{2m}\tag{2.26b}$$

其中，$\varepsilon_k$是自由粒子的量子力学能量．

现在，我们把量子力学波函数的几率解释统统放弃，$\psi(\mathbf{x},t)$不再看成是几率幅，它也不再是一个微观粒子的态函数，我们把它看成是和经典电磁波一样的经典波动场的场函数．相应地，(2.25)式也不再是量子力学的波动方程式。我们把它看成是和Maxwell方程一样描写连续波动运动的经典波动方程式．在此基础上，再按上一节的方法对方程(2.25)进行二次量子化．我们希望这样做的结果能够显示$\psi$场具有粒子性．

引入归一化体积$V$，把$\psi(\mathbf{x},t)$展开为如下的级数：〔注1〕

$$\psi(\mathbf{x},t)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}}(t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}},\tag{2.27}$$

把(2.27)代入(2.25)就得到$a_{\mathbf{k}}(t)$满足的运动方程式

$$\ddot{a}_{\mathbf{k}}(t)+\omega_k^2a_{\mathbf{k}}(t)=0\tag{2.28}$$

其中，$\omega_k=\frac{\hbar|\mathbf{k}|^2}{2m}$是波矢为$\mathbf{k}$的经典波动谐振子的角频率．(2.28)式即是谐振子

〔注1〕 在非相对论情形下，展式(2.27)右边不出现负频率项$b_{\mathbf{k}}^*(t)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$

$(\mathbf{k}, \omega_k)$ 的运动方程式，它有如下的解：

$$a_k(t) = a_k e^{-i\omega_k t} \tag{2.29}$$

为了求出经典波动场 $\psi$ 的总能量，需要用到以下的量子力学公式：

$$E = \int_V \psi^* i(\hbar)\frac{\partial}{\partial t}\psi d^3x = -\int_V \psi^* \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi d^3x = \mathrm{H}. \tag{2.30}$$

但是，现在应当把这个公式看成是和（2.5）式一样的经典场能量公式。把（2.27）代入（2.30），并利用积分公式（1.184）$b$，便得到

$$\mathrm{H} = E = \sum_{\mathbf{k}} (\hbar)\omega_k a_k^* a_k = \sum_{\mathbf{k}} \mathrm{H}_k. \tag{2.31a}$$

其中，

$$\mathrm{H}_k = E_k = (\hbar)\omega_k a_k^* a_k \tag{2.31b}$$

是谐振子 $(\mathbf{k}, \omega_k)$ 的能量或Hamilton量。

上面从经典物理学的角度讨论了 $\psi$ 场的运动．现在运用 § 1 所述的二次量子化方法对 $\psi$ 场进行量子化，引入经典波动谐振子 $(\mathbf{k}, \omega_k)$ 的正则坐标$Q_k$和正则动量$P_k$，使其能量可以表示为

$$E_k = \frac{1}{2}(P_k^2 + \omega_k^2 Q_k^2) = \mathrm{H}_k. \tag{2.32}$$

使用类似 § 1 的讨论，可以得到$P_k$、$Q_k$与$a_k$之间的如下线性关系：

$$a_k = \frac{i}{\sqrt{2(\hbar)\omega_k}}(P_k - i\omega_k Q_k), \tag{2.33a}$$

$$a_k^* = \frac{-i}{\sqrt{2(\hbar)\omega_k}}(P_k + i\omega_k Q_k), \tag{2.33b}$$

引进算符对应关系

$$Q_k \longrightarrow \hat{Q}_k = Q_k, \tag{2.34a}$$

$$P_k \longrightarrow \hat{P}_k = -i(\hbar)\frac{d}{dQ_k} \tag{2.34b}$$

并假定量子波动谐振子的波函数为 $\Phi_k(Q_k)$，就可得到$\hat{P}_k$、$\hat{Q}_k$满足的对易关系

$$[\hat{Q}_k, \hat{P}_{k'}] = i(\hbar)\delta_{kk'}, \tag{2.35a}$$

$$[\hat{Q}_k, \hat{Q}_{k'}] = [\hat{P}_k, \hat{P}_{k'}] = 0. \tag{2.35b}$$

因此，量子波动谐振子的定态Schrödinger方程式为

$$\left(-\frac{(\hbar^2)}{2}\frac{d^2}{dQ_k^2} + \frac{1}{2}\omega_k^2 Q_k^2\right)\Phi_k(Q_k) = E_k\Phi_k(Q_k). \tag{2.36}$$

借用量子力学里求解谐振子问题的结果，可直接写出量子波动谐振子的能量为

$$E_k^{(n)}=(n_k+\frac{1}{2})(\hbar)\omega_k \tag{2.37}$$

按照（2.26）$b$式，能量子$(\hbar)\omega_k$正好是一个自由粒子的能量．因此，我们仍然抛弃量子力学的能级解释，而采用新的解释：我们认为，由经典波动方程式(2.25)经过二次量子化所得到的能量子$(\hbar)\omega_k$，便是这个方程式在原来量子力学意义下所描写的自由粒子．因而波动场$\psi$在二次量子化之后显示它本身具有粒子性，它是一个量子场．

### （二）四点基本假设

综上所述，无论是光子的量子力学方程式（Maxwell方程式），还是实物粒子的波动方程式，首先把它视为经典波动场的场方程式，然后再对它进行上述的量子化步骤，就能从理论上反映场的粒子性．因此从量子力学过渡到量子场论，其基本物理思想和概念的飞跃可以归纳如下：第一，抛弃量子力学波函数的几率解释，并把量子力学的波动方程式看成经典波动场的场方程式；第二，对这些经典波动方程式进行类似于从经典质点力学过渡到量子力学时所进行的量子化步骤，这样一种量子化称为二次量子化，它是粒子的一次量子化向波动领域的推广；第三，抛弃量子力学对定态Schrödinger方程的解所做的解释，把经由二次量子化所得到的能量子解释为上述经典波动方程式在原来量子力学意义下所描写的微观粒子．因此，这些能量子就是联属于波动场的粒子．经过二次量子化以后的场是一个既有波动性，又有粒子性的场——量子场．正如量子力学所描写的对象是具有波粒二重性的微观粒子一样，量子场论所描写的对象是量子场．处于相互作用和转化中的所有基本粒子分别都是联属于某种量子场的量子．以上三点可以看成是量子场论的三点基本假设，它使人们的认识从描写微观粒子运动的量子力学理论飞跃到描写自由量子场运动的量子场论．为了在量子场论的理论框架内反映粒子之间的相互作用和相互转化，还需要加入第四点假设：既然微观客体是以量子场的形态存在，那么，实验上观测到的粒子之间的相互作用就应当是相应量子场之间的相互作用．理论上反映为场与场的相互耦合，这第四点基本假设在第八章还要进行详细的讨论．

我们看到，四点基本假设之间是密切联系的．它们就是量子场论的基本出发点或基本原理．尽管量子场论的具体内容相当庞大复杂，只要我们抓住这些出发点去进行学习研究，就能收到较好的效果．

## §3 量子场论里的算符和态函数

我们所要“建立”的“新”理论应能反映粒子数目有变化的情况．本节将从以上两节的讨论出发来反映这种情况。

### （一）算符概念的引入

如上所述，从量子力学到量子场论不仅仅是数学形式的变化，而且存在着物理思想

和概念的变化．但是，两者之间仍有共同之处．其中之一便是：微观物理学体系的力学量要由相应的算符来表示．那么，量子场论的算符概念是从何引入的呢？让我们回顾前两节的讨论．在量子化电磁场的情形下，$\widehat{Q}_{k\lambda}$和$\widehat{P}_{k\lambda}$分别是量子电磁谐振子（k，$\omega_k$，λ）的正则坐标算符和正则动量算符；而在量子化ψ场的情形下，$\widehat{Q}_k$ 和$\widehat{P}_k$ 分别是量子波动谐振子(k，$\omega_k$)的正则坐标算符和正则动量算符．因而按照线性关系（2.13）和(2.33)，$c_{k\lambda}$和$a_k$也是算符，而且$c^+_{k\lambda}$ 与$c_{k\lambda}$ 以及$a^+_k$与$a_k$ 分别是互厄米共轭的算符．特别地，从展式（2.19）和（2.27）易见，$A^t$（x，$t$）和ψ（x，$t$）也是算符．因此，量子力学的波函数ψ在量子场论里是一个场算符．量子场的所有物理量分别都由某个厄米算符来表示．在第五章到第七章我们将给出场物理量算符的具体表示式，而现在，首先来看量子场的能量算符．在推出(2.6)式和(2.31)$a$式时，曾把$c_{k\lambda}$和$a_k$看成是一些普通的数，没有考虑到它们作为算符所应满足的对易关系．故为了找到量子场能量算符的正确表示式，首先来推出$c_{k\lambda}$和$a_k$所满足的对易关系．由关系式（2.13）和（2.33）可直接写出算符之间的如下关系：

$$c_{k\lambda}=\frac{i}{2\sqrt{V}\,|\mathbf{k}|}(\widehat{P}_{k\lambda}-i|\mathbf{k}|\widehat{Q}_{k\lambda}), \tag{2.38a}$$

$$c^+_{k\lambda}=\frac{-i}{2\sqrt{V}\,|\mathbf{k}|}(\widehat{P}_{k\lambda}+i|\mathbf{k}|\,\widehat{Q}_{k\lambda}); \tag{2.38b}$$

$$a_k=\frac{i}{\sqrt{2\omega_k}}(\widehat{P}_k-i\omega_k\widehat{Q}_k), \tag{2.39a}$$

$$a^+_k=\frac{-i}{\sqrt{2\omega_k}}(\widehat{P}_k+i\omega_k\widehat{Q}_k). \tag{2.39b}$$

利用对易关系（2.22）和关系式（2.38）不难证明：

$$[c_{k\lambda},\ c^+_{k'\lambda'}]=\frac{1}{2V\,|\mathbf{k}|}\delta_{kk'}\delta_{\lambda\lambda'}, \tag{2.40a}$$

$$[c_{k\lambda},c_{k'\lambda'}]=[c^+_{k\lambda},c^+_{k'\lambda'}]=0. \tag{2.40b}$$

令

$$a_{k\lambda}=\sqrt{2V\,|\mathbf{k}|}\ c_{k\lambda}, \tag{2.41a}$$

$$a^+_{k\lambda}=\sqrt{2V\,|\mathbf{k}|}\ c^+_{k\lambda}, \tag{2.41b}$$

则算符$a_{k\lambda}$、$a^+_{k\lambda}$ 满足如下对易关系：

$$[a_{k\lambda},\ a^+_{k'\lambda'}]=\delta_{kk'}\delta_{\lambda\lambda'}, \tag{2.42a}$$

$$[a_{k\lambda},\ a_{k'\lambda'}]=[a^+_{k\lambda},\ a^+_{k'\lambda'}]=0. \tag{2.42b}$$

同样，利用对易关系（2.35）和关系式（2.39）可得：

$$[a_k, a_{k'}^+] = \delta_{kk'}, \tag{2.43a}$$

$$[a_k, a_{k'}] = [a_k^+, a_{k'}^+] = 0. \tag{2.43b}$$

将（2.14）与（2.16）相结合，并注意到（2.20）式后面的叙述，容易把电磁场的能量算符用$\hat{P}_{k\lambda}$、$\hat{Q}_{k\lambda}$表为下式：

$$H = \sum_{k\lambda} H_{k\lambda} = \sum_{k\lambda} \frac{1}{2} (\hat{P}_{k\lambda}^2 + \omega_k^2 \hat{Q}_{k\lambda}^2) \tag{2.44}$$

通过（2.38）式，把上式中的$\hat{P}_{k\lambda}$、$\hat{Q}_{k\lambda}$代换成$c_{k\lambda}$、$c_{k\lambda}^+$，并利用对易关系(2.40)，便得到

$$H = \sum_{k\lambda} (2V|\mathbf{k}|\, c_{k\lambda}^+ c_{k\lambda} + \frac{1}{2})\, |\mathbf{k}|. \tag{2.45}$$

再通过(2.41)式把$c_{k\lambda}$换成$a_{k\lambda}$：

$$H = \sum_{k\lambda} (a_{k\lambda}^+ a_{k\lambda} + \frac{1}{2}) \omega_k. \tag{2.46}$$

类似地，对于$\psi$场，我们有

$$H = \sum_{k} (a_k^+ a_k + \frac{1}{2}) \omega_k. \tag{2.47}$$

**（2.46）和（2.47）便是量子场能量算符的动量空间表示式。**

## （二）量子场的态函数

如上所述，在量子场论里，量子力学意义下的态函数$\psi$不再描写量子体系的状态，它失去了几率幅的意义，是一个场算符．那么，应当如何来描写量子场的运动状态呢？以量子化电磁场为例，它的每一谐振自由度$(\mathbf{k}, \omega_k, \lambda)$的状态，用"波函数"$\Phi_{k\lambda}^{(n)}(Q_{k\lambda})$来描写．但由§1已看到，$\Phi_{k\lambda}^{(n)}(Q_{k\lambda})$不再是量子力学意义下的波函数，它是量子力学波函数向波动领域的推广．当量子场的某一谐振自由度$(\mathbf{k}', \omega_{k}', \lambda')$处于用$\Phi_{k'\lambda'}^{(n)}(Q_{k'\lambda'})$来描写的状态时，它具有$n_{k'\lambda'}$个能量为$\omega_{k'}$、动量为$\mathbf{k}'$、极化为$\lambda'$的光子。反之，这$n_{k'\lambda'}$个光子完全确定了该谐振自由度所处的状态．因此，用光子数作为描写电磁场状态的变数更为方便直观．与此相应，将$\Phi_{k\lambda}^{(n)}(Q_{k\lambda})$转到粒子数表象，并用一个右矢$|n_{k\lambda}\rangle$来表示．整个量子化电磁场的态矢量便是所有右矢$|n_{k\lambda}\rangle$的连乘积：

$$|\cdots\cdots n_{k_i\lambda'}, \cdots\cdots, n_{k_j\lambda''}\cdots\cdots\rangle = \prod_{k} \prod_{\lambda=1}^{2} |n_{k\lambda}\rangle. \tag{2.48}$$

当量子化电磁场处于状态$|\cdots\cdots n_{k_i\lambda'}, \cdots\cdots n_{k_j\lambda''}\cdots\cdots\rangle$时，它的能量为

$$E=\sum_{\mathbf{k},\lambda=1}^{2}(n_{\mathbf{k}\lambda}+\frac{1}{2})\omega_k. \tag{2.49}$$

而当所有光子数目$n_{\mathbf{k}\lambda}$均为零时，量子场能量并不为零，而是等于$E_0$：

$$E_0=\sum_{\mathbf{k},\lambda}\frac{1}{2}\omega_k=\sum_{\mathbf{k}}\omega_k. \tag{2.50}$$

这时，量子场处于能量最低的状态，称为量子场的基态或真空态．描写这一状态的态矢量是

$$|0\rangle=\prod_{\mathbf{k}}|0_{k1}\rangle|0_{k2}\rangle. \tag{2.51}$$

在微观上没有光子的情况，就相应于在宏观上没有电磁波的情况．从经典电动力学观点看来，没有电磁波的空间是一无所有的空间．但是，从量子场论观点看来，没有光子的空间仍然存在着量子化电磁场，表面看来是一无所有的空间，其实是量子场的一种起伏运动状态，即真空态．我们看到，真空态能量$E_0$是无限大．这就表明，量子场论仅仅能够暗示真空物质的存在， 离开认识真空的物理本质尚远．由于无穷大的零点能量$E_0$不能用实验方法去直接测量，因而可令$E_0=0$．换言之，我们把量子场真空态看成是能量为零的态．这样一种观点，等效于把真空看成是现实物理世界的零背景，一切可观察的物理过程都是在这个背景上发生的，一切物理测量也都是在这个为零的背景上进行的．值得注意的是，真空这个零背景并不真正为零．真空与非真空的相互作用将导致许多可以观察的物理效应．在现代量子场论的发展前沿，越来越多地牵涉到真空的物理属性，研究真空的物理本质已成为重要的课题．可以预料，人们对真空的认识进一步发展，将会导致基本粒子理论的深刻变革．

### （三）量子场的粒子数算符

我们仍以量子化电磁场为例．（2.49）式确定的$E$便是H的本征值．因而

$$\mathrm{H}\prod_{\mathbf{k}}\prod_{\lambda=1}^{2}|n_{\mathbf{k}\lambda}\rangle=E\prod_{\mathbf{k}}\prod_{\lambda=1}^{2}|n_{\mathbf{k}\lambda}\rangle$$

注意到（2.46）式，不难由上式得到

$$(a_{\mathbf{k}\lambda}^{+}a_{\mathbf{k}\lambda}+\frac{1}{2})\,\omega_k\,|n_{\mathbf{k}\lambda}\rangle=(n_{\mathbf{k}\lambda}+\frac{1}{2})\omega_k|n_{\mathbf{k}\lambda}\rangle,$$

因此，我们得到厄米算符$a_{\mathbf{k}\lambda}^{+}\,a_{\mathbf{k}\lambda}$的本征值方程如下：

$$a_{\mathbf{k}\lambda}^{+}\,a_{\mathbf{k}\lambda}|n_{\mathbf{k}\lambda}\rangle=n_{\mathbf{k}\lambda}|n_{\mathbf{k}\lambda}\rangle \tag{2.52}$$

由于$a_{\mathbf{k}\lambda}^{+}a_{\mathbf{k}\lambda}$的本征值便是具有一定能量、动量和一定极化的光子数目，所以， 它们便是量子化电磁场的粒子数算符，并记为$\mathcal{N}_{\mathbf{k}\lambda}$：

$$\mathscr{N}_{k\lambda}=a_{k\lambda}^{+}a_{k\lambda}.$$

利用对易关系（2.42）不难证明，所有k、λ取不同值的粒子数算符彼此对易：

$$[\mathscr{N}_{k_j\lambda},\mathscr{N}_{k_l\lambda'}]=0. \qquad j\neq l \tag{2.53}$$

因为当不同能量、动量、不同极化的各类光子的数目均一一确定时，量子化电磁场所处的状态就完全确定，故所有粒子数算符$\mathscr{N}_{k\lambda}$构成量子场系统的一组可以对易的力学量算符的完全集合．这组完全集合的共同本征右矢就是（2.48）式定义的一组量子场态矢量．

因为$\mathscr{N}_{k\lambda}$是厄米算符，故必有以下正交关系：

$$\langle n_{k\lambda}|n'_{k\lambda}\rangle=\delta n_{k\lambda}n'_{k\lambda}, \tag{2.54a}$$

$$\langle\cdots\cdots n_{k_l\lambda'},\cdots\cdots n_{k_j\lambda''},\ \cdots\cdots|\cdots\cdots n'_{k_l\lambda'},\cdots\cdots n'_{k_j\lambda''},\cdots\cdots\rangle$$

$$=\cdots\cdots\delta n_{k_l\lambda'}n'_{k_l\lambda'}\cdots\cdots\delta n_{k_j\lambda''}n'_{k_j\lambda''},\ \cdots\cdots, \tag{2.54b}$$

利用这些正交关系不难得到$\mathscr{N}_{k\lambda}$在以其自身的本征右矢为基的表象中的矩阵元为：

$$\langle n_{k_l\lambda'}|\mathscr{N}_{k_l\lambda'}|n'_{k_l\lambda'}\rangle=n_{k_l\lambda'}\delta n_{k_l\lambda'}n'_{k_l\lambda'}. \tag{2.55}$$

因而在此表象里，$\mathscr{N}_{k\lambda}$有以下矩阵表示：

$$\mathscr{N}_{k\lambda}=\begin{pmatrix}0 & & & 0\\ & 1 & & \\ & & 2 & \\ 0 & & & \ddots\end{pmatrix}. \tag{2.56}$$

类似地，在以共同本征右矢（2.48）为基的表象里有：

$$\langle\cdots\cdots n_{k_l\lambda'}\cdots\cdots n_{k_j\lambda''}\cdots\cdots|\mathscr{N}_{k_l\lambda'}|\cdots\cdots n'_{k_l\lambda'},\cdots\cdots n'_{k_j\lambda''}\cdots\cdots\rangle$$

$$=n_{k_l\lambda'}(\cdots\cdots\delta n_{k_l\lambda'}n'_{k_l\lambda'},\cdots\cdots\delta n_{k_j\lambda''}n'_{k_j\lambda''}\cdots\cdots). \tag{2.57}$$

### （四）粒子产生算符和湮灭算符

在量子场论里需要引入一些在量子力学里所没有的算符．如前所述，量子力学所描写的对象是一个给定的粒子或粒子系，而量子场论所描写的对象则是量子场．量子场总是处于不断的激发和退激的运动之中，与此相应，粒子就处于不断产生和湮灭之中．例如在相互作用过程中，一些场的退激和另一些场的激发伴随着初态粒子的消失和终态粒子的产生．为了描写粒子产生、湮灭的现象，需要引入粒子的产生、湮灭算符．

根据对易关系（2.42）不难证明以下两点结论：（1）若$|n_{k\lambda}\rangle$是$\mathscr{N}_{k\lambda}$的属于本征值$n_{k\lambda}$的本征右矢，则$a_{k\lambda}^{+}|n_{k\lambda}\rangle$便是$\mathscr{N}_{k\lambda}$的属于本征值（$n_{k\lambda}+1$）的本征右矢；（2）若$|n_{k\lambda}\rangle$是$\mathscr{N}_{k\lambda}$的属于本征值$n_{k\lambda}$的本征右矢，则$a_{k\lambda}|n_{k\lambda}\rangle$便是$\mathscr{N}_{k\lambda}$的属于本征值（$n_{k\lambda}-1$）的本征

右矢。证明如下：

$$\mathcal{N}_{k\lambda}a^+_{k\lambda}|n_{k\lambda}\rangle=a^+_{k\lambda}a_{k\lambda}a^+_{k\lambda}|n_{k\lambda}\rangle$$

$$=a^+_{k\lambda}(a^+_{k\lambda}a_{k\lambda}+1)|n_{k\lambda}\rangle$$

$$=(n_{k\lambda}+1)a^+_{k\lambda}|n_{k\lambda}\rangle, \tag{2.58}$$

这就证明了第一点结论。因此，我们有以下等式：

$$a^+_{k\lambda}|n_{k\lambda}\rangle=A_{n+1}|n_{k\lambda}+1\rangle \tag{2.59}$$

其中，$A_{n+1}$是待定常数。同样地，

$$\mathcal{N}_{k\lambda}a_{k\lambda}|n_{k\lambda}\rangle=a^+_{k\lambda}a_{k\lambda}a_{k\lambda}|n_{k\lambda}\rangle$$

$$=a_{k\lambda}(a^+_{k\lambda}a_{k\lambda}-1)|n_{k\lambda}\rangle=(n_{k\lambda}-1)a_{k\lambda}|n_{k\lambda}\rangle, \tag{2.60}$$

这又证明了第二点结论。据此又有以下等式：

$$a_{k\lambda}|n_{k\lambda}\rangle=B_{n-1}|n_{k\lambda}-1\rangle. \tag{2.61}$$

由于$|\cdots\cdots n_{k_l\lambda'},\cdots\cdots,n_{k_j\lambda''},\cdots\cdots\rangle=\cdots\cdots|n_{k_l\lambda'}\rangle\cdots\cdots|n_{k_j\lambda''}\rangle\cdots\cdots$，而且$a^+_{k\lambda}$和$a_{k\lambda}$只对$|n_{k\lambda}\rangle$起作用，故由以上结果易得：

$$a^+_{k_l\lambda'}|\cdots\cdots n_{k_l\lambda'},\cdots\cdots,n_{k_j\lambda''},\cdots\cdots\rangle$$

$$=A_{n+1}|\cdots\cdots n_{k_l\lambda'}+1,\cdots\cdots,n_{k_j\lambda''},\cdots\cdots\rangle, \tag{2.62}$$

$$a_{k_l\lambda'}|\cdots\cdots n_{k_l\lambda'},\cdots\cdots,n_{k_j\lambda''},\cdots\cdots\rangle$$

$$=B_{n-1}|\cdots\cdots n_{k_l\lambda'}-1,\cdots\cdots,n_{k_j\lambda''}\cdots\cdots\rangle. \tag{2.63}$$

（2.62）式说明，$a^+_{k\lambda}$作用于量子场态矢量是使能量为$\omega_k$、动量为k、极化为$\lambda$的光子数目增加1，而（2.63）式说明，$a_{k\lambda}$作用于量子场态矢量是使上述光子的数目减少1。因此，$a^+_{k\lambda}$、$a_{k\lambda}$分别是量子化电磁场的粒子产生算符和湮灭算符。

下面就来计算$a^+_{k\lambda}$、$a_{k\lambda}$的矩阵元。在$\mathcal{N}_{k\lambda}$的本征右矢张成的空间，显然有：

$$\langle n'_{k\lambda}|a_{k\lambda}|n_{k\lambda}\rangle=B_{n-1}\delta n'_{k\lambda}\,n_{k\lambda}-1, \tag{2.64}$$

即在所有矩阵元里，只有满足条件$n'_{k\lambda}=n_{k\lambda}-1$的矩阵元不为零。类似地，

$$\langle n_{k\lambda}|a^+_{k\lambda}|n'_{k\lambda}\rangle=A_{n'+1}\delta n_{k\lambda}n'_{k\lambda}+1. \tag{2.65}$$

因此，只有满足条件$n'_{k\lambda}=n_{k\lambda}-1$的矩阵元非零。为了确定这些非零矩阵元，我们利用下面的等式：

$$n_{k\lambda}=\langle n_{k\lambda}|a^+_{k\lambda}a_{k\lambda}|n_{k\lambda}\rangle$$

$$=\sum_{n'_{k\lambda}}|\langle n_{k\lambda}|a^+_{k\lambda}|n'_{k\lambda}\rangle\langle n'_{k\lambda}|a_{k\lambda}|n_{k\lambda}\rangle$$

$$=\begin{cases}\sum\limits_{n'_{k\lambda}}|\langle n'_{k\lambda}|a_{k\lambda}|n_{k\lambda}\rangle|^2 & (2.66)a\\ \sum\limits_{n'_{k\lambda}}|\langle n_{k\lambda}|a^+_{k\lambda}|n'_{k\lambda}\rangle|^2. & (2.66)b\end{cases}$$

分别把（2.64）与（2.66）$a$，（2.65）与（2.66）$b$相结合就得到

$$n_{k\lambda}=|\langle n_{k\lambda}-1|\ a_{k\lambda}|\ n_{k\lambda}\rangle|^{2}=B_{n-1}^{2}, \tag{2.67a}$$

和

$$n_{k\lambda}=|\langle n_{k\lambda}|\ a_{k\lambda}^{+}\ |n_{k\lambda}-1\rangle|^{2}=A_{n}^{2}. \tag{2.67b}$$

略去场态矢量所提供的常数相因子，就可由以上二式得到$a_{k\lambda}$和$a_{k\lambda}^{+}$的非零矩阵元为：

$$\langle n_{k\lambda}|\ a_{k\lambda}|\ n_{k\lambda}+1\rangle=\sqrt{n_{k\lambda}+1} \tag{2.68a}$$

$$\langle n_{k\lambda}+1\ |\ a_{k\lambda}^{+}\ |\ n_{k\lambda}\rangle=\sqrt{n_{k\lambda}+1}. \tag{2.68b}$$

因此，$a_{k\lambda}$、$a_{k\lambda}^{+}$ 分别有以下的矩阵表示：

$$a_{k\lambda}=\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \\ & & & \ddots \\ & 0 & & \end{pmatrix}, \tag{2.69a}$$

$$a_{k\lambda}^{+}=\begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ \sqrt{1} & 0 & & & \\ & \sqrt{2} & 0 & & \\ & & \sqrt{3} & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.69b}$$

以上二式表明：$a_{k\lambda}^{+}=a_{k\lambda}^{T}$.这一点与这些算符的非厄米性有关。

由（2.67）式可得：

$$B_{n}=\sqrt{n_{k\lambda}+1},$$

$$A_{n}=\sqrt{n_{k\lambda}}.$$

把这一结果分别代入（2.59）、（2.61）、（2.62）和（2.63）便确定了其中的待定常数。这里，一种重要的特殊情形是：

$$a_{k\lambda}^{+}\ |\ 0_{k\lambda}\rangle=|1_{k\lambda}\rangle, \tag{2.70a}$$

$$a_{k\lambda}|\ 0_{k\lambda}\rangle=0, \tag{2.70b}$$

$$a_{k\lambda}^{+}|\ 0\rangle=|\ 0,\cdots\cdots 0,1_{k\lambda},0,\cdots\cdots 0\rangle, \tag{2.71a}$$

$$a_{k\lambda}|\ 0\rangle=0. \tag{2.71b}$$

以上诸式意味着粒子是从真空里产生出来的，粒子的湮灭乃是消失到真空里去。

## §4　量子场论里的二象性概念

基于前面三节的讨论，我们可以对“量子场”的物理本质进行更深入的理解．在进行二次量子化以前，人们在宏观领域里考察所有经典波动场的运动，这时，人们从经典物理学的角度出发，仅仅看到一个具有连续波动性质的场．而在微观领域里，人们又是从量子力学的角度出发去考察微观客体的运动，这时，人们所看到的是一个具有波粒二象性的微观粒子．在二次量子化之后，人们的认识得到了深化：像电磁场这样的经典场，在其微观结构上不仅具有波动性，而且具有粒子性；而电子、质子、中子、……这样一些实物粒子，又都是联属于某种场的量子．因此，从“新”理论的角度出发，人们看到的是一个不仅具有连续波动性质，而且具有粒子性质的场，即量子场．

微观世界区别于宏观世界的显著特征是：前者具有波粒二象性，而后者只具有粒子性或波动性．但是，在量子力学里，微观粒子的波动性只是它的一种运动学特性，这种特性虽然是微观粒子所固有的属性，但还不是微观客体本身．按照这种观点，微观粒子的运动不再是简单的位置变动，不沿任一轨道运动，而是按几率波的规律运动．另方面，倘若人们继续从量子力学的角度来看，那末，把经典电磁场进行二次量子化所得到的能量子，就只是反映了电磁场能量的不连续性，并不反映电磁场的粒子性．这样，电磁场仍然是只作连续波动运动的物质形态．事实上，在量子力学的理论框架内根本无法反映电磁场的粒子性．因此，在量子力学里实物与场之间不能互相转化．

在量子场论里，波与粒子、场与实物处于对称的地位．量子场既是一种作连续波动的物质形态，也是一种粒子形态，它是粒子、波动二重性的对立统一体．每一种粒子都是联属于某种场的量子，当人们说到“粒子”时，只是说到了量子场这种物质形态的一个侧面；反之，每种场都具有与自身相关的场量子，当人们说到“波动场”时，也只是说到了量子场这种物质形态的另一个侧面．这两个侧面有机地联系着：粒子的波动性就在于它是相应波动场的量子，它以场激发的方式产生，并以场振动退激的方式湮灭．反之，场的粒子性就在于它有粒子结构，它的能量、动量、角动量、电荷等物理量，乃是每个粒子的相应量之总和．这样，在量子场论里，场与实物之间的绝对界限就不复存在，不同的粒子之间的相互作用和相互转化可以在量子场论的理论框架里得到反映．

在这里，还需进一步弄清“粒子”与“场”这两个侧面之间的内在联系．由于量子场具有无限多的谐振自由度，每一谐振自由度都能够独立地激发和退激．因而与场相联系的不是任何有限数目的粒子，更不是个别粒子，而是无限数目粒子的系集．这些粒子不是固定不变地存在着，而是伴随场的激发、退激而不断地产生、湮灭，所以作为量子场的一个侧面的，不是有限数目的粒子，而是粒子的整个系集．于是，我们不能谈到“个别粒子的场”或“$n$个粒子的场”．这是因为，任何确定数目的粒子均不是场．量子场的波、粒二重性就在于：它不但表现为一个能够激发和退激的波动场，而且同时表现为上述意义下的无限数目粒子的系集．但是这样一来，似乎有问题了：因为实验上观测到的总是有限数目的粒子，量子场的概念与实验事实符合吗？这一点，只要注意到粒

子数目只是量子场态矢量的变数就立刻明白了．我们的结论应当是：有限个粒子不是场，但量子场能够处于具有有限个粒子的状态，它也可以处于完全没有粒子的状态（真空态）．因此，任何有限数目的粒子均是量子场的某一激发态．

## §5　本章结语

在上面的讨论里，曾以非相对论Schrödinger方程的量子化为例来说明从量子力学到量子场论的过渡（见§2）．那样做只是为了使问题简化，以便突出物理内容．量子场论的理论体系是建立在量子力学和相对论的基础之上的．因此，应当对第一章所讨论的相对论波动方程进行二次量子化．这一严格的理论工作将放在以后各章去进行．

如第一章所述，在高速微观现象的领域，企图完全沿用量子力学的原理和方法来建立基本粒子相互作用的理论是根本不行的．而在本章前面四节的讨论里，我们看到，要建立这样的理论必须扩充量子力学的某些重要原理和概念，并提出新的物理假设，即四点基本假设．从这些假设出发建立起来的理论，即量子场论，的确能够描写粒子数目有变化的情况．

量子场论的建立，把人们对微观世界的认识发展到一个新的深度，按照这种新的认识，微观客体不是以"粒子"的形态存在（如同量子力学所假定的那样），而是以"量子场"的形态存在．实验上观测到的各种基本粒子，都是相应量子场的激发态．即使在某一段时间内，在某一空间区域里不存在粒子，在这一区域里仍然存在着量子场．只是这时，量子场处于真空态，我们用现有的物理实验方法观察不到它．这样，量子场论对于波粒二象性的认识就超出了就事论事的范围，进行了高度的科学抽象．基于上述理由，应当认为："量子场"并不仅仅是一个有用的概念，一种用来描写基本粒子的适宜方式，它其实是量子场论所赖以建立的一个物理模型．相应地，量子场论也不应被看成是量子力学的另一种表述方式，而是在量子力学基础上的新发展．虽然这一发展没有出现像从经典力学过渡到量子力学时所出现的那样巨大的跳跃，它甚至还沿用了量子力学的某些原理，但仍然出现了很大的跳跃，这一跳跃就集中表现在物理模型的变化上面．在低速微观现象的领域，量子场论与非相对论量子力学等价〔注1〕，这说明后者是前者的低能近似．

我们在上面所提出的看法，把量子场论的建立说成是物理学发展史上又一次重大的变革（当然不像量子力学和相对论的建立那样具有划时代的意义）．近六十年来，量子场论对于人们认识高速微观现象起了很大的极积作用，但是，这个理论本身仍然存在着严重的困难（发散困难）．产生这些困难的原因，也许正是由于"量子场"这一物理模型离开微观世界的本质尚有一段很大的距离．在物理学发展史上，一次认识上的跳跃是否意味着一次成功的变革，主要取决于新理论所赖以建立的物理模型是否是所研究对象的一个良好的近似．微观世界的本质到底是什么？这样一个问题，有待人们继承现有理

---

〔注1〕 参见DAVID LURIE (1968), «Particles and Fields» pp.119—122. Wiley.

论的全部积极成果去探索，去发现。

## 习　题

（1）在引入量子场的算符和态函数时，是怎样从量子力学的原有概念出发的？又是怎样修改了量子力学的概念？

•（2）当量子场处于基态时，粒子没有了，波动停止了，这时，量子场还有粒子性吗？还有波动性吗？如果有，表现在何处？如果没有，为什么？在这里有使你深思的问题吗？（请带着这样一个问题一直读到第十章）。

•（3）可否用量子场的概念定性解释电子衍射实验？如果可以，怎样解释？如果不可以，困难何在？

（4）由本章的讨论知道，量子场的总能量是各个量子谐振子能量之总和。那么，量子场的总动量是否也是各个量子谐振子的动量之总和？为什么？

•（5）现代统计物理学已经运用量子场论方法研究粒子数可变的多粒子体系的运动。据此，是否可以把量子场归结为一个“多粒子体系”？如果不可以，那么，统计物理的上述做法已经取得了成就和进展，应如何解释呢？如果可以，理由何在？

本章一开始有一句话说：量子场论必须是一个“多粒子理论”。这句话是否确切？有无错误？

# 第三章　自由场的经典理论

在这一章里，我们从量子场论的第一点基本假设出发，把第一章讨论过的所有相对论波动方程式都看成是经典波动场的场方程式，在此基础上，对经典场的运动规律以及它们所具有的对称性质进行必要的讨论，以便为场的量子化做好准备。

## §1　场是无限自由度的体系

在经典力学里，由$M$个质点组成的体系是有限自由度的体系，其自由度数目是$3M$。对于这样的体系，唯有时间$t$是独立变数，它的$3M$个广义坐标$q_\alpha(t)$ $(\alpha=1,2,\cdots\cdots,3M)$则是时间$t$的函数。$q_\alpha(t)$对$t$的导数$\dot{q}_\alpha(t)$称为广义动量。广义坐标$q_\alpha(t)$又称为所论质点系的动力变数。因此，体系的自由度数目等于它的广义坐标（或动力变数）的数目。

一个作连续波动运动的场，它的独立变数是$x_1$、$x_2$、$x_3$、$x_4=it$，它的动力变数或广义坐标，便是场存于其间的那部分空间区域内各点的场函数值。如果$\phi_A(x)$ $(A=1,2,\cdots\cdots N)$是所论经典场的一组独立的场函数。那么，在上述空间区域内每点$\mathbf{x}$就有一组独立的场函数之值$\phi_A(\mathbf{x},t)$。任何一个空间区域都是一个不可数的无限点集。因此，场是一个不可数无限自由度的体系。为了方便起见，仍假定场存在于有限的空间区域$V$内，而且场函数在$V$的边界上满足周期边界条件。场的广义动量便是广义坐标对独立变数的偏导数$\partial_\mu\phi_A(\mathbf{x},t)$。场在$t$时刻的运动状态，可用在此时刻各点的场函数$\phi_A$和$\partial_\mu\phi_A$之值来确定。

## §2　作用量原理与Hamilton形式

首先来回忆一下经典质点力学里Hamilton作用量原理的内容。对于一个$n$自由度的体系，设其广义坐标和广义动量分别为$q_\alpha$，$\dot{q}_\alpha$，则其Lagrange函数为

$$L(q_\alpha,\ \dot{q}_\alpha),\ \ \alpha=1,2,\cdots\cdots n. \tag{3.1}$$

假定$q_\alpha(t)|_{t_1}=q_\alpha(t_1)$，$q_\alpha(t)|_{t_2}=q_\alpha(t_2)$已经给定，则体系从状态〔$q_\alpha(t_1),t_1$〕过渡到状态〔$q_\alpha(t_2),t_2$〕所遵循的实际物理路径$q_\alpha(t)$是使作用量$\mathrm{J}=\int_{t_1}^{t_2}L(q_\alpha,\dot{q}_\alpha)dt$的变分为零：

$$0=\delta J=\delta\int_{t_1}^{t_2}L(q_\alpha,\dot{q}_\alpha)dt$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha\Big|_{t_1}^{t_2}+\sum_{\alpha=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2}(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha-\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha})\delta q_\alpha)dt$$

因起、止时刻的$q_\alpha$已经给定，故有以下的变分边值条件：

$$\delta q_\alpha|_{t_1}=\delta q_\alpha|_{t_2}=0. \tag{3.2}$$

把此条件代入上式，就得到体系的Euler-Lagrange方程组

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}-\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha})=0. \tag{3.3}$$

$$\alpha=1,2,3,\cdots\cdots n$$

现在把体系的运动方程纳入Hamilton正则形式．定义体系的正则坐标和正则共轭动量分别为：

$$q_\alpha(t), \tag{3.4a}$$

$$p_\alpha(t)=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}, \tag{3.4b}$$

并通过如下的Legendre变换来定义体系的Hamilton函数$H(q_\alpha,p_\alpha)$：

$$H(q_\alpha,p_\alpha)=\sum_{\alpha=1}^{n}p_\alpha\dot{q}_\alpha-L(q_\alpha,\dot{q}_\alpha). \tag{3.5}$$

这样，体系的正则运动方程式为：

$$\dot{q}_\alpha=\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}=[q_\alpha,H]_{PB}, \tag{3.6a}$$

$$\dot{p}_\alpha=-\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}=[p_\alpha,H]_{PB}. \tag{3.6b}$$

$$\alpha=1,2,\cdots\cdots n.$$

其中，$[u,v]_{PB}$是经典Poisson括号，其定义为：

$$[u,v]_{PB}=\sum_{\alpha=1}^{n}[\frac{\partial u}{\partial q_\alpha}\frac{\partial v}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial v}{\partial q_\alpha}\frac{\partial u}{\partial p_\alpha}] \tag{3.7}$$

特别地，

$$[q_\alpha,p_\beta]_{PB}=\delta_{\alpha\beta}. \tag{3.8}$$

不难将上面的讨论方法推广应用于经典场．为此，首先以实标量场为例．实标量场只有一个独立的场函数$\phi(x,t)$，且

$$\phi^*(x,t)=\phi(x,t). \tag{3.9}$$

应当注意，在多粒子体系的情况下，是对体系的每一自由度来建立运动方程式（3.3）和（3.6），而现在，场的自由度指标便是连续变数x，因此，应当在空间每点x来建立场的运动方程式．为此，就需要定义空间每点的Lagrange函数密度$\mathscr{L}$：

$$\mathscr{L}(x)=\mathscr{L}[\phi(\mathbf{x},t),\partial_\mu\phi(\mathbf{x},t)]. \tag{3.10}$$

$\phi$和$\partial_\mu\phi$分别是实标量场的广义坐标和广义动量．场的Lagrange函数$L$是$\mathscr{L}$的体积积分：

$$L=\int_V\mathscr{L}[\phi(\mathbf{x},t),\partial_\mu\phi(\mathbf{x},t)]d^3\mathbf{x}. \tag{3.11}$$

按照作用量原理，场从$t_1$时刻的状态$\phi(\mathbf{x},t_1)$过渡到$t_2$时刻的状态$\phi(\mathbf{x},t_2)$所遵循的实际物理路径$\phi(\mathbf{x},t)$，应使作用量的变分为零．或者说，满足场的实际运动方程的场函数$\phi(\mathbf{x},t)$应使作用量的变分为零：

$$\begin{aligned}\delta J&=\delta\int_{t_1}^{t_2}dtL=\delta\int_\Omega d^4x\mathscr{L}(\phi,\partial_\mu\phi)\\&=\int_\Omega d^4x\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}\delta\phi+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi)\right)\\&=\int_\Omega d^4x\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\right)\delta\phi+\\&+\int_\Omega d^4x\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right)=0.\end{aligned} \tag{3.12}$$

其中，$d^4x=d^3xdt$．$\Omega=V(t_2-t_1)$是四维时空的一个区域．在上式的推算里，我们是在空间每点独立地给定场函数的变分：

$$\delta\phi(\mathbf{x},t)=\phi'(\mathbf{x},t)-\phi(\mathbf{x},t),$$

但$\phi$在$t_1$、$t_2$时刻之值已事先给定，故有：

$$\delta\phi(\mathbf{x},t_1)=\delta\phi(\mathbf{x},t_2)=0, \tag{3.13}$$

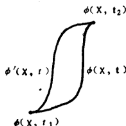


图3—1　$t$时刻在空间每点x，独立地给定$\phi$的变分．而在$t_1$时刻和$t_2$时刻，$\delta\phi=0$

另方面，$\phi$和$\partial_\mu\phi$在空间区域$V$的界面上满足周期边界条件，故必定有下式成立：

$$\delta\phi(\mathbf{x},t)|_{\mathbf{x}在V的界面上}=0,\quad t_1<t<t_2 \tag{3.14}$$

又因为四维时空区域$\Omega$的边界面$\Sigma$包括如下的所有时空点：$(\mathbf{x},t_1)$，$(\mathbf{x},t_2)$以及$(\mathbf{y},t)$（其中，y是$t$时刻，$V_t$的界面上的流动坐标），所以可将（3.13）、（3.14）合写为下式：

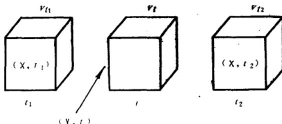


图3—2　四维时空区域$\Omega$及其界面的示意图，$t_1<t<t_2$．

$$\delta\phi(\mathbf{x},t)|_{\Omega\text{的边面界}\Sigma}=0. \tag{3.15}$$

这就是场函数的变分边值条件. 把（3.15）代入（3.12），立刻得到实标量场的Euler-Lagrange方程式

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}-\partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}=0. \tag{3.16}$$

对于任意的经典场，设其场函数为 $\phi_A(\mathbf{x},t)$, $A=1,2,\cdots\cdots N$，则场的Lagrange函数密度为

$$\mathscr{L}(\phi_A,\partial_\mu\phi_A),\quad \begin{array}{l}\mu\text{取所有从 1 到 4 之值},\\ A\text{取所有从 1 到}N\text{之值},\end{array} \tag{3.17a}$$

相应地，

$$L=\int_V d^3x\mathscr{L}(\phi_A,\partial_\mu\phi_A), \tag{3.17b}$$

$$J=\int_\Omega d^4x\mathscr{L}(\phi_A,\partial_\mu\phi_A). \tag{3.18}$$

在变分边值条件

$$\delta\phi_A(\mathbf{x},t)|_{\Omega\text{的边界面}\Sigma}=0 \tag{3.19}$$

之下，对每个场函数$\phi_A$独立地进行变分$\delta\phi_A(x)=\phi'_A(x)-\phi_A(x)$，并利用作用量原理，可得：

$$0=\delta J=\int_\Omega d^4x\sum_{A=1}^{N}\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_A}\delta\phi_A-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_A)}\right)\delta\phi_A\right\}, \tag{3.20}$$

由此式立即得到经典场$\phi_A(\mathbf{x},t)$的Euler-Lagrange方程组为：

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_A}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_A)}\right)=0. \tag{3.21}$$

为了把场的运动方程纳入Hamilton 正则形式，我们定义场的正则坐标为 $\phi_A(\mathbf{x},t)$，正则共轭动量（或共轭场）为

$$\pi_A(\mathbf{x},t)=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot\phi_A(\mathbf{x},t)}, \tag{3.22}$$

并通过空间每点的Legendre变换来定义场的Hamilton函数密度$\mathscr{H}(x)$：

$$\mathscr{H}(x)=\sum_{A=1}^{N}\pi_A\dot\phi_A-\mathscr{L}(\phi_A,\partial_\mu\phi_A). \tag{3.23}$$

相应地，场的Hamilton函数为：

$$H=\int_V d^3x\mathscr{H}(x). \tag{3.24}$$

由于场的Lagrange函数密度$\mathscr{L}$是一个Lorentz标量函数（见本章§3），故在$\mathscr{L}$的同一个

相加项里不会同时出现$\phi_A$和$\partial_\mu\phi_A$，这就是说$\pi_A$不含有$\phi_A$。于是，利用（3.23）、（3.21）和（3.22）不难推出下式：

$$\dot{\pi}_A = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \phi_A} + \partial_j\left(\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial(\partial_j \phi_A)}\right). \tag{3.25a}$$

此外由（3.23）直接得到

$$\dot{\phi}_A = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \pi_A}. \tag{3.25b}$$

（3.25）式便是经典场的正则运动方程．由于场是不可数无限自由度的体系，而且方程式中出现的是Hamilton函数密度$\mathscr{H}$，故（3.25）与质点系的正则方程（3.6）在形式上有显著差异。

## §3　场的Lagrange函数密度和Hamilton函数密度

对于不同的场，只要找到$\mathscr{L}$和$\mathscr{H}$的具体形式，就可从Euler-Lagrange方程（3.21）或Hamilton正则运动方程（3.25）导出场函数所满足的微分方程式．对于标量场、旋量场和电磁场来说，场函数满足的微分方程式（以下简称场方程式）分别便是第一章讨论过的K—G方程式、Dirac方程式和Maxwell方程式．反之，这一点，正好为我们寻找场的$\mathscr{L}$和$\mathscr{H}$提供了依据。

**实标量场**　由（3.20）可得

$$0 = \delta J = \int_\Omega d^4x\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right)\delta\phi. \tag{3.26}$$

我们要找的$\mathscr{L}$应能从Euler-Lagrange方程式导出K—G方程（1.8），所以为了找到$\mathscr{L}$的具体形式，可用方程（1.8）左边来代替（3.26）右边圆括号内的被积式．然后利用边值条件（3.19）并进行通常的微分运算即得：

$$0 = \delta J = \delta \int_\Omega d^4x\left\{-\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi + m^2\phi\phi)\right\} \tag{3.27}$$

另一方面，由（3.18）式可得：

$$0 = \delta J = \delta \int_\Omega d^4x \mathscr{L}(\phi, \partial_\mu\phi). \tag{3.28}$$

把（3.28）与（3.27）比较，就得到实标量场的Lagrange函数密度为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi\phi. \tag{3.29}$$

通过Legendre变换又可找到场的Hamilton函数密度：

$$\mathscr{H} = \pi\dot{\phi} - \mathscr{L} = \frac{1}{2}(\dot{\phi}\dot{\phi} + \nabla\phi\cdot\nabla\phi + m^2\phi\phi) \tag{3.30}$$

相应地，场的总Hamilton函数为：

$$H=\frac{1}{2}\int_V d^3x(\dot{\phi}\dot{\phi}+\nabla\phi\cdot\nabla\phi+m^2\phi\phi). \tag{3.31}$$

**复标量场**：因为$\phi^*\neq\phi$，所以复标量场有两部分独立的自由度．可用两个独立的实标量场$\phi_1$和$\phi_2$来代表这两部分自由度：

$$\phi=\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1-i\phi_2), \tag{3.32a}$$

$$\phi^*=\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1+i\phi_2). \tag{3.32b}$$

又因为实标量场$\phi_1$、$\phi_2$的Lagrange函数密度由（3.29）给出，故对复标量场$\phi$，我们有

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2=-\partial_\mu\phi^*\partial_\mu\phi-m^2\phi^*\phi. \tag{3.33}$$

为了找到复标量场的Hamilton函数密度，首先要定义$\phi(x)$和$\phi^*(x)$的共轭场$\pi(x)$和$\pi^*(x)$：

$$\pi(x)=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}}=\dot{\phi}^*, \tag{3.34a}$$

$$\pi^*(x)=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}^*}=\dot{\phi}, \tag{3.34b}$$

其次由（3.23）式有：

$$\mathscr{H}=\pi\dot{\phi}+\pi^*\dot{\phi}^*-\mathscr{L},$$

把（3.33）和（3.34）代入上式便得到：

$$\mathscr{H}=\pi^*\pi+\nabla\phi^*\nabla\phi+m^2\phi^*\phi. \tag{3.35}$$

场的总Hamilton函数为

$$H=\int_V d^3x(\pi^*\pi+\nabla\phi^*\nabla\phi+m^2\phi^*\phi). \tag{3.36}$$

**旋量场**　场方程便是（1.34）和（1.85）：

$$(\gamma_\mu\partial_\mu+m)\psi=0, \tag{3.37a}$$

$$\bar{\psi}(-\gamma_\mu\overleftarrow{\partial}_\mu+m)=0. \tag{3.37b}$$

场的广义坐标和广义动量分别是

$\psi$　　$\partial_\mu\psi$

$\bar{\psi}$　　$\partial_\mu\bar{\psi}$

用（3.37）式左边分别代替（3.20）式右边的被积式，并注意作用量是一个Loreutz标量就得到：

$$0=\delta J=\int_\Omega d^4x\,\Big(\delta\overline{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu+m)\psi$$

$$+\overline{\psi}(-\gamma_\mu\overleftarrow{\partial_\mu}+m)\delta\psi\Big)$$

$$=\int_\Omega d^4x\,\big(\delta\overline{\psi}\gamma_\mu(\partial_\mu\psi)+\overline{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu(\delta\psi)-\partial_\mu(\overline{\psi}\gamma_\mu\delta\psi)$$

$$+m(\delta\overline{\psi})\psi+m\overline{\psi}\delta\psi\big)$$

$$=\delta\int_\Omega d^4x(\overline{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi+m\overline{\psi}\psi),$$

另一方面，由（3.18）可得：

$$0=\delta J=\delta\int_\Omega d^4x\mathscr{L}(\psi,\overline{\psi},\partial_\mu\psi,\partial_\mu\overline{\psi}),$$

因此，旋量场的Lagrange函数密度为

$$\mathscr{L}=\overline{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu+m)\psi.$$

由于$\mathscr{L}=0$，故可乘以"$-1$"而使之成为便于应用的形式：

$$\mathscr{L}=-\overline{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu+m)\psi. \tag{3.38}$$

为了找到$\mathscr{H}(x)$，需要定义与正则坐标$\psi$、$\overline{\psi}$共轭的正则动量$\pi_\psi$和$\pi_{\overline{\psi}}$

$$\pi_\psi=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}}=i\psi^+, \tag{3.39a}$$

$$\pi_{\overline{\psi}}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\overline{\psi}}}=0. \tag{3.39b}$$

这一结果是由于（3.38）式在形式上对$\psi$和$\overline{\psi}$不对称所造成的，因此，当采用（3.38）式的$\mathscr{L}$时〔注1〕，不能把$\psi$和$\overline{\psi}$均视为独立的正则坐标，这时，旋量场只有一个独立的正则坐标$\psi$和与之共轭的正则动量$\pi_\psi$。这样，由（3.23）式可得

$$\mathscr{H}=\psi^+(\gamma_4\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla+\gamma_4m)\psi. \tag{3.40a}$$

利用（1.37）式又可将$\mathscr{H}$写为

$$\mathscr{H}=\psi^+\widehat{H}\psi, \tag{3.40b}$$

其中，$\widehat{H}$是单粒子的Hamilton算符（量子力学算符），场的总Hamilton函数为：

$$H=\int_V d^3x\mathscr{H}(x)=\int_V d^3x\psi^+(x)\widehat{H}\psi(x). \tag{3.41}$$

此式也就是经典旋量场的能量公式．右边的积分要用量子力学里计算平均值的方法来进

〔注1〕 除了（3.38）式的形式以外，还可以采用如下形式的$\mathscr{L}$．

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{2}(\overline{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi-\overline{\psi}\gamma_\mu\overleftarrow{\partial_\mu}\psi)-m\overline{\psi}\psi.$$ 读者自己证明．

行计算．由第一章知道，$\hat{H}$可以有负的平均值，故经典旋量场的能量并不是正定的．相对论量子力学里的负能困难，在旋量场的经典理论里依然存在．这一点，对所有半数自旋的场，即Fermi 场，情形也都如此．场的能量取负值是没有物理意义的．对这一点的解释是，从正则量子化的角度看来，Fermi场并不存在经典极限〔注1〕，我们从经典的意义上来讨论Fermi场，只是要为进行二次量子化作好必要的准备．

**电磁场**　场方程便是（1.250）式：

$$\Box A_\mu = 0,$$

广义坐标和广义动量分别是$A_\mu$和$\partial_\nu A_\mu$($\mu$、$\nu = 1, 2, 3, 4$)．用场方程左边去代替(3.20)右边的被积式，并利用条件（3.19），就得到

$$0 = \delta J = \int_\Omega d^4x (\Box A_\mu)\,\delta A_\mu$$

$$= \int_\Omega d^4x \left( -(\partial_\nu A_\mu)\partial_\nu(\delta A_\mu) \right)$$

$$= \delta \int_\Omega d^4x \left( -\frac{1}{2}\partial_\nu A_\mu \partial_\nu A_\mu \right).$$

因此，经典电磁场的Lagrange函数密度为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\partial_\nu A_\mu \partial_\nu A_\mu. \tag{3.42}$$

场的正则坐标和正则共轭动量分别是$A_\mu$和 $\pi_\mu = \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = \dot{A}_\mu$，因此，

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}(\dot{A}_\mu \dot{A}_\mu + \nabla A_\mu \cdot \nabla A_\mu), \tag{3.43a}$$

$$H = \frac{1}{2}\int_V d^3x (\dot{A}_\mu \dot{A}_\mu + \nabla A_\mu \cdot \nabla A_\mu). \tag{3.43b}$$

综上所述，每种场的$\mathscr{L}$都是Lorentz标量．这一点正是理论的Lorentz 不变性所需要的．

## §4　对称性与守恒定律

物理学理论的发展使人们认识到：自然界的所有守恒定律均分别联系于某种对称性．例如空间平移对称性联系于动量守恒定律，时间平移对称性联系于能量守恒定律，等等．自然界的对称性比守恒定律更带有根本性．因而可以认为，每一条守恒定律均分别以某种对称性作为它的更深一层的物理原因．

---

〔注1〕　但是近几年来，在用路径积分量子化的方案中，需要把Fermi场的经典极限视为一种有反对易性质的$c$数，称为Grassmann数．参见PIERRE RAMOND,《Field Theory》, p214, Benjamin/Cummings, 1981.

在基本粒子理论里，对称性的考虑占有相当重要的地位。其内容已远远超出了与守恒定律的相互联系。在现代量子场论里，一类特殊的对称性，即所谓"局域规范对称性"被视为量子场之间的相互作用赖以发生的准则，这一准则称为规范原则。它与相对论原则具有同等的重要性。在第八章里，我们将以电磁相互作用为例作一简单介绍。在这一节里，只限于讨论经典场系统所具有的对称性，以及由这些对称性导致的守恒定律。

### （一）对称性的含义

对称性或不变性是指物理学理论的基本方程式在某一变换之下保持不变的一种性质。

**时空对称性的含义**：假定，当四维时空经受无穷小的连续变换

$$x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu, \tag{3.44}$$

而场函数经受相应的线性变换

$$\phi'_A(x') = \phi_A(x) + \sum_{B=1}^{N} l_{AB}\phi_B(x). \tag{3.45}$$

时，场的Lagrange函数密度保持不变，即

$$\mathscr{L}[\phi'_A(x'), \partial_\mu \phi'_A(x')] = \mathscr{L}[\phi_A(x), \partial_\mu \phi_A(x)], \qquad (3.46)a$$

或

$$\mathscr{L}'(x') = \mathscr{L}(x), \qquad (3.46)b$$

那么，就说场的运动规律在变换（3.44）之下具有不变性，或对称性。

在条件（3.46）之下，若再假定变换（3.44）的Jacobi行列式为1：

$$\left|\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu}\right| = 1,$$

则场系统的作用量也是不变的：

$$\begin{aligned}\delta J &= \int_{\Omega'} d^4x' \mathscr{L}'(x') - \int_\Omega d^4x \mathscr{L}(x)\\ &= \int_\Omega \mathscr{L}(x)\left|\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu}\right| d^4x - \int_\Omega \mathscr{L}(x) d^4x = 0.\end{aligned} \tag{3.47}$$

因为时空平移变换以及所有行列式为1的时空连续变换，其Jacobi行列式均为1，所以（3.47）式在我们下面所要讨论到的例子里都是成立的。

又因为任一个有限的时空连续变换都是无数个无穷小变换的连续施行，故若把（3.44）代之以有限变换，上面的陈述依然是成立的。

**内部对称性的含义**　除了时空对称性之外，还有另一种对称性，即内部对称性。这种对称性与场的时空运动无关，而只与场的内部运动有关。我们这里所谓的"经典场"，在微观结构上是一个量子场，所以场的内部对称性，实则是指场量子的内部对称性。

假定在内部变换

$$\begin{pmatrix} \phi'_1(x) \\ \phi'_2(x) \\ \vdots \\ \phi'_N(x) \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_N(x) \end{pmatrix} \tag{3.48}$$

之下，场的Lagrange函数密度保持不变，即

$$\mathscr{L}[\phi'_A(x), \partial_\mu \phi'_A(x)] = \mathscr{L}[\phi_A(x), \partial_\mu \phi_A(x)] \tag{3.49a}$$

或

$$\mathscr{L}'(x) = \mathscr{L}(x), \tag{3.49b}$$

那么，就说场的运动规律在（3.48）之下是不变的，而（3.48）式就称为场的内对称变换. 在（3.48）式里，$U$是一个$N \times N$矩阵；今后把（3.48）式里的$N \times 1$矩阵简记为$[\phi_A(x)]$它是以场的全部独立分量为元素的列矩阵.

## （二）Noether定理

Noether 定理是场论里关于对称性与守恒定律之间的相互关系的普遍定理. 其内容如下：任何一个连续对称变换（它保持场的$\mathscr{L}$不变），必导致某一（或某些）场物理量的守恒定律.

从这一小节到第（四）小节，先讨论时空对称性的情形，在第（五）小节里再来讨论内部对称性的情形.

下面，我们用两种方法来证明Noether 定理，并分别导出微分形式的守恒定律和积分形式的守恒定律.

第一种方法：假定无穷小变换（3.44）的Jacobi行列式为1，则

$$\begin{aligned} 0 = \delta J &= \int_{\Omega'} \mathscr{L}'(x') d^4x' - \int_{\Omega} \mathscr{L}(x) d^4x \\ &= \underbrace{\int_{\Omega'} \mathscr{L}'(x') d^4x' - \int_{\Omega} \mathscr{L}'(x) d^4x}_{\text{第一项：} \delta J_\Sigma} \\ &\quad + \underbrace{\int_{\Omega} \mathscr{L}'(x) d^4x - \int_{\Omega} \mathscr{L}(x) d^4x.}_{\text{第二项：} \delta J_\phi} \end{aligned} \tag{3.50}$$

我们首先来计算上式右边的$\delta J_\phi$，把$\mathscr{L}'(x)$展成级数并略去高阶无穷小得：

$$\begin{aligned} \mathscr{L}'(x) &= \mathscr{L}[\phi_A + \delta\phi_A, \partial_\mu\phi_A + \delta(\partial_\mu\phi_A)] \\ &= \mathscr{L}(\phi_A, \partial_\mu\phi_A) + \sum_{A=1}^{N} \left( \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi_A} \delta\phi_A + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_A)} \delta(\partial_\mu\phi_A) \right), \end{aligned}$$

将此式代入（3.50）右边第二项并略加整理可得：

$$\begin{aligned} \delta J_\phi = \sum_{A=1}^{N} \Bigg\{ &\int_\Omega \left[ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi_A} - \partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_A)} \right] \delta\phi_A d^4x \\ &+ \int_\Omega \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_A)} \delta\phi_A \right) d^4x \Bigg\}. \end{aligned} \tag{3.51}$$

这里，场函数的主动变分$\delta\phi_A$是由时空连续变换引起的。所以在现在的情况下，边值条件（3.19）不再成立，（3.51）式右边第二项积分也不为零。但右边第一项积分为零，这是因为场函数$\phi_A$必须满足Euler-Lagrange方程式。于是，

$$\delta J_\phi=\int_\Omega\partial_\mu\sum_{A=1}^{N}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_A)}\delta\phi_A\right)d^4x. \tag{3.52}$$

其次再来计算（3.50）右边的$\delta J_\Sigma$。因为

$$\int_{\Omega'}\mathscr{L}'(x')d^4x'=\int_\Omega\mathscr{L}(x)d^4x,$$

而且

$$\mathscr{L}'(x)=\mathscr{L}(x)+\delta\mathscr{L}(x),$$

故

$$\delta J_\Sigma=-\int_\Omega\delta\mathscr{L}d^4x; \tag{3.53}$$

略去二阶小量$\delta(\partial_\mu\mathscr{L})\delta x_\mu$，我们有：

$$0=\mathscr{L}'(x')-\mathscr{L}(x)=\delta\mathscr{L}(x)+\frac{d\mathscr{L}}{dx_\mu}\delta x_\mu,$$

即

$$\delta\mathscr{L}(x)=-\frac{d\mathscr{L}}{dx_\mu}\delta x_\mu, \tag{3.54}$$

因此，（3.53）式成为

$$\delta J_\Sigma=\int_\Omega\frac{d\mathscr{L}}{dx_\mu}\delta x_\mu d^4x.$$

另方面，由于Jacobi行列式为1，故$\partial_\mu\delta x_\mu=0$，可将上式重写为

$$\delta J_\Sigma=\int_\Omega\partial_\mu(\mathscr{L}\delta x_\mu)d^4x, \tag{3.55a}$$

或者

$$\delta J_\Sigma=\int_\Sigma\mathscr{L}\delta x_\mu d\sigma_\mu, \tag{3.55b}$$

其中

$$d\sigma_j=dA_jdt,\quad d\sigma_4=\frac{1}{i}d^3x,\quad j=1,2,3 \tag{3.56}$$

是四维区域$\Omega$的边界面$\Sigma$的面积元素，而$dA_j$是空间区域$V$的边界面$S_j$的面积元素。

将(3.52)、(3.55)$a$代入（3.50）式，就得到：

$$0=\delta J=\int_\Omega\partial_\mu\left[\mathscr{L}\delta x_\mu+\sum_A\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_A)}\delta\phi_A\right]d^4x. \tag{3.57}$$

因此，我们得到微分形式的守恒定律，

$$\partial_\mu f_\mu=0, \tag{3.58a}$$

其中，
$$f_\mu=\mathscr{L}\delta x_\mu+\sum_A\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_A)}\delta\phi_A \tag{3.58)b$$

是一个守恒四矢。它的物理内容将因不同的对称变换而异。

第二种方法：把（3.57）式转变为四矢$f_\mu$沿$\Sigma$的面积分：

$$0=\delta J=\int_\Sigma\left(\mathscr{L}\delta x_\mu+\sum_A\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_A)}\delta\phi_A\right)d\sigma_\mu, \tag{3.59}$$

再把这个面积分分解为沿三对类空平面和一对类时平面的积分：

$$\int_\Sigma f_\mu d\sigma_\mu=\sum_{j=1}^3\int_{\Sigma_j}f_j d\sigma_j+\int_{\Sigma_4}f_4 d\sigma_4$$

$$=\sum_{j=1}^3\int_{t_1}^{t_2}\int_{S_j}f_j d\Omega_j dt+\int_{\Sigma_4}\frac{1}{i}f_4 d^3x.$$

因为空间区域$V$的每对界面中的两个平面具有相反的法线方向，而且场在$V$的边界面上满足周期边界条件，故$\int_{S_j}f_j d\Omega_j=0$．这样，上式右边只有第二项积分不为零，考虑到$t=t_1$平面和$t=t_2$平面法线方向相反，就有：

$$\int_{\Sigma_4}\frac{1}{i}f_4 d^3x=\int_{V_{t_2}}\frac{1}{i}f_4 d^3x-\int_{V_{t_1}}\frac{1}{i}f_4 d^3x=0. \tag{3.60}$$

令

$$G(t)=\int_{V_t}(-if_4)d^3x \tag{3.61)a$$

其中，
$$f_4=i\mathscr{L}\delta t+i\sum_A\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}_A}\delta\phi_A, \tag{3.61)b$$

则由（3.60）式得到积分形式的守恒定律：

$$G(t_1)=G(t_2). \tag{3.62}$$

我们看到，守恒四矢$f_\mu$的时间分量通过(3.61)$a$的积分而给出守恒量$G(t)$。守恒量$G(t)$的物理内容将因不同的对称变换而异。

## （三）时、空平移对称性与能量动量守恒定律

考虑无穷小的时、空平移变换

$$x'_\mu=x_\mu+\varepsilon_\mu. \tag{3.63}$$

因这时$\partial'_\mu=\partial_\mu$，所以

$$\phi'_A(x')=\phi_A(x)\qquad A=1,2,\cdots\cdots N \tag{3.64}$$

即场函数是平移不变量．由此，略去二阶以上小量即得

$$\delta\phi_A(x)=-\varepsilon_\mu\partial_\mu\phi_A(x). \tag{3.65}$$

把（3.65）和$\delta x_\mu=\varepsilon_\mu$代入（3.58）得：

$$\varepsilon_\nu\partial_\mu\left[\mathscr{L}\delta_{\mu\nu}-\sum_A\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_A)}\partial_\nu\phi_A\right]=0,$$

或 $$\varepsilon_\nu\partial_\mu T_{\mu\nu}=0.$$

因此，就有以下的微分守恒定律：

$$\partial_\mu T_{\mu\nu}=0 \tag{3.66$a$}$$

其中，

$$T_{\mu\nu}=\mathscr{L}\delta_{\mu\nu}-\sum_A\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_A)}\partial_\nu\phi_A \tag{3.66$b$}$$

是一个二阶张量．为了弄清它的物理内容，我们来考察它的时间分量$T_{4\nu}$沿空间区域$V$的积分：

$$P_\nu=\int_V[-iT_{4\nu}(x)]d^3x. \tag{3.67}$$

因为$T_{\mu\nu}$满足(3.66)$a$，所以$P_\nu$便是一个四维矢量的第$\nu$分量[注1]．另方面，时间分量

$$P_4=\int_V(-iT_{44})d^3x=\int_V i(\sum_A\pi_A\dot{\phi}_A-\mathscr{L})d^3x$$

$$=\int_V i\mathscr{H}(x)d^3x=iP_0 \tag{3.68}$$

给出经典场的总能量

$$P_0=\int_V\mathscr{H}(x)d^3x=\mathrm{H}, \tag{3.69$a$}$$

所以四矢$P_\nu$便是场的能量、动量矢量．它的空间分量

$$\mathbf{P}=-\int_V d^3x\sum_A\pi_A\nabla\phi_A=\int_V d^3x\mathbf{p} \tag{3.69$b$}$$

便是经典场的总动量．我们看到，张量$T_{\mu\nu}$通过如下关系式分别与场的能量密度和动量密度相互联系：

$$-T_{44}=\sum_A\pi_A\dot{\phi}_A-\mathscr{L}=\mathscr{H}(x), \tag{3.70$a$}$$

$$-iT_{4j}=-\sum_A\pi_A\partial_j\phi_A=\mathrm{p}_j,\quad j=1,2,3 \tag{3.70$b$}$$

因此，$T_{\mu\nu}$称为场的能量、动量（密度）张量．

此外，把$\delta t=-i\varepsilon_4$和（3.65）代入（3.61）又可得到守恒量

$$G(t)=\varepsilon_\mu P_\mu(t), \tag{3.71$a$}$$

〔注1〕 见张宗燧著，《电动力学及狭义相对论》，pp.232—233，科学出版社，1965年。

其中，
$$P_\mu(t)=\int_{V_t}d^3x\left(-i\delta_{4\mu}\mathscr{L}-\sum_A\pi_A\partial_\mu\phi_A\right). \tag{3.71b}$$

这里的$P_\mu$正是（3.67）式定义的能量、动量矢量．因为$G(t)$是一个守恒量，故$P_\mu(t)$也是守恒量：

$$P_\mu(t_1)=P_\mu(t_2). \tag{3.72}$$

（3.66）$a$和（3.72）分别是场的能量、动量守恒定律的微分形式和积分形式．

在这一小节，我们把Noether定理应用于场的时、空平移对称性，得到了场的能量、动量守恒定律．场的运动规律不因时、空坐标原点的平移而变化，这反映了时间、空间的均匀性．因此，可以把时、空均匀性解释为能量、动量守恒定律的更深一层的物理原因．

### （四）正Lorentz不变性与角动量守恒定律

正Lorentz变换是指行列式为"＋1"的Lorentz变换．如第一章所述，它相当于四维时空的转动变换：

$$x'_\mu=a_{\mu\nu}x_\nu.$$

为简单起见，仍只考虑无穷小变换

$$x'_\mu=x_\mu+\omega_{\mu\nu}x_\nu. \tag{3.73}$$

在变换（3.73）之下，场函数经受如下变换：

$$\phi'_A(x')=\phi_A(x)+\frac{i}{2}\sum_{B=1}^{N}\omega_{\rho\sigma}(\mathscr{S}_{\rho\sigma})_{AB}\phi_B(x). \tag{3.74}$$

式中，$\mathscr{S}_{\mu\nu}$称为自旋张量．在旋量场情形下，$\mathscr{S}_{\mu\nu}$由（1.121）式定义，而（3.74）式便是下式：

$$\psi'_\mu(x')=\psi_\mu(x)+\frac{i}{4}\omega_{\rho\sigma}(S_{\rho\sigma})_{\mu\nu}\psi_\nu(x)$$

这是在第一章里已得到的结果，其中的$S_{\rho\sigma}$由（1.50）式确定．在电磁场的情形下，$\mathscr{S}_{\mu\nu}$的空间分量$\mathscr{S}_{jk}$分别是（1.276）式的自旋矩阵，而（3.74）式便是四矢$A_\mu$的Lorentz变换式：

$$A'_\mu(x')=A_\mu(x)+\omega_{\mu\nu}A_\nu(x).$$

而在标量场的情形下，（3.74）便是熟知的（1.13）式．因而对标量场而言，$\mathscr{S}_{\mu\nu}=0$，亦即标量粒子自旋为零．

现在，我们要从正 Lorentz 不变性出发，导出场的角动量守恒定律．利用（3.73）和（3.74），并略去二阶以上小量可得

$$\begin{aligned}\delta\phi_A(x)&=\phi'_A(x)-\phi_A(x)\\&=-\omega_{\mu\nu}x_\nu\partial_\mu\phi_A(x)+\frac{i}{2}\sum_B\omega_{\rho\sigma}(\mathscr{S}_{\rho\sigma})_{AB}\phi_B(x.)\end{aligned} \tag{3.75}$$

把此式代入(3.58)$b$得到

$$f_\mu=\mathscr{L}\omega_{\mu\nu}x_\nu-\omega_{\rho\sigma}x_\sigma\sum_A\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_A)}\partial_\rho\phi_A$$

$$+\frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}\sum_{AB}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_A)}(\mathscr{S}_{\rho\sigma})_{AB}\phi_B,$$

将右边第一项作如下变化：

$$\mathscr{L}\omega_{\mu\nu}x_\nu=\mathscr{L}\omega_{\mu\sigma}x_\sigma=\mathscr{L}\delta_{\mu\rho}\omega_{\rho\sigma}x_\sigma,$$

并利用能量、动量张量的定义(3.66)$b$可得

$$f_\mu=\omega_{\rho\sigma}x_\sigma T_{\mu\rho}+\frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}\sum_{AB}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_A)}(\mathscr{S}_{\rho\sigma})_{AB}\phi_B, \tag{3.76}$$

又因

$$\omega_{\rho\sigma}x_\sigma T_{\mu\rho}=\frac{1}{2}\omega_{\sigma\rho}(x_\rho T_{\mu\sigma}-x_\sigma T_{\mu\rho}) \tag{3.77}$$

故

$$f_\mu=\frac{1}{2}\omega_{\sigma\rho}\left\{x_\rho T_{\mu\sigma}-x_\sigma T_{\mu\rho}-i\sum_{AB}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_A)}(\mathscr{S}_{\rho\sigma})_{AB}\phi_B\right\}, \tag{3.78}$$

将（3.78）代入(3.58)$a$，并注意$\omega_{\sigma\rho}$是一些无穷小参数，就得到如下的微分守恒定律：

$$\partial_\mu\mu_{\rho\sigma,\mu}=0, \qquad (3.79)a$$

其中

$$\mu_{\rho\sigma,\mu}=x_\rho T_{\mu\sigma}-x_\sigma T_{\mu\rho}-i\sum_{AB}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_A)}(\mathscr{S}_{\rho\sigma})_{AB}\phi_B \qquad (3.79)b$$

是一个三秩部分反对称张量，它对指标$\rho\sigma$是反对称的：

$$\mu_{\rho\sigma,\mu}=-\mu_{\sigma\rho,\mu}.$$

为了弄清$\mu_{\rho\sigma,\mu}$的物理内容，先来考察如下的积分：

$$M_{\rho\sigma}\equiv\int_V(-i\mu_{\rho\sigma,4})d^3x. \tag{3.80}$$

当$\rho\neq\sigma\neq4$时，我们有

$$M_{jk}=\int_V(-i\mu_{jk,4})d^3x$$

$$=\int_V\left[x_j(-iT_{4k})-x_k(-iT_{4j})-i\sum_{AB}\pi_A(\mathscr{S}_{jk})_{AB}\phi_B\right]d^3x. \tag{3.81}$$

按照（3.70)$b$，可将$x_j(-iT_{4k})-x_k(-iT_{4j})$解释为场的轨道角动量密度矢量之第$l$分量：

$$x_j(-iT_{4k})-x_k(-iT_{4j})=x_jp_k-x_kp_j=L_l,$$

（$jkl$取123的偶排列。）

另一方面，$\mathscr{S}_{\mu\nu}$是自旋张量，它的空间分量$\mathscr{S}_{jk}$便是量子力学意义下的自旋算符。因此，又可把（3.81）右边积分号下的第三项解释为场的自旋角动量密度矢量的第 $l$ 分量．相应地，

$$\mu_l = x_j(-iT_{4k}) - x_k(-iT_{4j}) - i\sum_{AB}\pi_A(\mathscr{S}_{jk})_{AB}\phi_B \equiv \mu_{jk} \quad (3.82)$$

就是场的总角动量密度矢量的第 $l$ 分量，而

$$M_{jk} = \int_V \mu_{jk} d^3x = M_l, \quad (jkl\text{取123的偶排列}) \quad (3.83)$$

就是场的总角动量矢量的第 $l$ 分量．由此可见，张量$\mu_{\rho\sigma,\mu}$的分量通过下式与场的总角动量密度矢量相互联系：

$$\mu_{jk,4} = i\mu_l. \quad (jkl\text{取123的偶排列}) \quad (3.84)$$

因而我们称$\mu_{\rho\sigma,\mu}$为场的总角动量密度张量．而（3.79）$a$式便是微分形式的角动量守恒定律．但应注意，仅当$\rho \neq \sigma \neq 4$，且指标$\mu = 4$时，（3.79）$a$才真正具有角动量守恒的含义。

此外，把（3.75）代入（3.61），并注意：

$$-i\mathscr{L}(x)\delta_{4\mu} - \sum_A \pi_A \partial_\mu \phi_A = -iT_{4\mu},$$

$$\omega_{\mu\nu}x_\nu(-iT_{4\mu}) = \frac{1}{2}\omega_{\nu\mu}[x_\mu(-iT_{4\nu}) - x_\nu(-iT_{4\mu})],$$

就得到守恒量$G(t)$：

$$G(t) = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}M_{\mu\nu}(t) \quad (3.85)a$$

其中，

$$M_{\mu\nu} = \int_V \Big(x_\mu(-iT_{4\nu}) - x_\nu(-iT_{4\mu}) - i\sum_{AB}\pi_A(\mathscr{S}_{\mu\nu})_{AB}\phi_B\Big)d^3x \quad (3.85)b$$

正是（3.80）式所定义的反对称张量$M_{\rho\sigma}$。前已述及，它的空间分量$M_{jk}$给出场的总角动量分量．因此，我们称$M_{\mu\nu}$为场的总角动量张量，并有积分形式的角动量守恒定律：

$$M_{\mu\nu}(t_1) = M_{\mu\nu}(t_2). \quad (3.86)$$

但应注意，仅当$\mu \neq \nu \neq 4$时，$M_{\mu\nu}$才给出场的角动量分量．而（3.86）也才真正是积分形式的角动量守恒定律．在（3.86）式里，同时给出$M_{j4}$和$M_{4j}$也是守恒量．但这些分量没有物理意义，而且它们明显地依赖于时间，所以它们的守恒定律没有意义。

综上所述，我们从理论的正 Lorentz 不变性出发导出了场的角动量守恒定律．而正 Lorentz 变换即是四维时、空的转动．场的运动规律在这种转动变换下具有不变性，这就表明时、空在不同方向上具有相同的属性，称为时、空的各向同性．因此，可以把时、空的各向同性解释为角动量守恒定律的更深一层的物理原因．

## （五）整体规范不变性与荷、流守恒定律

规范不变性或规范对称性是一种内部对称性．在这种对称变换之下，如果场的

Lagrange函数密度保持不变，则按Noether定理，这将导致某一物理量的守恒定律。在场论里，最简单的规范变换是如下的相位变换：〔注1〕

$$\phi_A'(x)=e^{+i\alpha}\phi_A(x),$$
$$\phi_A^{*\prime}(x)=e^{-i\alpha}\phi_A^*(x). \tag{3.87}$$

显然，变换（3.87）不是由于时、空坐标的变换引起的，而纯粹是场函数的主动变换。另方面，$c$ 数相角 $\alpha$（实数）是一个与时、空坐标无关的常数，因而（3.87）是所有时空点的场函数值所经受的步调一致的变换，称为**整体规范变换**。场的运动规律在整体规范变换下的不变性称为**整体规范不变性**或**整体规范对称性**。

**微分守恒定律** 考虑无穷小的规范变换($\alpha\to 0$)

$$\phi_A'(x)=\phi_A(x)+i\alpha\phi_A(x),$$
$$\phi_A^{*\prime}(x)=\phi_A^*(x)-i\alpha\phi_A^*(x). \tag{3.88}$$

由此式显然有：

$$\delta\phi_A(x)=i\alpha\phi_A(x) \tag{3.89a}$$

$$\delta\phi_A^*(x)=-i\alpha\phi_A^*(x), \tag{3.89b}$$

和

$$\delta(\partial_\mu\phi_A(x))=i\alpha\partial_\mu\phi_A(x), \tag{3.90a}$$

$$\delta(\partial_\mu\phi_A^*(x))=-i\alpha\partial_\mu\phi_A^*(x). \tag{3.90b}$$

对于自由运动的场，在整体规范变换下恒有 $\delta\mathscr{L}=0$ 因此，

$$0=\delta\mathscr{L}=\sum_A\Big(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_A}\delta\phi_A+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_A)}\delta(\partial_\mu\phi_A)$$
$$+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_A^*}\delta\phi_A^*+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_A^*)}\delta(\partial_\mu\phi_A^*)\Big),$$

利用Euler-Lagrange方程式以及（3.89）、（3.90）式可将上式简化为：

$$0=\delta\mathscr{L}=i\alpha\partial_\mu\sum_A\Big(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_A)}\phi_A-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_A^*)}\phi_A^*\Big). \tag{3.91}$$

令

$$J_\mu=-i\sum_A\Big(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_A)}\phi_A-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_A^*)}\phi_A^*\Big) \tag{3.92}$$

就可由（3.91）得到如下的微分守恒定律：

$$\partial_\mu(-\alpha J_\mu)=0. \tag{3.93}$$

其中，$J_\mu$是一个守恒矢量流。

〔注1〕 变换（3.87）的全体构成一维幺正群，记为$U(1)$。在场论里，$U(1)$群是最简单的规范群。

**积分守恒定律**：现在要找出与（3.93）式相关的守恒量．为此，把 $-\alpha J_\mu$ 的时间分量沿空间区域 $V$ 做积分：

$$-\alpha Q \equiv -\alpha \int_V (-iJ_4) d^3x$$

$$= -\alpha \int_V \left[ -i\sum_A{}'(\pi_A \phi_A - \pi_A^* \phi_A^*) \right] d^3x. \qquad (3.94)$$

$-\alpha Q(t)$ 便是所要找的守恒量．为了看出这一点，把（3.93）式重写为

$$\frac{\partial}{\partial t}(-\alpha\rho) + \nabla\cdot(-\alpha \mathbf{J}) = 0,$$

其中，$\rho = -iJ_4$，再将上式对三维空间区域 $V$ 做积分，并注意到场在 $V$ 的界面上满足周期边界条件，就得到积分形式的守恒定律：

$$\frac{\partial}{\partial t}[-\alpha Q(t)] = 0. \qquad (3.95)$$

由于 $\alpha$ 是一个常数参数，所以可将（3.93）和（3.95）分别简化为：

$$\partial_\mu J_\mu = 0, \qquad (3.96)a$$

$$\frac{\partial}{\partial t}Q(t) = 0. \qquad (3.96)b$$

$J_\mu$ 和 $Q(t)$ 都是物理量．前者称为场的广义流密度矢量，后者称为场的广义守恒荷．由（3.94）易得：

$$Q(t) = \int_V (-iJ_4) d^3x$$

$$= -i\sum_A{}' \int_V (\pi_A \phi_A - \pi_A^* \phi_A^*) d^3x, \qquad (3.97)$$

守恒荷 $Q$ 可以代表某种粒子、反粒子的数目以及奇异数等等．特别地，如果以粒子电荷 $e$ 乘（3.92）式，就得到场的四维电流、电荷密度矢量 $eJ_\mu$．而这时，$eQ$ 便是场的总电荷，相应地，我们有以下的电荷守恒定律：

$$\partial_\mu(eJ_\mu) = 0, \qquad (3.98)a$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[eQ(t)] = 0. \qquad (3.98)b$$

应当注意的是，整体规范不变性只对复场才有意义，对于实场，$\phi_A^* = \phi_A$，$U(1)$ 群的变换只是使Lagrange函数密度乘以某个常数相因子，因而不可能得到任何物理结果．

## （六）场的主动变换的生成元

**生成元**

在（三）——（五）三个小节里，分别讨论了时、空平移对称性，时、空转动对称性

以及整体规范对称性．与这些对称性相应的守恒量分别是：

$$G(t)=\varepsilon_\mu P_\mu(t), \tag{3.99a}$$

$$G(t)=-\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}M_{\mu\nu}(t), \tag{3.99b}$$

$$-\alpha Q(t). \tag{3.99c}$$

所有这些守恒量分别称为在相应对称变换下，场的主动变换的生成元．这是因为在每种情况下，场的主动变分

$$\delta\phi_A=\phi'_A(x)-\phi_A(x)$$

是由$\phi_A(x)$与相应守恒量的等时 Poisson 括号“生成”的．即对于时、空对称变换的情形，

$$\delta\phi_A=[\phi_A(\mathbf{x},t),G(t)]_{PB}, \tag{3.100a}$$

$$\delta\pi_A=[\pi_A(\mathbf{x},t),G(t)]_{PB}. \tag{3.100b}$$

其中，$G(t)=\varepsilon_\mu P_\mu-\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}M_{\mu\nu}$；对于整体规范变换的情形，

$$\delta\phi_A=[\phi_A(\mathbf{x},t),-\alpha Q(t)]_{PB}, \tag{3.101a}$$

$$\delta\pi_A=[\pi_A(\mathbf{x},t),-\alpha Q(t)]_{PB}. \tag{3.101b}$$

在这里，生成元的定义与它的群论定义是不同的．因为按照群论，在时、空对称变换（时空转动加平移）之下，场的主动变换的生成元是$\hat{k}_\mu$和$\frac{1}{2}(x_\mu\hat{k}_\nu-x_\nu\hat{k}_\mu+\hat{\mathscr{S}}_{\mu\nu})$：

$$\{\phi'_A(x)\}=e^{-i\varepsilon_\mu\hat{k}_\mu+i\omega_{\mu\nu}\frac{1}{2}(x_\mu\hat{k}_\nu-x_\nu\hat{k}_\mu+\hat{\mathscr{S}}_{\mu\nu})}\{\phi_A(x)\}. \tag{3.102}$$

但是，当把场进行二次量子化之后，以上的差异就基本上消失了（见第五章及其以后各章）．

(3.100)和 (3.101) 右边的[ ]$_{PB}$是泛函Poisson括号．因而为了证明这些等式，需要用到泛函导数的有关知识．

**泛函导数**

假定$g(x)$是某个函数集合$D$中的元素，则

$$F[g(x)]=F_\omega(g)=\int dyK(x,y)g(y) \tag{3.103}$$

就是$g(x)$的线性泛函．泛函$F_\omega(g)$是一个因变数，它的值依赖于变元$g(x)$．它的定义域便是函数集合$D$．线性泛函$F_\omega(g)$满足以下诸条件：

$$\alpha F_\omega(g)=F_\omega(\alpha g), \tag{3.104a}$$

$$F_\omega(\alpha g_1+\beta g_2)=\alpha F_\omega(g_1)+\beta F_\omega(g_2), \tag{3.104b}$$

$$(F_x^{(1)}+F_x^{(2)})(g)=F_x^{(1)}(g)+F_x^{(2)}(g). \quad (3.104)c$$

($\alpha,\beta$是任意的数)

除了一个变元的泛函以外，还可以有多个变元的泛函．例如量子力学的平均值

$$\langle\hat{F}\rangle=\int\overline{\Psi}^*(x)\hat{F}\overline{\Psi}(x)dx$$

便是一个二元泛函，它的定义域是Hilbert空间．当泛函的定义域便是参数（参数即是$x$）空间时，泛函就退化为一个通常的函数．因此，泛函概念是函数概念的拓广．

现在，我们就从普通函数的导数概念拓广到泛函导数的概念．函数$f(x)$对$x$的导数由下式定义：

$$\frac{df(x)}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

类似地，$F_x(g)$对变元$g(x)$的泛函导数由下式定义：

$$\frac{\delta F_x(g)}{\delta g(y)}=\lim_{\in(y)\to 0}\frac{F[g(x)+\in(y)]-F[g(x)]}{\in(y)} \quad (3.105)$$

$\frac{\delta F_x(g)}{\delta g(y)}$是泛函$F_x(g)$对其变元函数$g$在$y$点之值的导数．$\in(y)$是变元函数在$y$点之值的改变量，它满足以下条件：

当$z=y$时，有$\in(z)\to 0$，$\in(z)\neq 0$

当$z\neq y$时，$\in(z)\equiv 0$，

因此，在积分号下应将$\in(y)$表示为$\in(z)\delta(y-z)$．这样就有

$$\frac{\delta F_x(g)}{\delta g(y)}=\lim_{\in\to 0}\frac{1}{\in(y)}\int dzK(x,z)[g(z)+\in(z)\delta(y-z)-g(z)]$$
$$=K(x,y). \quad (3.106)$$

在此式的推算里我们曾使用了线性性质 (3.104)$b$．

特别地，当$F_x(g)=g$时，我们有

$$g(x)=\int dy\delta(x-y)g(y) \quad (3.107)a$$

和

$$\frac{\delta g(x)}{\delta g(y)}=\delta'(x-y). \quad (3.107)b$$

把公式 (3.107)应用于$\phi_A(\mathbf{x},t)$及其共轭场$\pi_A(\mathbf{x},t)$，得到：

$$\frac{\delta\phi_A(\mathbf{x},t)}{\delta\phi_B(\mathbf{y},t)}=\frac{\delta\pi_A(\mathbf{x},t)}{\delta\pi_B(\mathbf{y},t)}=\delta_{AB}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \quad (3.108)a$$

$$\frac{\delta\phi_A(\mathbf{x},t)}{\delta\pi_B(\mathbf{y},t)}=\frac{\delta\pi_A(\mathbf{x},t)}{\delta\phi_B(\mathbf{y},t)}=0. \quad (3.108)b$$

其中，$\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})=\delta(x_1-y_1)\delta(x_2-y_2)\delta(x_3-y_3)$.

**等式（3.100）和（3.101）的证明**

泛函Poisson括号与普通的Poisson括号不同之处在于：前者要以泛函导数代替后者的普通导数并对参数x进行积分．如果$F$和$G$都是$\phi_A$、$\pi_A$的二元泛函，则由它们构成的泛函Poisson括号为：

$$[F,G]_{PB}=\sum_{A=1}^{N}\int_V\left(\frac{\delta F}{\delta\phi_A(\mathbf{x},t)}\frac{\delta G}{\delta\pi_A(\mathbf{x},t)}-\frac{\delta G}{\delta\phi_A(\mathbf{x},t)}\frac{\delta F}{\delta\pi_A(\mathbf{x},t)}\right)d^3x. \quad (3.109)$$

现在，我们就时、空转动的情形来证明（3.100）$a$式：

$$[\phi_A(\mathbf{x},t),G(t)]_{PB}=\sum_C\int_V\left\{\frac{\delta\phi_A(\mathbf{x},t)}{\delta\phi_C(\mathbf{z},t)}\frac{\delta G(t)}{\delta\pi_C(\mathbf{z},t)}-\frac{\delta G(t)}{\delta\phi_C(\mathbf{z},t)}\frac{\delta\phi_A(\mathbf{x},t)}{\delta\pi_C(\mathbf{z},t)}\right\}d^3z=\frac{\delta G(t)}{\delta\pi_A(\mathbf{x},t)}, \quad (3.110)$$

注意到（3.66）$b$式和（3.85）式可得

$$\begin{aligned}
[\phi_A(\mathbf{x},t),G(t)]_{PB}&=\frac{\delta G(t)}{\delta\pi_A(\mathbf{x},t)}=-\frac{\omega_{\mu\nu}}{2}\int_V d^3y\left[y_\mu\left[-i\frac{\delta T_{4\nu}}{\delta\pi_A(\mathbf{x},t)}\right]\right.\\
&\left.-y_\nu\left[-i\frac{\delta T_{4\mu}}{\delta\pi_A(\mathbf{x},t)}\right]-i\sum_{BC}\frac{\delta\pi_B(\mathbf{y},t)}{\delta\pi_A(\mathbf{x},t)}(\mathscr{S}_{\mu\nu})_{BC}\phi_C(\mathbf{y},t)\right]\\
&=-\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\left[x_\mu[-\partial_\nu\phi_A(\mathbf{x},t)]-x_\nu[-\partial_\mu\phi_A(\mathbf{x},t)]\right.\\
&\left.-i\sum_C(\mathscr{S}_{\mu\nu})_{AC}\phi_C(\mathbf{x},t)\right]\\
&=-\delta x_\mu\partial_\mu\phi_A(\mathbf{x},t)+\frac{i}{2}\sum_C\omega_{\mu\nu}(\mathscr{S}_{\mu\nu})_{AC}\phi_C(\mathbf{x},t)\\
&=\delta\phi_A(\mathbf{x},t).
\end{aligned}$$

这就是（3.100）$a$式，在推算中，我们曾使用了（3.75）、（3.108）和（3.73）式．

为了证明（3.100）$b$式，可分别对不同的场来进行推证．例如对于实标量场和电磁场．考虑到$\dot{G}(t)=0$，$\dot{\phi}_A=\pi_A$，便可对（3.100）$a$求时间导数而得到（3.100）$b$，而对旋量场，注意到$G^*=G$，便可对（3.100）$a$取厄米共轭而得到（3.100）$b$．

其次，再来证明（3.101）$a$式．注意到（3.94）式，可得：

$$\begin{aligned}
[\phi_A(\mathbf{x},t),-\alpha Q(t)]_{PB}&=\sum_B\int_V\left(\frac{\delta\phi_A(\mathbf{x},t)}{\delta\phi_B(\mathbf{y},t)}\frac{\delta(-\alpha Q)}{\delta\pi_B(\mathbf{y},t)}\right.\\
&\left.-\frac{\delta(-\alpha Q)}{\delta\phi_B(\mathbf{y},t)}\frac{\delta\phi_A(\mathbf{x},t)}{\delta\pi_B(\mathbf{y},t)}\right)d^3y=\frac{\delta(-\alpha Q)}{\delta\pi_A(\mathbf{x},t)}\\
&=i\alpha\phi_A(\mathbf{x},t)=\delta\phi_A(\mathbf{x},t).
\end{aligned}$$

在上式的证明里曾用了（3.89）$a$式．由（3.101）$a$极易得到（3.101）$b$．对于时、空平移变换的情形，读者可自行证明．

**Noether定理的另一表述**

公式（3.100）和（3.101）使我们能够把Noether定理重新表述如下：**在每种连续对称变换下，场的主动变换的生成元是一个运动恒量．而且该运动恒量分别与某一守恒物理量相联系，如$G(t)=\varepsilon_\mu P_\mu$与场的能量、动量相联系，$-\alpha Q(t)$与场的某种守恒荷相互联系，等等．**

应当注意的是，我们这里指的是场的主动变换．在被动变换的情形下，读者可自行讨论并得出相应的结论．

到此为止，我们可以结束§4的讨论了．在这一节里讨论的时、空平移对称性和时、空转动对称性都是普遍成立的对称性．因此，能量、动量守恒定律是自然界的普遍定律[注1]．至于整体规范对称性，如前所述，它可导致Fermi子的粒子数守恒定律和电荷守恒定律，这些守恒定律也是普遍成立的．还有一些守恒定律，如同位旋守恒、奇异数守恒等等，就不具有普遍性．守恒定律是自然界本身的法则．各种各样的对称性也是自然界固有的属性．我们这里只是从理论上来反映这些法则和属性．人们不能随心所欲地去设想一些奇奇怪怪的"对称性"，虚构一些在自然界里并不存在的"守恒定律"．

## 习　题

（1）直接以$\phi(x)$和$\phi^*(x)$作为独立的场变量，推出复标量场的Lagrange函数密度（3.33）．

（2）利用旋量场的Lagrange函数密度为零的事实，使用尽可能简单的方法导出（3.40）式．

（3）试从以下两点要求出发，用不同于本章的方法构造实标量场和电磁场的Lagrange函数密度．

（$a$）$\mathscr{L}(x)$必须是一个Lorentz标量函数，

（$b$）Euler-Lagrange方程式应能导致场方程式．

（其中，电磁场的方程是（1.250））．

（4）在（3.38）式里包含对$\psi(x)$的导数，但不含有对$\overline{\psi}(x)$的导数，试用类似推导（3.38）式的方法重新寻找旋量场的Lagrange函数密度，使之对$\psi(x)$和$\overline{\psi}(x)$是完全对称的．

（5）就时空平移对称性的情形证明$G'(t)=G(t)$．

（6）根据场的Lagrange函数密度在无穷小时空平移变换下不变之事实，即

$$\mathscr{L}'(x')=\mathscr{L}(x)$$

导出微分形式的能量、动量守恒定律．

$$\partial_\nu T_{\mu\nu}=0\,.$$

*（7）时空平移对称性反映了时空的均匀性．为什么时空是均匀的，场系统的能量、动量就是守

---

〔注1〕严格地说：我们至今未发现这些守恒定律被破坏的实例．物质世界具有质的无限性．物质形态、能量形式是无限多样的．也许终有一日，人们会发现目前这种意义下的能量、动量守恒定律仍然是有条件地成立的．

恒量？你对此如何理解？

（8）就时空平移变换的情形证明等式（3.100）．

（9）利用上题的结果推出以下等式：

$$\partial_\mu \phi_A(x) = [\phi_A(x), P_\mu]_{PB}.$$

（10）另外找一种你认为更简洁的方法推导（3.55）$a$式。

# 第四章　自由场的正则量子化方法

上一章曾讨论了经典场的运动．在这一章里，我们从第二点基本假设出发来讨论场的正则量子化．虽然，在第二章一开始就讨论过电磁场和 $\psi$ 场的量子化．而且所使用的方法就是正则量子化方法，但在那里，我们着重于讨论量子场论的物理思想，而未考虑数学形式的标准化．在这一章里，我们就来介绍场的正则量子化的标准方法．

所谓正则量子化，就是把经典物理学体系的正则坐标和正则共轭动量代之以相应的算符，并建立起这些算符之间的一定的对易或反对易关系（即量子化条件）．这样，就把经典量过渡到相应的算符．与此同时，经典体系的正则方程式就过渡到量子体系的正则方程式．量子化条件与量子正则运动方程式便是量子理论的基本方程式和关系式．量子体系的态函数便是Hilbert空间的矢量．这个抽象的矢量空间也就是量子理论的算符的定义空间．

## §1　粒子的正则量子化

如第二章所述，场的量子化（即二次量子化），是粒子的量子化（即一次量子化）向波动领域的推广．因此，为了讨论场的正则量子化，首先来回忆一下粒子的正则量子化．

对于 $n$ 个自由度的自由粒子体系，将其正则坐标$q_\alpha$和正则共轭动量$p_\alpha$作如下的算符对应．

$$q_\alpha \text{——} \hat{q}_\alpha, \qquad p_\alpha \text{——} \hat{p}_\alpha = -i\frac{\partial}{\partial q_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2 \cdots\cdots n \qquad (4.1)a$$

同时将体系的能量$E$作以下算符对应：

$$E \text{——} i\frac{\partial}{\partial t}. \qquad (4.1)b$$

假定体系的态函数为$\psi(q_\alpha, t)$，并假定$\hat{q}_\alpha$，$\hat{p}_\alpha$满足如下对易关系（即量子化条件）：

$$[\hat{q}_\alpha, \hat{p}_\beta] = i\delta_{\alpha\beta}, \qquad (4.2)a$$

$$[\hat{q}_\alpha, \hat{q}_\beta] = [\hat{p}_\alpha, \hat{p}_\beta] = 0. \qquad (4.2)b$$

把算符对应关系（4.1）应用于经典关系

$$\mathrm{H}(q_\alpha, p_\alpha) = E,$$

再将所得算符等式作用于$\psi(q_\alpha, t)$，就得到量子体系的Schrödinger方程式

$$\hat{H}(\hat{q}_\alpha, \hat{p}_\alpha)\psi(q_\alpha, t) = i\frac{\partial}{\partial t}\psi(q_\alpha, t). \tag{4.3}$$

从（4.2）式看到，量子对易括号［ ］均为$c$数．把（4.2）与（3.8）比较，就得到量子对易括号与经典Poisson括号之间的如下对应关系：

$$[\hat{A}, \hat{B}] \Longleftarrow i[A, B]_{PB}. \tag{4.4}$$

方程（4.3）是在Schrödinger图景（$s$图景）里建立起来的[注1]，在该图景里，算符与时间无关，量子体系在时间中的运动由波函数$\psi$随时间的变化来描写．但是从第二章看到，自由量子场论是在Heisenberg图景（$h$图景）里建立起来的．在$h$图景里，态函数与时间无关，量子体系在时间中的运动通过算符随时间的变化来描写．为了便于类比，我们把方程（4.2）、(4.3)和（4.4）转到$h$图景．为此，用上标"$s$"和"$h$"分别表示$s$、$h$两种图景里的量．根据量子力学，两种图景之间由下述变换相互联系：

$$\psi^s = e^{-i\hat{H}t}\psi^h, \tag{4.5a}$$

$$\hat{Q}^s = e^{-i\hat{H}t}\hat{Q}^h e^{i\hat{H}t} \tag{4.5b}$$

把（4.5）$b$对$t$求导，就得到$h$图景里的量子运动方程式

$$\frac{d\hat{Q}^h(t)}{dt} = \frac{1}{i}[\hat{Q}^h(t), \hat{H}] \tag{4.6}$$

特别地，对于算符$\hat{q}^h_\alpha(t)$和$\hat{p}^h_\alpha(t)$我们得到（3.6）式的量子力学类似：

$$\frac{d\hat{q}^h_\alpha(t)}{dt} = \frac{\partial\hat{H}}{\partial\hat{p}^h_\alpha(t)} = \frac{1}{i}[\hat{q}^h_\alpha(t), \hat{H}], \tag{4.7a}$$

$$\frac{d\hat{p}^h_\alpha(t)}{dt} = -\frac{\partial\hat{H}}{\partial\hat{q}^h_\alpha(t)} = \frac{1}{i}[\hat{p}^h_\alpha(t), \hat{H}]. \tag{4.7b}$$

假定$\hat{Q}^s$、$\hat{R}^s$是$s$图景里的两个任意的力学量算符，$\hat{Q}^h$、$\hat{R}^h$是$h$图景里的相应算符，则利用（4.5）$b$不难证明：

$$[\hat{Q}^h, \hat{R}^h] = [\hat{Q}^s, \hat{R}^s]. \tag{4.8}$$

因此，与（4.2）对应地有

$$[\hat{q}^h_\alpha(t), \hat{p}^h_\beta(t)] = i\delta_{\alpha\beta}, \tag{4.9a}$$

［注1］ 我们应当把"Picture"（图景，绘景）一词与"Representation"（表象，表示）一词区别开来．

$$[\hat{q}_\alpha^h(t), \hat{q}_\beta^h(t)] = [\hat{p}_\alpha^h(t), \hat{p}_\beta^h(t)] = 0. \tag{4.9b}$$

与（4.4）对应地有

$$[\hat{A}^h(t), \hat{B}^h(t)] \Longleftarrow i\,[A, B]_{PB} \tag{4.10}$$

## §2 经典场的近似处理

在第三章§2里已用严格的数学方法导出经典场的运动方程式．那么，还有什么必要进行这一节的讨论呢？为了看出这一点，只需把（3.21）与（3.3）比较，（3.25）与（3.6）比较，就可看到，两两相差很大．产生这种差别的原因是：场作为不可数无限自由度的体系与一个通常的多自由度体系是根本不同的．但是这种差别正好说明，我们不能把一次量子化方法简单地搬过来用于经典场的量子化．而必须将一次量子化推广为二次量子化．如第二章所述，这种推广包含着物理思想和概念的变革．为了适应上述推广之需要，我们首先把连续的、不可数无限自由度的场近似为间断的、可数有限自由度的体系．然后类比于本章§1的方法对这个体系进行量子化．最后再在连续极限下获得场的正则量子化的严格方案．在这一节里，首先把场近似为一个多自由度的体系．

从数学上看，场赖以存在的空间区域$V$是一个连续的无限点集．现在，把$V$划分成可数的有限个小区域，其中第$l$个小区域的体积为$\delta V_l$（$l=1, 2, \cdots\cdots f$）．在任意时刻，所有小区域内的运动状态便确定了场在该时刻的状态．在第$l$个小区域内场函数$\phi_A(\mathbf{x}, t)$的空间平均值为

$$\phi_A^l(t) = \frac{1}{\delta V_l}\int_{\delta V_l} \phi_A(\mathbf{x}, t)\,d^3x, \tag{4.11a}$$

相应地，$\dot{\phi}_A(\mathbf{x}, t)$的平均值为

$$\dot{\phi}_A^l(t) = \frac{1}{\delta V_l}\int_{\delta V_l} \dot{\phi}_A(\mathbf{x}, t)\,d^3x. \tag{4.11b}$$

只要小区域的数目$f$足够大，而且每个小区域的体积充分地小，就可以足够精确地用所有$\phi_A^l(t)$及其时间导数$\dot{\phi}_A^l(t)$来确定场的运动状态[注1]．因此，可把$\phi_A^l(t)$和$\dot{\phi}_A^l(t)$视为场的广义坐标和广义动量．至此，经典场就被近似为可数有限自由度的体系．场的Lagrange函数$\overline{L}$是其广义坐标$\phi_A^l(t)$和广义动量$\dot{\phi}_A^l(t)$的函数[注2]：

$$\overline{L} = \overline{L}[\phi_A^l(t), \dot{\phi}_A^l(t)]. \quad l = 1, 2, \cdots\cdots f; \tag{4.12}$$

---

〔注1〕 为了叙述的方便，在进行近似处理以后，仍使用"场"这一术语．但应注意，间断的，可数有限自由度的体系只是场的一种近似模型．

〔注2〕 为了区别于连续情形下精确的$L$和H，在间断近似下把场的Lagrange函数和Hamilton函数分别记为$\overline{L}$和$\overline{H}$．

现在，使用和推导（3.3）式完全类似的方法，可以导出场的 Euler-Lagrange 方程组为

$$\frac{\partial \overline{L}}{\partial \phi_A^l}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \overline{L}}{\partial \dot{\phi}_A^l}\right)=0. \tag{4.13}$$

$$l=1,2,\cdots\cdots f;\quad A=1,2,\cdots\cdots N$$

假定在第 $l$ 个小区域的中点，Lagrange函数密度$\mathscr{L}$之值为$\mathscr{L}_l$：

$$\mathscr{L}_l=\mathscr{L}_l[\phi_A^l(t),\dot{\phi}_A^l(t),\phi_A^{l\pm l'}(t),\cdots\cdots], \tag{4.14a}$$

这个值就可以看作是第 $l$ 个小区域内Lagrange函数密度之平均值。(4.14)$a$式右边出现相邻小区域的平均场$\phi_A^{l\pm l'}(t)$，这是因为连续情形下的梯度值$\nabla\phi_A(x,t)$，在间断近似下要由相邻两个小区域的差值$\phi_A^{l\pm l'}-\phi_A^l$决定。在引入平均密度$\mathscr{L}_l$之后，场的 Lagrange 函数又可表为下式：

$$\overline{L}=\sum_l^f \delta V_l \mathscr{L}_l. \tag{4.14b}$$

类似于质点力学的Legendre变换（3.5），可用下式来定义场的Hamilton函数$\overline{\mathrm{H}}$：

$$\overline{\mathrm{H}}[\phi_A^l(t),p_A^l(t)]=\sum_l^f\sum_A^N p_A^l(t)\dot{\phi}_A^l(t)-\overline{L}[\phi_B^n(t),\dot{\phi}_B^n(t)], \tag{4.15}$$

其中，$n=1,2,\cdots\cdots f$，$p_A^l(t)$是与正则坐标$\phi_A^l(t)$共轭的正则动量。它由下式定义：

$$p_A^l(t)=\frac{\partial \overline{L}}{\partial \dot{\phi}_A^l(t)} \tag{4.16}$$

完全类比于粒子系的正则方程组（3.6），可直接写出场的正则方程组如下：

$$\dot{\phi}_A^l(t)=\frac{\partial \overline{\mathrm{H}}}{\partial p_A^l(t)}=[\phi_A^l(t),\overline{\mathrm{H}}]_{PB}, \tag{4.17a}$$

$$\dot{p}_A^l(t)=-\frac{\partial \overline{\mathrm{H}}}{\partial \phi_A^l(t)}=[p_A^l(t),\overline{\mathrm{H}}]_{PB}. \tag{4.17b}$$

$$l=1,2,\cdots\cdots f;\ A=1,2,\cdots\cdots N$$

把（4.14)$b$代入（4.16)，并注意到$\mathscr{L}_k$只含有$\phi_A^k(t)$和$\dot{\phi}_A^k(t)\cdots\cdots$，就得到

$$p_A^l(t)=\pi_A^l(t)\delta V_l, \tag{4.18}$$

其中，

$$\pi_A^l(t)=\frac{\partial \mathscr{L}_l}{\partial \dot{\phi}_A^l(t)} \tag{4.19}$$

再把（4.14）、（4.18）代入（4.15），又得到

$$\overline{\mathrm{H}}=\sum_l^f \delta V_l\left(\sum_A^N \pi_A^l(t)\dot{\phi}_A^l(t)-\mathscr{L}_l\right) \tag{4.20}$$

我们看到，在间断自由度的近似下所得到的运动方程（4.13）和（4.17）分别与粒子系的运动方程（3.3）和（3.6）在形式上一致，这就有可能类比于粒子系的正则量子化来进行场的正则量子化. 但是，上面所得到的近似结果在连续极限下必须能够过渡到第三章的精确结果. 否则，这种近似方法就不能使用. 不难证明，当小区域的数目 $f$ 趋向无限大，而且每个小区域都收缩到它所包含的某个空间点x（这时$\delta V\to 0$）时，$\phi_A^l(t)$ 和 $\dot{\phi}_A^l(t)$分别趋向$\phi_A(\mathbf{x},t)$和$\dot{\phi}_A(\mathbf{x},t)$：

$$\lim_{\substack{f\to\infty\\ \delta V_l\to 0}} \phi_A^l(t)=\phi_A(\mathbf{x},t,) \tag{4.21a}$$

$$\lim_{\substack{f\to\infty\\ \delta V_l\to 0}} \dot{\phi}_A^l(t)=\dot{\phi}_A(\mathbf{x},t). \tag{4.21b}$$

按定义，$\mathscr{L}_l$是第 $l$ 个小区域中点的Lagrange函数密度。当$\delta V_l\to 0$时，小区域的中点便与它收缩到的点x重合. 因此，

$$\lim_{\substack{f\to\infty\\ \delta V_l\to 0}} \mathscr{L}_l=\mathscr{L}(x). \tag{4.22}$$

又由于

$$\lim_{\substack{f\to\infty\\ \delta V_l\to 0}} \sum_l^f \delta V_l=\int_V d^3x,$$

故

$$\lim_{\substack{f\to\infty\\ \delta V_l\to 0}} (\overline{L}=\sum_l^f \delta V_l \mathscr{L}_l)=[L=\int_V d^3x\mathscr{L}(x)]. \tag{4.23}$$

此外，由（4.22）、（4.21）$b$和（4.19）容易看出：

$$\lim_{\substack{f\to\infty\\ \delta V_l\to 0}} \pi_A^l(t)=\pi_A(\mathbf{x},t), \tag{4.24}$$

由此就有

$$\lim_{\substack{f\to\infty\\ \delta V_l\to 0}} \left\{\overline{\mathrm{H}}=\sum_l^f \delta V_l[\sum_A^N \pi_A^l(t)\dot{\phi}_A^l(t)-\mathscr{L}_l]\right\}$$

$$=\left\{\mathrm{H}=\int_V d^3x[\sum_A^N \pi_A(\mathbf{x},t)\dot{\phi}_A(\mathbf{x},t)-\mathscr{L}(x)]\right\} \tag{4.25}$$

现在，不难把间断近似下的运动方程（4.13）和（4.17）分别过渡到它们的连续极限（3.21）和（3.25）. 由（3.17）$b$和（3.19）我们有

$$\delta L=\int_V\sum_A^N\left[\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_A}-\nabla\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\nabla\phi_A)}\right)\delta\phi_A+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}_A}\delta\dot{\phi}_A\right]d^3x, \tag{4.26}$$

另方面，按照（4.12）式又有

$$\delta\overline{L}=\sum_l^f\sum_A^N\left(\frac{\partial\overline{L}}{\partial\phi_A^l}\delta\phi_A^l+\frac{\partial\overline{L}}{\partial\dot{\phi}_A^l}\delta\dot{\phi}_A^l\right)$$

$$=\sum_l^f\sum_A^N\left(\frac{1}{\delta V_l}\frac{\partial\overline{L}}{\partial\phi_A^l}\delta\phi_A^l+\frac{1}{\delta V_l}\frac{\partial\overline{L}}{\partial\dot{\phi}_A^l}\delta\dot{\phi}_A^l\right)\delta V_l. \tag{4.27}$$

根据（4.21）—（4.25），显然有下式成立：

$$\lim_{\substack{f\to\infty\\ \delta V_l\to 0}}\delta\overline{L}=\delta L, \tag{4.28}$$

考虑到空间不同点的场的变分相互独立，在同一点各个 $\phi_A$ 的变分也相互独立，就可由（4.28）式得到如下的过渡关系式：

$$\lim_{\substack{f\to\infty\\ \delta V_l\to 0}}\frac{1}{\delta V_l}\frac{\partial\overline{L}}{\partial\phi_A^l(t)}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_A(x,t)}-\nabla\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial[\nabla\phi_A(x,t)]}, \tag{4.29a}$$

$$\lim_{\substack{f\to\infty\\ \delta V_l\to 0}}\frac{1}{\delta V_l}\frac{\partial\overline{L}}{\partial\dot{\phi}_A^l(t)}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}_A(x,t)}. \tag{4.29b}$$

以 $\frac{1}{\delta V_l}$ 乘（4.13）式，并对所得结果取连续极限，再利用关系式（4.29），就得到（3.21）式.

我们再来看从（4.17）式到（3.25）式的过渡．由（3.23）式显见：

$$\frac{\partial\mathscr{H}(x)}{\partial\dot{\phi}_A}=0，\ 即\ \mathscr{H}(x)=\mathscr{H}(\phi_A,\ \nabla\phi_A,\ \pi_A),$$

因此由（3.24）和（3.19）得到

$$\delta \mathrm{H}=\int_V\sum_A^N\left[\left(\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\phi_A}-\nabla\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial(\nabla\phi_A)}\right)\delta\phi_A+\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\pi_A}\delta\pi_A\right]d^3x. \tag{4.30}$$

另方面，由（4.15）式又有

$$\delta\overline{\mathrm{H}}=\sum_l^f\sum_A^N\left(\frac{\partial\overline{\mathrm{H}}}{\partial\phi_A^l}\delta\phi_A^l+\frac{\partial\overline{\mathrm{H}}}{\partial p_A^l}\delta p_A^l\right)$$

$$=\sum_l^f\sum_A^N\left(\frac{1}{\delta V_l}\frac{\partial\overline{\mathrm{H}}}{\partial\phi_A^l}\delta\phi_A^l+\frac{\partial\overline{\mathrm{H}}}{\partial p_A^l}\delta\pi_A^l\right)\delta V_l. \tag{4.31}$$

同样，因

$$\lim_{\substack{f\to\infty\\ \delta V_l\to 0}} \delta\overline{\mathrm{H}} = \delta \mathrm{H},$$

故有以下过渡关系：

$$\lim_{\substack{f\to\infty\\ \delta V_l\to 0}} \frac{1}{\delta V_l}\frac{\partial \overline{\mathrm{H}}}{\partial \phi_A^l} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \phi_A(\mathbf{x},t)} - \nabla \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial [\nabla \phi_A(\mathbf{x},t)]}, \tag{4.32$a$}$$

$$\lim_{\substack{f\to\infty\\ \delta V_l\to 0}} \frac{\partial \overline{\mathrm{H}}}{\partial p_A^l} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \pi_A}. \tag{4.32$b$}$$

对 (4.17)$a$取连续极限，并利用 (4.32)$b$，即得：

$$\dot{\phi}_A(\mathbf{x},t) = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \pi_A(\mathbf{x},t)}.$$

此式便是 (3.25)$b$式。再以$\frac{1}{\delta V_l}$乘 (4.17)$b$，然后取连续极限又得

$$\lim_{\substack{f\to\infty\\ \delta V_l\to 0}} \frac{1}{\delta V_l}\dot{p}_A^l = -\lim_{\substack{f\to\infty\\ \delta V_l\to 0}} \frac{1}{\delta V_l}\frac{\partial \overline{\mathrm{H}}}{\partial \phi_A^l},$$

利用 (4.18)、(4.24) 和 (4.32)$a$便由上式得到 (3.25)$a$式。

至此，我们证明了：本节的近似结果在连续极限下能够过渡到第三章的精确结果。

## §3 场的正则量子化

由于Fermi场和 Bose 场在统计性质方面有着重要区别，因而这两种场的量子化条件也不相同。在第七章末了，将从理论上阐明粒子自旋值与统计法则之间的关系，而现在，我们必须按照实验事实，对每种场使用适当的量子化条件，这样，才能获得自洽的量子化方案。

### (一) Bose场的正则量子化

Bose场的量子，自旋为整数或零，服从Bose-Einstein统计法，称为Bose子。对于Bose场可以完全类比于对经典粒子系进行量子化的方法来进行量子化。首先把场的正则坐标$\phi_A^l(t)$和正则共轭动量$p_A^l(t)$视为Hilbert空间的算符，并假定它们满足与 (4.2) 式一样的对易关系：

$$[\phi_A^l(t), p_B^j(t)] = i\delta_{AB}\delta^{lj}, \tag{4.33$a$}$$

$$[\phi_A^l(t),\phi_B^j(t)]=[p_A^l(t),p_B^j(t)]=0. \tag{4.33)b}$$

$$l,j=1,2,\cdots\cdots f;\quad A,B=1,2,\cdots\cdots N$$

利用（4.18)式把（4.33）式改写为：

$$[\phi_A^l(t),\pi_B^j(t)]=i\delta_{AB}\frac{\delta^{lj}}{\delta V_j}, \tag{4.34)a}$$

$$[\phi_A^l(t),\phi_B^j(t)]=[\pi_A^l(t),\pi_B^j(t)]=0 \tag{4.34)b}$$

其中，指标 $l$、$j$ 分别是第 $l$ 个和第 $j$ 个小区域的标记。假定在连续极限下，第 $l$ 个小区域收缩到 $\mathbf{x}_l$ 点，而第 $j$ 个小区域收缩到 $\mathbf{x}_j$ 点，那么，区域的标记就可以用相应的收缩点来代替：

$$[\phi_A^l(t),\ \pi_B^j(t)]=i\delta_{AB}\frac{\delta^{\mathbf{x}_l\mathbf{x}_j}}{\delta V_j} \tag{4.35}$$

因为

$$\lim_{\substack{f\to\infty\\ \delta V\to 0}}\frac{\delta^{\mathbf{x}_l\mathbf{x}_j}}{\delta V_j}=\lim_{\substack{f\to\infty\\ \delta V\to 0}}\frac{0}{\delta V_j}=0，\ 当\mathbf{x}_l\neq\mathbf{x}_j$$

$$\lim_{\substack{f\to\infty\\ \delta V\to 0}}\frac{\delta^{\mathbf{x}_l\mathbf{x}_j}}{\delta V_j}=\lim_{\substack{f\to\infty\\ \delta V\to 0}}\frac{1}{\delta V_j}=\infty，\ 当\mathbf{x}_l=\mathbf{x}_j$$

$$\int_{\sum_j^f\delta V_j}\lim_{\substack{f\to\infty\\ \delta V\to 0}}\frac{\delta^{\mathbf{x}_l\mathbf{x}_j}}{\delta V_j}d\mathbf{x}_j=1,\left(\begin{matrix}\text{极限运算同时作用于积分区域,}\\ \text{求和号同时作用于被积式}\end{matrix}\right)$$

所以

$$\lim_{\substack{f\to\infty\\ \delta V\to 0}}\frac{\delta^{\mathbf{x}_l\mathbf{x}_j}}{\delta V_j}=\delta^{(3)}(\mathbf{x}_l-\mathbf{x}_j). \tag{4.36}$$

从（4.21)$a$、（4.24）以及（4.36）可知，在连续极限下，（4.35）式过渡为下式：

$$[\phi_A(\mathbf{x}_l,t),\pi_B(\mathbf{x}_j,t)]=i\delta_{AB}\delta^{(3)}(\mathbf{x}_l-\mathbf{x}_j). \tag{4.37}$$

或者把 $\mathbf{x}_l$、$\mathbf{x}_j$ 分别记为 $\mathbf{x}$、$\mathbf{y}$：

$$[\phi_A(\mathbf{x},t),\pi_B(\mathbf{y},t)]=i\delta_{AB}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{4.38)a}$$

同样地，（4.34)$b$在连续极限下过渡为下式：

$$[\phi_A(\mathbf{x},t),\phi_B(\mathbf{y},t)]=[\pi_A(\mathbf{x},t),\pi_B(\mathbf{y},t)]=0. \tag{4.38)b}$$

（4.38）式称为正则等时对易关系，它就是Bose场的量子化条件。

为了得到量子场运动方程式，首先把经典的正则方程式(4.17)左边的 $\dot{\phi}_A^l(t)$ 和 $\dot{p}_A^l(t)$

都视为算符，并利用经典Poisson括号与量子对易括号之间的如下对应关系：

$$[\phi_A^l(t),\overline{\mathrm{H}}(t)]_{\mathrm{PB}}\Longrightarrow\frac{1}{i}[\phi_A^l(t),\overline{\mathrm{H}}(t)],\tag{4.39)a}$$

$$[p_A^l(t),\overline{\mathrm{H}}(t)]_{\mathrm{PB}}\Longrightarrow\frac{1}{i}[p_A^l(t),\overline{\mathrm{H}}(t)],\tag{4.39)b}$$

就可类比于（4.17）写出如下的量子运动方程式：

$$\dot{\phi}_A^l(t)=\frac{1}{i}[\phi_A^l(t),\overline{\mathrm{H}}(t)],\tag{4.40)a}$$

$$\dot{p}_A^l(t)=\frac{1}{i}[p_A^l(t),\overline{\mathrm{H}}(t)],\tag{4.40)b}$$

其次，再将（4.18）代入（4.40）式，消去体元$\delta V$；并对（4.40）取连续极限，就得到量子场正则运动方程式：

$$\dot{\phi}_A(\mathbf{x},t)=\frac{1}{i}[\phi_A(\mathbf{x},t),\mathrm{H}(t)],\tag{4.41)a}$$

$$\dot{\pi}_A(\mathbf{x},t)=\frac{1}{i}[\pi_A(\mathbf{x},t),\mathrm{H}(t)].\tag{4.41)b}$$

到此为止，场的正则量子化已告完成。$\phi_A(\mathbf{x},t)$和$\pi_A(\mathbf{x},t)$不再是经典场的场函数，而是量子场的算符，它们满足对易关系（4.38）和运动方程（4.41）。(4.38）和(4.41)便是量子化Bose场的基本方程式和关系式。从这两式出发便可讨论量子化Bose场的运动规律，揭示场的粒子性。由于我们采用（4.38）式作为量子化条件，因而将导致场量子服从Bose-Einstein统计法则。这一点正是我们所需要的。在第五章里还要再次提到这一点。

## （二）Fermi场的正则量子化

Fermi场的量子具有半数自旋，服从Fermi-Dirac统计法。为简单起见，我们来考虑非相对论的情形，所得结果可以推广到相对论的情形。假定$\psi(\mathbf{x},t)$是Fermi场的场函数，场的正则坐标和正则共轭动量分别是$\psi(\mathbf{x},t)$和$\pi(\mathbf{x},t)$。在非相对论情形下，$\psi$满足Schrödinger方程$i\dot{\psi}=-\frac{1}{2m}\nabla^2\psi$。由（3.41）式可知，场的Hamilton算符为$\mathrm{H}=\int d^3x\left(-\frac{1}{2m}\psi^+\nabla^2\psi\right)$，因而可以验证量子场正则运动方程为：[注1]

$$\dot{\psi}(\mathbf{x},t)=\frac{1}{i}[\psi(\mathbf{x},t),\mathrm{H}(t)],\tag{4.42)a}$$

---

〔注1〕 在验证（4.42）式时，要用到量子化条件（4.56）和对易括号与反对易括号之间的关系：$[C,AB]=\{A,C\}B-A\{B,C\}$。

$$\dot{\pi}(\mathbf{x},t)=\frac{1}{i}[\pi(\mathbf{x},t),\mathrm{H}(t)]. \tag{4.42b}$$

但是现在，场的量子化条件不再是正则等时对易关系，我们必须从Fermi统计出发来建立场算符所满足的对易关系．方程（4.42）的一组完全、正交的平面波解是：

$$\frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega_k t},$$

因而任意解$\psi(\mathbf{x},t)$可表为如下的级数和：

$$\psi(\mathbf{x},t)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}\bar{a}_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega_k t} \tag{4.43a}$$

$$\psi^{+}(\mathbf{x},t)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}\bar{a}^{+}_{\mathbf{k}}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+i\omega_k t} \tag{4.43b}$$

根据第二章的结果，我们把$\bar{a}^{+}_{\mathbf{k}}$、$\bar{a}_{\mathbf{k}}$分别解释为粒子产生、湮灭算符，并按照Pauli原理来寻找它们所满足的对易关系．用$|0,1_{\mathbf{k}}\rangle$代表量子场的这样一种状态，这时量子场具有一个动量为$\mathbf{k}$、能量为$E_{\mathbf{k}}=\omega_{\mathbf{k}}$的粒子，而能量动量为其它值的粒子数均为零．按照Fermi统计，能量动量取某定值的粒子数或者为零，或者为1，其余的可能性均不存在．因此，应有以下诸式成立：

$$\bar{a}_{\mathbf{k}}|\,0\,\rangle=0, \tag{4.44a}$$

$$\bar{a}^{+}_{\mathbf{k}}|\,0,1_{\mathbf{k}}\rangle=0, \tag{4.44b}$$

$$\bar{a}_{\mathbf{k}}|\,0,1_{\mathbf{k}}\rangle=|\,0\,\rangle, \tag{4.44c}$$

$$\bar{a}^{+}_{\mathbf{k}}|\,0\,\rangle=|\,0,1_{\mathbf{k}}\rangle. \tag{4.44d}$$

以$\bar{a}_{\mathbf{k}}$左乘（4.44)$b$，再以$\bar{a}^{+}_{\mathbf{k}}$左乘（4.44)$c$，然后将所得结果相加，就得到如下的本征值方程：

$$(\bar{a}_{\mathbf{k}}\bar{a}^{+}_{\mathbf{k}}+\bar{a}^{+}_{\mathbf{k}}\bar{a}_{\mathbf{k}})|\,0,1_{\mathbf{k}}\rangle=|\,0,1_{\mathbf{k}}\rangle, \tag{4.45a}$$

另一方面，以$\bar{a}^{+}_{\mathbf{k}}$左乘（4.44)$a$，再以$\bar{a}_{\mathbf{k}}$左乘（4.44)$d$，然后将所得结果相加，又得到如下的本征值方程：

$$(\bar{a}_{\mathbf{k}}\bar{a}^{+}_{\mathbf{k}}+\bar{a}^{+}_{\mathbf{k}}\bar{a}_{\mathbf{k}})|\,0\,\rangle=|\,0\,\rangle. \tag{4.45b}$$

态矢量$|\,0,1_{\mathbf{k}}\rangle$和$|\,0\,\rangle$是算符$\bar{a}_{\mathbf{k}}\bar{a}^{+}_{\mathbf{k}}+\bar{a}^{+}_{\mathbf{k}}\bar{a}_{\mathbf{k}}$的唯一可能的两个本征右矢，其相应本征值都是1，因而必定有：

$$\bar{a}_{\mathbf{k}}\bar{a}^{+}_{\mathbf{k}}+\bar{a}^{+}_{\mathbf{k}}\bar{a}_{\mathbf{k}}=1. \tag{4.46}$$

现在，把（4.44)$a$中的$\mathbf{k}$换成$\mathbf{k}'(\mathbf{k}'\neq\mathbf{k})$：

$$\bar{a}_{\mathbf{k}'}|\,0\,\rangle=0,$$

以$\bar{a}_k^+$左乘此式，再以$\bar{a}_{k'}$左乘(4.44)$d$式，然后将所得结果相加，得到：

$$(\bar{a}_{k'}\bar{a}_k^+ + \bar{a}_k^+\bar{a}_{k'})|\ 0\rangle = 0, \tag{4.47a}$$

再将（4.44)$c$中的$\bar{a}_k$换成$\bar{a}_{k'}$，得到：

$$\bar{a}_{k'}|\ 0, 1\rangle = 0,$$

以$\bar{a}_k^+$左乘此式，再以$\bar{a}_{k'}$左乘（4.44)$b$式，然后将所得结果相加，又得到：

$$(\bar{a}_{k'}\bar{a}_k^+ + \bar{a}_k^+\bar{a}_{k'})|\ 0, 1_k\rangle = 0. \quad k' \neq k \tag{4.47b}$$

态矢量$|\ 0, 1_k\rangle$和$|0\rangle$同样是算符$\bar{a}_{k'}\bar{a}_k^+ + \bar{a}_k^+\bar{a}_{k'}$的两个唯一可能的本征右矢，其相应本征值都是零，因而必定有：

$$\bar{a}_{k'}\bar{a}_k^+ + \bar{a}_k^+\bar{a}_{k'} = 0. \quad k \neq k' \tag{4.48}$$

（4.46）和（4.48）可合写为下式：

$$\{\bar{a}_{k'}, \bar{a}_k^+\} = \delta_{kk'}. \tag{4.49a}$$

用类似的方法，我们来考虑量子场的这样一种状态，这时量子场具有一个（$\mathbf{k}, E_k$）粒子和一个（$\mathbf{k}', E_{k'}$）粒子，其余粒子数均为零。描写这一状态的态矢量为

$$\bar{a}_k^+\bar{a}_{k'}^+|\ 0\rangle$$

按照Fermi统计，该态矢量对交换上述两个粒子是反对称的。因此，我们有

$$\{\bar{a}_k^+, \bar{a}_{k'}^+\} = 0, \tag{4.49b}$$

此式取厄米共轭又得到

$$\{\bar{a}_k, \bar{a}_{k'}\} = 0. \tag{4.49c}$$

（4.49）式便是Fermi 场的粒子产生、湮灭算符所满足的对易关系，这些对易关系是由反对易括号$\{A, B\} = AB + BA$给出的。所以又称为反对易关系。

现在，利用（4.49）式来导出场算符所满足的正则等时反对易关系：

$$\{\psi(\mathbf{x}, t), \psi^+(\mathbf{y}, t)\} = \frac{1}{V}\sum_{kk'}\{\bar{a}_k, \bar{a}_{k'}^+\}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{y} - i(\omega_k - \omega_{k'})t}$$

$$= \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \tag{4.50}$$

为了计算此式右边对间断动量的求和，需要把它化为对连续动量的积分。由于引入归一化体积$V = l^3$（这里，$l$是立方体的边长），因而动量只能取以下分立值：

$$k_j = \frac{2\pi}{l} n_j, \quad (j = 1, 2, 3) \tag{4.51}$$

在动量空间的第$j$个坐标轴上的任意一段间隔$dk_j$内，容纳有$dn_j$个$k_j$的许可值，且

$$dn_j = dk_j \Big/ \frac{2\pi}{l} \tag{4.52}$$

现在，让$dk_j \to 0$（因而$dn_j$也趋向零），并进行如下的积分：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_j(x_j-y_j)}dk_j = \int_0^{\infty} e^{-ik_j(x_j-y_j)}dk_j + \int_0^{\infty} e^{ik_j(x_j-y_j)}dk_j$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-ik_j(x_j-y_j)}\frac{2\pi}{l}dn_j + \int_0^{\infty} e^{ik_j(x_j-y_j)}\frac{2\pi}{l}dn_j. \tag{4.53}$$

上式最后一个等号右边变数$n_j$的取值范围是在整个$k_j$轴正半轴上所容纳的$k_j$的全部许可值的数目。由于$k_j$的许可值是一些间断值，故上式右边对$n_j$的积分事实上等同于对$k_j$轴正半轴上全部间断的$k_j$值求和：

$$\int_0^{\infty} e^{-ik_j(x_j-y_j)}dk_j = \int_0^{\infty} e^{-ik_j(x_j-y_j)}\frac{2\pi}{l}dn_j$$

$$= \frac{2\pi}{l}\sum_{k_j \geq 0} e^{-ik_j(x_j-y_j)} = \frac{2\pi}{l}\sum_{k_j \leq 0} e^{ik_j(x_j-y_j)},$$

$$\int_0^{\infty} e^{ik_j(x_j-y_j)}dk_j = \frac{2\pi}{l}\int_0^{\infty} e^{ik_j(x_j-y_j)}dn_j$$

$$= \frac{2\pi}{l}\sum_{k_j \geq 0} e^{ik_j(x_j-y_j)}$$

将以上二式代入（4.53）式得：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_j(x_j-y_j)}dk_j = \frac{2\pi}{l}\sum_{k_j} e^{ik_j(x_j-y_j)} \tag{4.54}$$

因此，我们得到求和与积分的转换公式如下：

$$\int e^{\pm i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}d^3k = \frac{(2\pi)^3}{V}\sum_{\mathbf{k}} e^{\pm i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}. \tag{4.55}$$

这里，$d^3k = dk_1dk_2dk_3$。把（4.55）代入（4.50）得

$$\{\psi(\mathbf{x},t),\psi^+(\mathbf{y},t)\} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}d^3k$$

$$= \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{4.56a}$$

同样可得：

$$\{\psi(\mathbf{x},t),\psi(\mathbf{y},t)\} = \{\psi^+(\mathbf{x},t),\psi^+(\mathbf{y},t)\} = 0 \tag{4.56b}$$

（4.56）式就是Fermi场算符所满足的正则等时反对易关系，亦即是Fermi场的量子化条件。这些条件与量子场运动方程（4.42）一起构成量子化Fermi场的基本方程式。从这

些方程式出发便可讨论量子化Fermi场的运动规律。

量子场论对波与粒子、场与实物进行了完全对称的描写。物质的两种形态：实物和场被统一为一种形态，即“量子场”。但是，从Bose场与Fermi场的正则量子化方法所具有的显著差异，我们不难看出这两种场是不能等量齐观的，它们之间存在着两种统计规律的对立，而产生这种对立的原因也许正是未来新的物理学理论应当做出回答的关键问题之一。

## 习　题

（1）在进行正则量子化时，必须事先知道场系统的H、$\phi_A$、$\pi_A$，这是为什么？

（2）把本章的量子化方法与第二章进行比较，找出两者之间的联系。

（3）验证（4.39）式。

（4）验证（4.56）$b$式。

（5）验证（4.36）式之前面一式，即

$$\int_{\sum\limits_{i}^{f}\delta V_j} \lim_{\substack{f\to\infty \\ \delta V\to 0}} \frac{\delta_{x_i x_j}}{\delta V_j} dx_j = 1.$$

# 第五章　量子化标量场

从本章到第七章要讨论几种自由量子场的运动．量子场论的任务是要从理论上描写基本粒子之间相互作用和转化的现象（这些基本粒子都是量子场的激发态）．但是，在量子场论里关于自由场的理论与经典力学里不受外力作用的惯性运动理论，以及量子力学里不受外场束缚的自由粒子理论是同等重要的．把自由场的运动搞清楚了，就有助于我们去处理量子场相互作用的问题．

## §1　量子化实标量场

实标量场的场函数是实函数，满足实性条件(3.9)，场的Lagrange函数密度由(3.29)式给出．把（3.29）代入Euler-Lagrange方程（3.16），便得到场方程（1.8）．但现在，应当把（1.8）式中的$\phi(\mathbf{x},t)$视为场函数．场的正则坐标和正则共轭动量分别为$\phi(\mathbf{x},t)$和$\pi(\mathbf{x},t)=\dot{\phi}(\mathbf{x},t)$．因此，在进行算符对应之后，有

$$\phi^+(\mathbf{x},t)=\phi(\mathbf{x},t),\quad \pi^+(\mathbf{x},t)=\pi(\mathbf{x},t).\tag{5.1}$$

按照（4.38）式，场的量子化条件为

$$[\phi(\mathbf{x},t),\ \pi(\mathbf{y},t)]=i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\tag{5.2)a}$$

$$[\phi(\mathbf{x},t),\phi(\mathbf{y},t)]=[\pi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)]=0\tag{5.2)b}$$

又按照（4.41），量子场正则运动方程式为

$$\dot{\phi}(\mathbf{x},t)=\frac{1}{i}[\phi(\mathbf{x},t),\mathrm{H}(t)],\tag{5.3)a}$$

$$\dot{\pi}(\mathbf{x},t)=\frac{1}{i}[\pi(\mathbf{x},t),\mathrm{H}(t)].\tag{5.3)b}$$

其中，场的能量算符H$(t)$可在（3.31）式里进行算符对应而得到：

$$\mathrm{H}(t)=\frac{1}{2}\int_V d^3x\left\{\pi^2(\mathbf{x},t)+[\nabla\phi(\mathbf{x},t)]^2+m^2\phi^2(\mathbf{x},t)\right\}.\tag{5.4}$$

把（5.4）代入（5.3），并利用对易关系（5.2），就得到量子场的场方程式[注1]：

〔注1〕　在导出方程（5.5）时，曾使用了δ函数求导数的公式：

$$\int dxf(x)\frac{d^n}{dx^n}\delta(x-a)=(-1)^nf^{(n)}(a)$$

$$(\Box - m^2)\phi(x) = 0 . \tag{5.5}$$

我们看到，量子场方程（5.5）与经典场方程（1.8）在形式上完全一致．到此为止，量子化手续已告完成，（5.2）和（5.3）便是量子化实标量场的基本方程式．由于条件（5.1），故量子化实标量场又称为厄米标量场．

为了显示厄米标量场的粒子性，需要把对易关系（5.2）和场物理量算符的表示式转到动量空间．根据量子场方程（5.5）和经典场方程（1.8）在形式上的一致性，可类比于（1.24）$a$写出（5.5）式的任意解：

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}(a_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega_k t} + a_{\mathbf{k}}^{+}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + i\omega_k t}). \tag{5.6}$$

此式中的展开系数$a_{\mathbf{k}}$、$a_{\mathbf{k}}^{+}$是互厄米共轭的算符．为了弄清这些算符的意义，首先来找出它们所满足的对易关系．为此，从（5.6）式解出$a_{\mathbf{k}}$和$a_{\mathbf{k}}^{+}$．令

$$f_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega_k t}, \tag{5.7a}$$

$$f_{\mathbf{k}}^{*} = \frac{1}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + i\omega_k t} \tag{5.7b}$$

则（5.6）式成为

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}}(a_{\mathbf{k}}f_{\mathbf{k}} + a_{\mathbf{k}}^{+}f_{\mathbf{k}}^{*}). \tag{5.8}$$

以$f_{\mathbf{k}}^{*}$乘上式，并利用积分公式（1.184）将所得式两边沿空间区域$V$做积分，就得到：

$$\int_V f_{\mathbf{k}}^{*}\phi(\mathbf{x}, t)d^3x = \frac{1}{2\omega_k}(a_{\mathbf{k}} + a_{-\mathbf{k}}^{+}e^{2i\omega_k t}). \tag{5.9a}$$

再将此式两边对$t$求导，并注意到$\dot{f}_{\mathbf{k}}^{*} = i\omega_k f_{\mathbf{k}}^{*}$，又得到下式：

$$\int_V f_{\mathbf{k}}^{*}\dot{\phi}(\mathbf{x}, t)d^3x = -\frac{i}{2}(a_{\mathbf{k}} - a_{-\mathbf{k}}^{+}e^{2i\omega_k t}). \tag{5.9b}$$

（5.9）$a$与（5.9）$b$联立，极易解得$a_{\mathbf{k}}$：

$$a_{\mathbf{k}} = i\int_V d^3x f_{\mathbf{k}}^{*}\overleftrightarrow{\partial_t}\phi(\mathbf{x}, t), \tag{5.10a}$$

其中，微分算符$\overleftrightarrow{\partial_t}$由下式定义：

$$A(t)\overleftrightarrow{\partial_t}B(t) = A(t)\partial_t B(t) - [\partial_t A(t)]B(t), \tag{5.11}$$

对（5.10）$a$取厄米共轭，并利用等式

$$[A(t)\overleftrightarrow{\partial_t}B(t)]^{+} = -B^{+}(t)\overleftrightarrow{\partial_t}A^{+}(t), \tag{5.12}$$

就得到$a_{\mathbf{k}}^{+}$：

$$a_{\mathbf{k}}^{+}=i\int_{V}d^{3}x\phi(\mathbf{x},t)\overleftrightarrow{\partial_t}f_{\mathbf{k}}. \tag{5.10)b$$

现在我们可以直接推导$a_{\mathbf{k}}$、$a_{\mathbf{k}}^{+}$所满足的对易关系，利用对易关系（5.2)可得：

$$\begin{aligned}&[f_{\mathbf{k}}^{*}(\mathbf{x},t)\overleftrightarrow{\partial_t}\phi(\mathbf{x},t),\phi(\mathbf{y},t)\overleftrightarrow{\partial_t}f_{\mathbf{k}'}(\mathbf{y},t)]\\&=f_{\mathbf{k}}^{*}(\partial_t f_{\mathbf{k}'})[\pi(\mathbf{x},t),\phi(\mathbf{y},t)]+(\partial_t f_{\mathbf{k}}^{*})f_{\mathbf{k}'}[\phi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)]\\&=-if_{\mathbf{k}}^{*}\overleftrightarrow{\partial_t}f_{\mathbf{k}'}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}[a_{\mathbf{k}},a_{\mathbf{k}'}^{+}]&=-\int d^{3}xd^{3}y\,[f_{\mathbf{k}}^{*}(\mathbf{x},t)\overleftrightarrow{\partial_t}\phi(\mathbf{x},t),\phi(\mathbf{y},t)\overleftrightarrow{\partial_t}f_{\mathbf{k}'}(\mathbf{y},t)]\\&=i\int d^{3}xf_{\mathbf{k}}^{*}(\mathbf{x},t)\overleftrightarrow{\partial_t}f_{\mathbf{k}'}(\mathbf{x},t).\end{aligned}$$

把（5.7）代回此式，并利用积分公式（1.184)$b$，就得到

$$[a_{\mathbf{k}},a_{\mathbf{k}'}^{+}]=\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \tag{5.13)a$$

类似地，可以证明：

$$[a_{\mathbf{k}},a_{\mathbf{k}'}]=[a_{\mathbf{k}}^{+},a_{\mathbf{k}'}^{+}]=0. \tag{5.13)b$$

（5.13）式就是算符$a_{\mathbf{k}}$、$a_{\mathbf{k}}^{+}$所满足的对易关系，它也就是量子化条件（5.2）在动量空间的形式。

下面，还需要把场物理量算符的表示式转到动量空间．由（5.6）式易得：

$$\begin{aligned}\pi(\mathbf{x},t)&=\dot{\phi}(\mathbf{x},t)\\&=\frac{-i}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}\sqrt{\frac{\omega_k}{2}}\left(a_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega_k t}-a_{\mathbf{k}}^{+}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+i\omega_k t}\right).\end{aligned} \tag{5.14)a$$

和

$$\nabla\phi(\mathbf{x},t)=\frac{i}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}\frac{\mathbf{k}}{\sqrt{2\omega_k}}\left(a_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega_k t}-a_{\mathbf{k}}^{+}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+i\omega_k t}\right). \tag{5.14)b$$

把（5.6）和（5.14）代入（5.4），并利用积分公式（1.184），经过比较冗长，但是并不复杂的运算，便得到

$$\mathrm{H}=\sum_{\mathbf{k}}(a_{\mathbf{k}}^{+}a_{\mathbf{k}}+a_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}}^{+})\frac{\omega_k}{2}, \tag{5.15}$$

再利用对易关系（5.13)$a$来变换上式右边求和号下的第二项，就得到能量算符的动量空间表示式为：

$$\mathrm{H}=\sum_{\mathbf{k}}(a_{\mathbf{k}}^{+}a_{\mathbf{k}}+\frac{1}{2})\omega_k. \tag{5.16}$$

根据第二章的讨论，上式中的$a_{\mathbf{k}}^{+}a_{\mathbf{k}}$是厄米标量场的粒子数算符，又由于对易关系(5.13)

与（2.42）在形式上一致，因而$a_{\mathbf{k}}^{+}$、$a_{\mathbf{k}}$分别就是厄米标量场的粒子产生算符和湮灭算符．在（5.16）式里存在着无穷大的零点能量$E_o=\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}\omega_k$，这样就使（5.16）式失去物理意义，因为它将导致场在任一激发态下的能量都是无穷大．但是这个无穷大的零点能量不可能用实验方法直接观察到，因而我们把$E_o$抛弃掉，重新定义真空态能量为

$$E_o=0. \tag{5.17}$$

这样就可将（5.16）式写为

$$\mathrm{H}=\sum_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}}^{+}a_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}}. \tag{5.18}$$

此外，按照（3.69）$b$，可以写出厄米标量场的动量算符为：

$$\mathbf{P}=-\int_V d^3x\pi(\mathbf{x},t)\nabla\phi(\mathbf{x},t). \tag{5.19}$$

把（5.14）$a$和（5.14）$b$代入（5.19）可得

$$\mathbf{P}=-\sum_{\mathbf{k}}\Big(\frac{-\mathbf{k}}{2}a_{\mathbf{k}}a_{-\mathbf{k}}e^{-2i\omega_{\mathbf{k}}t}+\frac{-\mathbf{k}}{2}a_{\mathbf{k}}^{+}a_{-\mathbf{k}}^{+}e^{2i\omega_{\mathbf{k}}t}$$

$$-\frac{\mathbf{k}}{2}a_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}}^{+}-\frac{\mathbf{k}}{2}a_{\mathbf{k}}^{+}a_{\mathbf{k}}\Big) \tag{5.20$a$}$$

根据对易关系（5.13）$b$，上式右边头两项求和分别为零．因而我们有

$$\mathbf{P}=\sum_{\mathbf{k}}\Big(a_{\mathbf{k}}^{+}a_{\mathbf{k}}+\frac{1}{2}\Big)\mathbf{k}. \tag{5.20$b$}$$

又由于零点动量自动为零：

$$\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{2}\mathbf{k}=0 \tag{5.21}$$

故场的动量算符的动量空间表示式为：

$$\mathbf{P}=\sum_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}}^{+}a_{\mathbf{k}}\mathbf{k}. \tag{5.22}$$

根据（3.97），场的总电荷为零：

$$eQ=-ie\int_V(\pi\phi-\pi^{+}\phi^{+})d^3x=0\text{〔注1〕}. \tag{5.23}$$

即厄米标量场的粒子是中性粒子（上式右边积分号前的$e$是标量粒子的电荷，它事实上也为零）．

综合（5.18）、（5.22）和（5.23）可以看出：厄米标量场同时又是许多不连续的

〔注1〕（5.23）式的形式似乎违背了厄米性，但由于其右方为零，故事实上没有违背厄米性．

粒子，这些粒子具有质量为$m$，自旋与电荷均为零。我们称之为中性标量粒子。量子场的频率为$\omega_k$，波矢为$\mathbf{k}$的谐振动，同时又是一些能量为$\omega_k$、动量为$\mathbf{k}$的中性标量粒子。

在第二章§3里所得到的关于量子场态矢量和算符矩阵元的全部结果，同样适用于本章。$\mathcal{H}_{\mathbf{k}}=a_{\mathbf{k}}^{+}a_{\mathbf{k}}$的矩阵表示仍为（2.56）式；$a_{\mathbf{k}}$、$a_{\mathbf{k}}^{+}$在以$|n_{\mathbf{k}}\rangle$为基的空间仍可表示为（2.69）$a$和（2.69）$b$；不难验证，满足正交归一条件（2.54）$a$和（2.54）$b$的态矢量具有以下形式：

$$|n_{\mathbf{k}}\rangle=\frac{1}{(n_{\mathbf{k}}!)^{1/2}}\overbrace{a_{\mathbf{k}}^{+}\cdots\cdots a_{\mathbf{k}}^{+}}^{n_{\mathbf{k}}\text{个}}|0\rangle, \tag{5.24$a$}$$

$$|\cdots\cdots n_{\mathbf{k}_i}\cdots\cdots n_{\mathbf{k}_j}\cdots\cdots\rangle=\frac{1}{(\cdots\cdots n_{\mathbf{k}_i}!\cdots\cdots n_{\mathbf{k}_j}!\cdots\cdots)^{1/2}}$$
$$\times\left\{\cdots\cdots(a_{\mathbf{k}_i}^{+})^{n_{\mathbf{k}_i}}\cdots\cdots(a_{\mathbf{k}_j}^{+})^{n_{\mathbf{k}_j}}\cdots\cdots\right\}|0\rangle. \tag{5.24$b$}$$

从对易关系（5.13）以及（5.18）和（5.22）看出，具有同一能量、动量的粒子数目$n_{\mathbf{k}}$可以是零或任意正整数；又从对易关系（5.13）看出，态矢量（5.24）对于交换场量子是对称的。这表明标量粒子服从Bose统计。

在这一节的末了，我们引入一个关于算符乘积的概念，即正规乘积的概念。如果两个以上算符相乘时遵守如下的先后顺序，即产生算符总是置于湮灭算符之左边，那么，这样一种算符乘积就称为正规乘积。例如算符$A(x)$和$B(x)$的正规乘积可表示如下：

$$\mathrm{N}[A(x)B(x)]$$

或

$$:A(x)B(x):$$

我们将取后一种表示法。现在把（5.6）式重写为

$$\phi(x)=\phi^{(+)}(x)+\phi^{(-)}(x) \tag{5.25}$$

其中，

$$\phi^{(+)}(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}a_{\mathbf{k}}e^{ik\cdot x} \tag{5.26$a$}$$

$$\phi^{(-)}(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}a_{\mathbf{k}}^{+}e^{-ik\cdot x} \tag{5.26$b$}$$

$\phi^{(-)}(x)$是场算符$\phi(x)$的产生部分（与$a_{\mathbf{k}}^{+}$有关的部分），它是所有负频率的平面波解之和。而$\phi^{(+)}(x)$是$\phi(x)$的湮灭部分（与$a_{\mathbf{k}}$有关的部分），它是所有正频率的平面波解之和。我们来写出两个时空点的场算符$\phi(x_1)$和$\phi(x_2)$的正规乘积：

$$:\phi(x_1)\phi(x_2):=\phi^{(+)}(x_1)\phi^{(+)}(x_2)+\phi^{(-)}(x_1)\phi^{(+)}(x_2)$$
$$+\phi^{(-)}(x_1)\phi^{(-)}(x_2)+\phi^{(-)}(x_2)\phi^{(+)}(x_1). \tag{5.27}$$

在此式右边最后一项乘积里改变了原来的排列顺序。

倘若在所有场物理量算符的表示式里，把场算符按正规顺序排列，即代替（5.4）和（5.19），把场的能量、动量算符的坐标空间表示式写为：

$$\mathrm{H}=\frac{1}{2}\int_{V} d^3x:[\pi^2(x)+[\nabla\phi(x)]^2+m^2\phi^2(x)]: \tag{5.28a}$$

$$\mathbf{P}=-\int_{V} d^3x:[\pi(x)\nabla\phi(x)]:, \tag{5.28b}$$

则动量空间表示式（5.15）和（5.20）$a$也要作相应的变化．因而零点能量和零点动量就自动地不出现了．

## §2　量子化复标量场

复标量场的场函数是复函数：$\phi^*\neq\phi$，因此，与实标量场相比较，它有两套独立的自由度．场的Lagrange函数密度由（3.33）式给出．场方程式仍是（1.8）式．由(3.34)知，在进行算符对应之后，场的正则坐标算符和正则共轭动量算符分别是：

$$\phi(x),\qquad \pi(x)=\dot{\phi}^+(x),$$

$$\phi^+(x),\qquad \pi^+(x)=\dot{\phi}(x).$$

而且显然地，

$$\phi^+\neq\phi,\qquad \pi^+\neq\pi.$$

所以量子化复标量场又称为非厄米标量场．场的量子化条件可按（4.38）式直接写出：

$$[\phi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)]=i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{5.29a}$$

$$[\phi^+(\mathbf{x},t),\pi^+(\mathbf{y},t)]=i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{5.29b}$$

其余等时对易括号均为零．由（4.41）得到量子场正则运动方程为：

$$\dot{\phi}(\mathbf{x},t)=\frac{1}{i}[\phi(\mathbf{x},t),\mathrm{H}(t)], \tag{5.30a}$$

$$\dot{\phi}^+(\mathbf{x},t)=\frac{1}{i}[\phi^+(\mathbf{x},t),\mathrm{H}(t)], \tag{5.30b}$$

$$\dot{\pi}(\mathbf{x},t)=\frac{1}{i}[\pi(\mathbf{x},t),\mathrm{H}(t)], \tag{5.30c}$$

$$\dot{\pi}^+(\mathbf{x},t)=\frac{1}{i}[\pi^+(\mathbf{x},t),\mathrm{H}(t)]. \tag{5.30d}$$

其中，能量算符$\mathrm{H}(t)$可由（3.36）式经算符对应得到：〔注1〕

〔注1〕 在场物理量算符的表示式里，只应包含场算符及其导数的内乘积．故在(5.31)式里应包含$\pi\pi^+=\dot{\phi}^+\dot{\phi}$．而不是$\pi^+\pi=\dot{\phi}\dot{\phi}^+$．

$$H=\int_V d^3x:(\pi\pi^+ + \nabla\phi^+\cdot\nabla\phi + m^2\phi^+\phi): \tag{5.31}$$

在这里，我们使用了正规乘积，因而零点能量不再出现．同样地，根据（3.69）$b$和（3.97）可以分别写出场的动量算符和电荷算符为〔注1〕

$$\mathbf{P}=-\int_V d^3x:(\pi\nabla\phi+\nabla\phi^+\pi^+):, \tag{5.32}$$

$$eQ=-ie\int_V d^3x:(\pi\phi-\phi^+\pi^+):. \tag{5.33}$$

为了显示场的粒子性，要把对易关系（5.29）和算符H、P、$eQ$的表示式转到动量空间．但现在，我们可以利用§1的结果来简化计算．把非厄米标量场$\phi$表示为两个独立的厄米标量场$\phi_1$、$\phi_2$的线性组合：

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\phi_1(x)-i\phi_2(x)], \tag{5.34a}$$

$$\phi^+(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\phi_1(x)+i\phi_2(x)]. \tag{5.34b}$$

$\phi_1$、$\phi_2$满足和（5.5）一样的量子场方程式：

$$(\Box-m^2)\phi_j(x)=0,\quad j=1,2. \tag{5.35}$$

因而完全类似于（5.6）式，我们有以下的平面波解：

$$\phi_j(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}(a_{\mathbf{k}}^{(j)}e^{ik\cdot x}+a_{\mathbf{k}}^{(j)+}e^{-ik\cdot x}) \tag{5.36}$$

其中，$a_{\mathbf{k}}^{(j)}$、$a_{\mathbf{k}}^{(j)+}$分别是厄米标量场$\phi_1$、$\phi_2$的粒子湮灭算符和产生算符．这些算符满足和（5.13）式一样的对易关系：

$$[a_{\mathbf{k}}^{(i)},a_{\mathbf{k}'}^{(j)+}]=\delta^{ij}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \tag{5.37a}$$

$$[a_{\mathbf{k}}^{(i)},a_{\mathbf{k}'}^{(j)}]=[a_{\mathbf{k}}^{(i)+},a_{\mathbf{k}'}^{(j)+}]=0. \tag{5.37b}$$

把（5.34）分别代入H、P的表示式（5.31）和（5.32）并注意$[\nabla\phi_i(\mathbf{x},t),\pi_j(\mathbf{x},t)]=0$，即得：

$$H=\frac{1}{2}\int_V d^3x:[(\pi_1\pi_1+\nabla\phi_1\cdot\nabla\phi_1+m^2\phi_1\phi_1)$$
$$+(\pi_2\pi_2+\nabla\phi_2\cdot\nabla\phi_2+m^2\phi_2\phi_2)]: \tag{5.38}$$

---

〔注1〕在（5.32）和（5.33）式里，积分号下第二项分别为"$\nabla\phi^+\pi^+$"和"$\phi^+\pi^+$"，均改变了经典量的原来顺序，这是因为第一，场物理量算符必须是厄米算符；第二，场物理量算符必须由场算符的内乘积（即二次式）构成．

$$\mathbf{P} = -\int_V d^3x : (\pi_1 \nabla \phi_1 + \pi_2 \nabla \phi_2): \tag{5.39}$$

将 (5.38) 和 (5.39) 分别与 (5.28)$a$和 (5.28)$b$比较可知，在现在的情况下，量子场的自由度多了一倍. 因此，参照 (5.18) 和 (5.22)，可直接写出H、**P** 的动量空间表示式如下：

$$\mathrm{H} = \sum_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}^{(1)+} a_{\mathbf{k}}^{(1)} + a_{\mathbf{k}}^{(2)+} a_{\mathbf{k}}^{(2)}) \omega_k, \tag{5.40}$$

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}^{(1)+} a_{\mathbf{k}}^{(1)} + a_{\mathbf{k}}^{(2)+} a_{\mathbf{k}}^{(2)}) \mathbf{k}. \tag{5.41}$$

为了把上面的结果用非厄米标量场的产生、湮灭算符来表示，首先把 (5.36) 代入 (5.34)$a$，得到：

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \left[ (a_{\mathbf{k}}^{(1)} - i a_{\mathbf{k}}^{(2)}) e^{ik\cdot x} + (a_{\mathbf{k}}^{(1)+} - i a_{\mathbf{k}}^{(2)+}) e^{-ik\cdot x} \right],$$

令

$$a_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{\mathbf{k}}^{(1)} - i a_{\mathbf{k}}^{(2)}), \tag{5.42)a}$$

$$b_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{\mathbf{k}}^{(1)} + i a_{\mathbf{k}}^{(2)}), \tag{5.42)b}$$

就得到$\phi(x)$和$\phi^+(x)$的平面波表示式：

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} [a_{\mathbf{k}} e^{ik\cdot x} + b_{\mathbf{k}}^+ e^{-ik\cdot x}], \tag{5.43)a}$$

$$\phi^+(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} [b_{\mathbf{k}} e^{ik\cdot x} + a_{\mathbf{k}}^+ e^{-ik\cdot x}]. \tag{5.43)b}$$

其次，再由 (5.42) 式解出 $a_{\mathbf{k}}^{(1)}$ 和 $a_{\mathbf{k}}^{(2)}$：

$$a_{\mathbf{k}}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}}), \tag{5.44)a}$$

$$a_{\mathbf{k}}^{(2)} = \frac{i}{\sqrt{2}} (a_{\mathbf{k}} - b_{\mathbf{k}}), \tag{5.44)b}$$

并代入 (5.40) 和 (5.41)，分别得到非厄米标量场的能量、动量算符为：

$$\mathrm{H} = \sum_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}}) \omega_k, \tag{5.45}$$

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}}) \mathbf{k}. \tag{5.46}$$

根据第二章 §3 的讨论结果，以上二式里的$a_k^+a_k$和$b_k^+b_k$乃是非厄米标量场的粒子数算符。不难证明，$a_k$、$b_k$满足以下对易关系：

$$[a_k, a_{k'}^+] = \delta_{kk'}, \tag{5.47a}$$

$$[b_k, b_{k'}^+] = \delta_{kk'} \tag{5.47b}$$

其余对易括号均为零。这些对易关系与（2.42）在形式上一致，因而$a_k^+$、$b_k^+$是场的粒子产生算符，而$a_k$、$b_k$则是场的粒子湮灭算符。这样，非厄米标量场就有两类粒子数算符和两类粒子的产生、湮灭算符。这一点，与非厄米标量场有两套自由度的事实相关。为了弄清这两类粒子的区别，我们来推出场的电荷算符的动量空间表示式。把（5.43）以及$\pi=\dot{\phi}^+$和$\pi^+=\dot{\phi}$一起代入（5.33）并用（1.184）式完成对x的积分，就得到

$$eQ = -ie\int_V :(\pi\phi - \phi^+\pi^+):d^3x$$

$$= -ie\sum_k \frac{1}{2\omega_k}\Big\{(-i\omega_k b_k a_{-k} e^{-2i\omega_k t} - i\omega_k b_k^+ b_k + i\omega_k a_k^+ a_k$$

$$+ i\omega_k a_k^+ b_{-k}^+ e^{2i\omega_k t}) - (-i\omega_k b_k a_{-k} e^{-2i\omega_k t} - i\omega_k a_k^+ a_k$$

$$+ i\omega_k b_k^+ b_k + i\omega_k a_k^+ b_{-k}^+ e^{2i\omega_k t})\Big\}$$

因此，算符$eQ$的动量空间表示式为

$$eQ = \sum_k (a_k^+ a_k - b_k^+ b_k)e. \tag{5.48}$$

应当指出，由于我们在上述推算里使用了算符$eQ$的正规乘积定义，因而零点电荷$eQ_0 = -\sum_k e$不再出现。而这个无穷大的零点电荷会使（5.48）式失去物理意义（倘若它出现的话）。

从（5.45）、（5.46）和（5.48）看到，非厄米标量场的能量、动量、电荷分别具有如下的本征值：

$$\mathrm{H} = \sum_k (n_k^{(a)} + n_k^{(b)})\omega_k, \tag{5.49a}$$

$$\mathbf{P} = \sum_k (n_k^{(a)} + n_k^{(b)})\mathbf{k}, \tag{5.49b}$$

$$eQ = \sum_k (n_k^{(a)} - n_k^{(b)})e. \tag{5.49c}$$

其中，$n_k^{(a)}$、$n_k^{(b)}$分别是两类粒子的数目，$a$类粒子电荷为$e$，质量为$m$，自旋为零；$b$类粒子电荷为$-e$，其余物理性质皆与$a$类粒子相同。可令$a$类粒子为正粒子，$b$类粒子为反粒子，反之亦可。这要看电荷$e$的符号和粒子种类而定。例如对于带电$\pi$介子场，若取$e>0$，则$a$类粒子就是$\pi^+$介子（正粒子），而$b$类粒子就是$\pi^-$介子（反粒子）。非厄米标量场的频率为$\omega_k$波矢为k的谐振动，同时又是许多能量为$\omega_k$、动量为k的标量粒子和反粒子。我们指出，$\pi^\pm$介子场、$K^\pm$介子场以及$K_0$、$\tilde{K}_0$介子场都是非厄米标量场。而没

有反粒子的中性介子$\pi_0$则联属于厄米标量场。

## §3 连续对称性与守恒定律

在第三章里曾讨论了Noether定理，所得结果只要翻译成量子的语言，同样适用于量子场。下面分别就时空对称性和内对称性的情形来进行讨论。

**时空对称性的情形**：可以把从（3.50）到（3.62）的讨论全部翻译为量子的语言。这只要把$\phi_A(x)$视为场算符即可。但是，在第三章里我们不可能把生成元$G(t)$与群表示的生成元直接联系起来，这是因为场函数在某一对称变换下的变换法则实际上就是量子力学波函数在同一对称变换下的变换法则。量子力学波函数总是按对称群的某一表示变换，群表示的生成元则是单粒子体系的某一守恒物理量算符。因此，当我们用场物理量来“生成”场函数的对称变换时，其数学形式便是（3.100）式和（3.101）式，它与表示群的变换是很不相同的。然而，我们在下面就会看到，在量子场情形下，场算符按对称群的某一表示变换。守恒量的算符$G(t)$与群表示的生成元直接地联系起来。

例如，我们来考虑无穷小的非齐次Lorentz变换

$$x'_\mu = x_\mu + \omega_{\mu\nu}x_\nu + \varepsilon_\mu, \tag{5.50}$$

这一变换包括四维时空的无穷小转动和平移在内，在变换（5.50）之下，场算符和场物理量算符的期望值均要变化。这种变化可归因于算符的变化，或者也可归因于场态矢量的变化：

$$\langle A\rangle' = \langle\alpha|\,A'|\,\alpha\rangle = \langle\alpha|\,'A|\,\alpha\rangle'. \tag{5.51}$$

在上式里$A$是定义于场态矢量空间的一个任意的算符。假定在变换（5.50）之下，场态矢量按下式变换：

$$|\,\alpha\rangle' = U(\omega,\varepsilon)|\,\alpha\rangle \tag{5.52}$$

则因场的状态满足迭加原理，故$U$必须是线性变换。又因在四维时空的坐标变换之下，场态矢量的范数不变，即$\langle\alpha|\,'\alpha\rangle' = \langle\alpha|\,\alpha\rangle$，故$U$必须是幺正变换：

$$U^+(\omega,\varepsilon) = U^{-1}(\omega,\varepsilon). \tag{5.53}$$

把（5.52）代回（5.51），立即得到算符$A$的变换法则：〔注1〕

$$A' = U^+AU,$$

为了确定起见，假定算符$A$便是由所有场分量算符$\phi_A(x)$排成的列矩阵$\left[\phi_A(x)\right]$，则上式成为：

---

〔注1〕 在（5.50）之下态矢量经受的$U$变换，其具体形式由$\phi_A(x)$的变换性质决定。因而这里的计算步骤不能误解为：态矢量的变换性质决定了场的变换性质。这是因为态矢量不显含$x$，而且我们在Heisenberg图景中工作，态矢量与$t$无关。

$$\left[\phi'_A(x)\right] = U^+\left[\phi_A(x)\right]U. \tag{5.54}$$

为了找到（5.54）式的幺正变换$U$，我们来回忆量子力学波函数在变换（5.50）之下的变换法则〔参见（3.64）和（3.74）〕：

$$\phi'_A(x') = \phi_A(x) + \frac{i}{2}\sum_{B=1}^{N}\omega_{\rho\sigma}(\widehat{\mathscr{S}}_{\rho\sigma})_{AB}\phi_B(x), \tag{5.55}$$

将它写成主动变换的形式，就有：

$$\phi'_A(x) = \phi_A(x) - \delta x_\mu\partial_\mu\phi_A(x) + \frac{i}{2}\sum_{B=1}^{N}\omega_{\rho\sigma}(\widehat{\mathscr{S}}_{\rho\sigma})_{AB}\phi_B(x)$$

$$= (1-\varepsilon_\mu\partial_\mu - \omega_{\mu\nu}x_\nu\partial_\mu)\phi_A(x) + \frac{i}{2}\sum_{B=1}^{N}\omega_{\rho\sigma}(\widehat{\mathscr{S}}_{\rho\sigma})_{AB}\phi_B(x).$$

现在把波函数的所有分量$\phi_A(x)$排成$N\times 1$矩阵$\left[\phi_A(x)\right]$，则上式成为

$$\left[\phi'_A(x)\right] = (I_N - \varepsilon_\mu\partial_\mu - \omega_{\mu\nu}x_\nu\partial_\mu + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\widehat{\mathscr{S}}_{\mu\nu})\left[\phi_A(x)\right]$$

$$= (I_N - i\varepsilon_\mu\widehat{k}_\mu + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(x_\mu\widehat{k}_\nu - x_\nu\widehat{k}_\mu) + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\widehat{\mathscr{S}}_{\mu\nu})\left[\phi_A(x)\right]$$

$$= (I_N - i\varepsilon_\mu\widehat{k}_\mu + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\widehat{J}_{\mu\nu})\left[\phi_A(x)\right]. \tag{5.56}$$

式中$\widehat{k}_\mu = -i\partial_\mu$和$\widehat{J}_{\mu\nu} = x_\mu\widehat{k}_\nu - x_\nu\widehat{k}_\mu + \widehat{\mathscr{S}}_{\mu\nu}$分别是量子力学里的能量、动量矢量算符和总角动量张量算符。$I_N$是$N\times N$单位矩阵。我们可以把（5.56）式写成如下的指数形式：

$$\left[\phi'_A(x)\right] = e^{-i\varepsilon_\mu\widehat{k}_\mu + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\widehat{J}_{\mu\nu}}\left[\phi_A(x)\right] \tag{5.57}$$

按照群论，变换（5.50）的全体（包括有限变换）构成非齐次Lorentz群（$\varepsilon_\mu$和$\omega_{\mu\nu}$便是这个群的无穷小参数），而变换（5.57）的全体则构成这个群的一个线性表示，这个表示的生成元便是$\widehat{k}_\mu$和$\frac{1}{2}\widehat{J}_{\mu\nu}$。

类比于（5.57）式，假定（5.54）式的幺正变换$U$为：

$$U(\omega,\varepsilon) = e^{-i\varepsilon_\mu P_\mu + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M_{\mu\nu}}. \tag{5.58}$$

其中，$P_\mu$和$M_{\mu\nu}$分别是量子场的能量、动量矢量算符[注1]和总角动量张量算符。现在，这些算符又是非齐次Lorentz群的表示生成元．特别地，按照（3.99）$a$和（3.99）$b$，可将（5.58）式重写为

$$U(\omega,\varepsilon)=e^{-iG(t)}, \tag{5.59}$$

其中，

$$G(t)=\varepsilon_\mu P_\mu-\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}M_{\mu\nu}. \tag{5.60}$$

是量子场的守恒量算符．极易证明，它是厄米算符．我们看到，在量子场论里，场算符的主动变换（5.54）是由算符$G(t)$"生成"的．可以把$G(t)$称为场的主动变换的生成元，它与群表示生成元$P_\mu$、$M_{\mu\nu}$之间有着（5.60）式的简单关系．

为了确信（5.59）式的正确性，我们把它代入（5.54）式，并略去二阶以上无穷小量，由此得到

$$\begin{aligned}\left\{\phi'_A(x)\right\}&=[1+iG(t)]\left\{\phi_A(x)\right\}[1-iG(t)]\\&=\left\{\phi_A(x)\right\}+\frac{1}{i}\left[\left\{\phi_A(x)\right\},G(t)\right].\end{aligned} \tag{5.61}$$

因为列矩阵$\left\{\phi_A(x)\right\}$与算符$G(t)$可以对易，即量子场对易（或反对易）括号只是对场态矢量空间的算符而言的，故上式可简化为：

$$\phi'_A(x)=\phi_A(x)+\frac{1}{i}[\phi_A(x),\ G(t)]. \tag{5.62}$$

由此立即得到与经典关系（3.100）$a$对应的量子关系：

$$\delta\phi_A(x)=\frac{1}{i}[\phi_A(x),G(t)]. \tag{5.63a}$$

对于Bose场此式可通过对应关系式

$$[\phi_A(x),G(t)]_{PB}\Longrightarrow\frac{1}{i}[\phi_A(x),G(t)],$$

由（3.100）$a$式直接得到〔也可利用场的正则等时对易关系来验证（5.63）$a$式〕．又因为$G(t)$是厄米算符，且$\dot{G}(t)=0$，故由（5.63）$a$容易得到与（3.100）$b$对应的量子关系：

---

〔注1〕 如果我们要求$P_\mu$的期望值是一个Lorentz矢量的分量。则算符$P_\mu$就必须是一个Lorentz矢量算符：$\langle P_\mu\rangle'=\langle P_\mu\rangle+\omega_{\mu\nu}\langle P_\nu\rangle=\langle P_\mu+\omega_{\mu\nu}P_\nu\rangle$．在经典场情形下，$P_\mu$是一个Lorentz矢量的分量〔见（3.67）式及其后面的叙述〕，但在量子化之后，算符$P_\mu$不是无条件地构成一个Lorentz矢量算符，仅当定义真空态是$E_0=0$的场态时，$P_\mu$才是一个Lorentz矢量算符．因此，抛弃零点能量$E_0$是保证量子场论的Lorentz协变性的必要条件。

$$\delta\pi_A(\mathbf{x},t)=\frac{1}{i}[\pi_A(\mathbf{x},t),G(t)]. \tag{5.63b}$$

因此，我们证明了（5.59）式的正确性.

对于量子化标量场，（5.54）、（5.62）和（5.63）诸式分别成为：

$$\phi'(x)=U^+\phi(x)U, \tag{5.64}$$

$$\phi'(x)=\phi(x)+\frac{1}{i}[\phi(x),G(t)] \tag{5.65}$$

$$\delta\phi(x)=\frac{1}{i}[\phi(\mathbf{x},t),G(t)] \tag{5.66}$$

其中，幺正算符$U$由（5.59）式确定．由于$G(t)$的厄米性和守恒性，不难证明$\pi(x)$、$\phi^+(x)$、$\pi^+(x)$也满足（5.64）—（5.66）式.

以上结果是从（5.51）式出发而得到的．另方面，（5.55）式同样是经典场的变换法则，现在把它写成如下形式：

$$\left\{\phi'_A(x')\right\}=D(\omega,\ \varepsilon)\left\{\phi_A(x)\right\}, \tag{5.67}$$

从（5.55）式容易看出，$D(\omega,\varepsilon)=e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathscr{S}_{\mu\nu}}$．在上式里以$x$代替$x'$得到：

$$\left\{\phi'_A(x)\right\}=D(\omega,\varepsilon)\left\{\phi_A[a^{-1}(x-\varepsilon)]\right\}. \tag{5.68}$$

其中，$a=\left\{a_{\mu\nu}\right\}=\left\{\delta_{\mu\nu}+\omega_{\mu\nu}\right\}$，$\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)$．在对场进行量子化之后，（5.67）和（5.68）同样是量子场算符$\phi_A(x)$在（5.50）式之下的变换法则．因此，应有以下相容性条件成立：

$$U^+(\omega,\ \varepsilon)\left\{\phi_A(x)\right\}U(\omega,\ \varepsilon)=D(\omega,\ \varepsilon)\left\{\phi_A[a^{-1}(x-\varepsilon)]\right\}. \tag{5.69}$$

幺正变换$U$与变换矩阵$D$作用于不同的空间，它们彼此对易，因而相容性条件又可写为：

$$U(\omega,\ \varepsilon)\left\{\phi_A(x)\right\}U^+(\omega,\varepsilon)=D^{-1}(\omega,\varepsilon)\left\{\phi_A(ax+\varepsilon)\right\}. \tag{5.70}$$

在从（5.69）式过渡到（5.70）式时，曾以$x$代替$a^{-1}(x-\varepsilon)$．当只考虑时空平移变换时，由（5.67）得到$D(\omega,\varepsilon)\equiv I_N$，因而上式简化为

$$U(\varepsilon)\left\{\phi_A(x)\right\}U^+(\varepsilon)=\left\{\phi_A(x+\varepsilon)\right\},$$

或

$$e^{-i\varepsilon\cdot P}\Big[\phi_A(x)\Big]e^{i\varepsilon\cdot P}=\Big[\phi_A(x+\varepsilon)\Big], \tag{5.71a}$$

因为任一有限的幺正变换$U(b)$是无穷多个无穷小变换的连续施行：

$$U(b)=\lim_{n\to\infty}(e^{-i\varepsilon\cdot P})^n=\lim_{n\to\infty}(e^{-i\frac{b}{n}\cdot P})^n=e^{-ib\cdot P},$$

所以在有限的时、空平移变换 $x'_\mu=x_\mu+b_\mu$之下，场算符按下式变换：

$$e^{-ib\cdot P}\Big[\phi_A(x)\Big]e^{ib\cdot P}=\Big[\phi_A(x+b)\Big]. \tag{5.71b}$$

对于量子化标量场，此式成为：

$$e^{-ib\cdot P}\phi(x)e^{ib\cdot P}=\phi(x+b). \tag{5.72}$$

(5.72) 式显然也适用于$\pi(x),\phi^+(x),\pi^+(x)$.

**规范对称性的情形**：类似于 (5.54) 式，假定荷电场的场算符在整体$U(1)$规范变换下按下式变换：

$$\Big[\phi'_A(x)\Big]=U^+\Big[\phi_A(x)\Big]U, \tag{5.73a}$$

其中，算符$U$是$U(1)$群的元素：

$$U=e^{-i\alpha eQ}. \tag{5.73b}$$

$Q$是场的广义荷算符，$eQ$即是场的总电荷算符，它现在又是一维幺正群$U(1)$的生成元；$\alpha$是$U(1)$群的无穷小参数．把 (5.73)$b$ 代入 (5.73)$a$ ，并略去二阶以上无穷小量即得：

$$\Big[\phi'_A(x)\Big]=\Big[\phi_A(x)\Big]+\frac{1}{i}\Big[\Big[\phi_A(x)\Big],\ -\alpha eQ\Big]$$

或者

$$\phi'_A(x)=\phi_A(x)+\frac{1}{i}[\phi_A(x),\ -\alpha eQ]. \tag{5.74}$$

因此，

$$\delta\phi_A(x)=\frac{1}{i}[\phi_A(x),\ -\alpha eQ], \tag{5.75a}$$

利用算符$Q$的厄米性和时间无关性，可由上式得到

$$\delta\pi_A(x)=\frac{1}{i}[\pi_A(x),\ -\alpha eQ], \tag{5.75b}$$

(5.75) 式正是与经典关系 (3.101) 对应的量子关系．我们同样可以通过经典的泛函Poisson括号与量子对易括号之间的对应关系由 (3.101) 式得到 (5.75) 式．对于非厄米标量场，同样有：

$$\delta\phi(\mathbf{x},t)=\frac{1}{i}[\phi(\mathbf{x},t),\ -\alpha eQ(t)],\tag{5.76a}$$

$$\delta\pi(\mathbf{x},t)=\frac{1}{i}[\pi(\mathbf{x},t),\ -\alpha eQ(t)].\tag{5.76b}$$

以上二式的厄米共轭式分别就是 $\phi^+(\mathbf{x},t)$、$\pi^+(\mathbf{x},t)$ 所满足的量子关系．因此可以确信(5.73)式的正确性．我们看到，场的$U(1)$规范变换(即是主动变换)的生成元$-\alpha eQ(t)$与$U(1)$群的生成元$eQ(t)$只相差群的实参数$\alpha$．

综合以上两种情形的讨论，可将Noether定理表述如下：在任意的连续对称变换之下，场算符的主动变换的生成元是某个守恒量的算符$G(t)$．算符$G(t)$与量子场的守恒物理量算符相联系，例如在非齐次Lorentz变换(5.50)之下，$G(t)=\varepsilon_\mu P_\mu-\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}M_{\mu\nu}$，它与场的能量、动量算符和角动量算符相互联系，而在电荷规范变换之下，$G(t)=-\alpha eQ(t)$又与场的总电荷算符$eQ(t)$相互联系．由于$P_\mu$、$M_{\mu\nu}$和$eQ(t)$都是对称变换群的相应表示的生成元，因而在量子场情形下生成元$G(t)$的定义与群论的定义之间只相差群的无穷小变换参数。〔注1〕

## §4 分立对称性

现在来讨论量子化标量场的另一类对称性——分立对称性．分立对称变换是分立群的元素，它们不依赖于任何连续参数，因而不存在无穷小变换．

### （一）空间反演变换

空间反演的意义已在第一章，§4述及．对于标量场，在空间反演变换

$$\mathbf{x}'=-\mathbf{x},\qquad t'=t,\tag{5.77}$$

之下，场函数按以下二式之一变换：

$$\mathrm{P}\phi(\mathbf{x},t)=\phi'(\mathbf{x}',t)=\phi(\mathbf{x},t),\tag{5.78a}$$

$$\mathrm{P}\phi(\mathbf{x},t)=\phi'(\mathbf{x}',t)=-\phi(\mathbf{x},t).\tag{5.78b}$$

式中，P是量子力学意义下的宇称算符，其本征值为±1．标量场具有偶宇称，赝标量

---

〔注1〕 根据群论，如果系统的动力学性质由作用量原理导出，而且对称变换群保持作用积分不变，则群表示的生成元便是一些守恒物理量(顶多相差常数)．参见例如ROBERT GILMORE "Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications", pp.145—146, Wiley, 1974.

场具有奇宇称[注1]，因此（5.78）$a$适用于标量场，（5.78）$b$适用于赝标量场。

可以把（5.78）写成主动变换的形式：

$$\phi(\mathbf{x},t)\longrightarrow\phi'(\mathbf{x},t)=\phi(-\mathbf{x},t), \tag{5.79a}$$

$$\phi(\mathbf{x},t)\longrightarrow\phi'(\mathbf{x},t)=-\phi(-\mathbf{x},t). \tag{5.79b}$$

对于量子场，$\phi(\mathbf{x},t)$是算符，可以找到Hilbert空间的幺正算符$\mathscr{P}_s$(对标量场)或$\mathscr{P}_{ps}$(对赝标量场)，使得：

$$\phi'(\mathbf{x},t)=\mathscr{P}_s\phi(\mathbf{x},t)\mathscr{P}_s^{-1}, \quad \text{(对标量场)} \tag{5.80a}$$

$$\phi'(\mathbf{x},t)=\mathscr{P}_{ps}\phi(\mathbf{x},t)\mathscr{P}_{ps}^{-1}. \quad \text{(对赝标量场)} \tag{5.80b}$$

（5.80）式与（5.79）式应当是相容的，因而有：

$$\mathscr{P}_s\phi(\mathbf{x},t)\mathscr{P}_s^{-1}=\phi(-\mathbf{x},t), \tag{5.81a}$$

$$\mathscr{P}_{ps}\phi(\mathbf{x},t)\mathscr{P}_{ps}^{-1}=-\phi(-\mathbf{x},t). \tag{5.81b}$$

幺正算符$\mathscr{P}_s$和$\mathscr{P}_{ps}$便是量子场的空间反演算符或宇称算符．为了找到它们的显示表示式，需要把（5.81）式转到动量空间．为此，以非厄米标量场为例，将（5.43）$a$代入（5.81）$a$：

$$\mathscr{P}_s\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\left(a_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega_k t}+b_{\mathbf{k}}^{+}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+i\omega_k t}\right)\mathscr{P}_s^{-1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\left(a_{\mathbf{k}}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega_k t}+b_{\mathbf{k}}^{+}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+i\omega_k t}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\left(a_{-\mathbf{k}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega_k t}+b_{-\mathbf{k}}^{+}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+i\omega_k t}\right)$$

此式给出：

$$\mathscr{P}_s a_{\mathbf{k}}\mathscr{P}_s^{-1}=a_{-\mathbf{k}}, \tag{5.82a}$$

$$\mathscr{P}_s b_{\mathbf{k}}\mathscr{P}_s^{-1}=b_{-\mathbf{k}}. \tag{5.82b}$$

同样地，将（5.43）$a$代入（5.81）$b$可得：

$$\mathscr{P}_{ps}a_{\mathbf{k}}\mathscr{P}_{ps}^{-1}=-a_{-\mathbf{k}}, \tag{5.83a}$$

$$\mathscr{P}_{ps}b_{\mathbf{k}}\mathscr{P}_{ps}^{-1}=-b_{-\mathbf{k}}. \tag{5.83b}$$

（5.82）和（5.83）分别是（5.81）$a$和（5.81）$b$的动量空间表示式．现在就从这两式来

〔注1〕 宇称算符与角动量算符具有共同本征态，当粒子轨道角动量量子数为 $l=0,1,2,3\cdots\cdots$时，其空间宇称为$\xi(-1)^l$。这里，$\xi$是粒子的内禀宇称。因此，当 $l=0,2\cdots\cdots$时，标量粒子空间宇称为偶，赝标量粒子空间宇称为奇；而当 $l=1,3\cdots\cdots$时情形正好相反，我们这里及以后只考虑 $l=0$ 的情况，即只考虑内禀宇称。需要详细了解的读者，可参看P.罗曼。《基本粒子理论》，pp.245——250。

解出$\mathscr{P}_s$和$\mathscr{P}_{ps}$. 幺正算符$\mathscr{P}_s$的一般形式为

$$\mathscr{P}_s = e^{i\lambda S}. \tag{5.84}$$

其中，$\lambda$为待定常数，$S$是厄米算符. 将（5.84）代入（5.82）得：

$$e^{i\lambda S}a_{\mathbf{k}}e^{-i\lambda S} = a_{-\mathbf{k}}, \tag{5.85a}$$

$$e^{i\lambda S}b_{\mathbf{k}}e^{-i\lambda S} = b_{-\mathbf{k}}. \tag{5.85b}$$

要从（5.85)$a$式〔或（5.85)$b$式〕里确定常数$\lambda$和厄米算符$S$，没有直接简单的方法. 但可以利用等式〔注 1〕

$$e^{i\lambda S}Oe^{-i\lambda S} = O + i\lambda[S, O] + \frac{1}{2!}i^2\lambda^2[S, [S, O]]$$

$$+ \frac{1}{3!}i^3\lambda^3[S, [S, [S, O]]] + \cdots\cdots \tag{5.86}$$

将（5.85)$a$式之左边展开，并先取如下的试探解〔注 2〕：

$$S = \sum_{\mathbf{k}}(a_{\mathbf{k}}^{+}a_{-\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}}^{+}b_{-\mathbf{k}}). \tag{5.87}$$

于是，

$$e^{i\lambda S}a_{\mathbf{k}}e^{-i\lambda S} = a_{\mathbf{k}}\left(1 - \frac{1}{2!}\lambda^2 + \frac{1}{4!}\lambda^4 - \cdots\cdots\right)$$

$$- ia_{-\mathbf{k}}\left(\lambda - \frac{1}{3!}\lambda^3 + \frac{1}{5!}\lambda^5 - \cdots\cdots\right)$$

$$= a_{\mathbf{k}}\cos\lambda - ia_{-\mathbf{k}}\sin\lambda. \tag{5.88}$$

为了使（5.88）式尽可能接近（5.85)$a$式，应取$\lambda = \frac{\pi}{2}$. 这时，（5.88）成为

$$e^{i\lambda S}a_{\mathbf{k}}e^{-i\lambda S} = -ia_{-\mathbf{k}}. \tag{5.89}$$

综上所述，我们可先取（5.85)$a$的试探解为：

$$\mathscr{P}_s = e^{i\frac{\pi}{2}\sum_{\mathbf{k}}(a_{\mathbf{k}}^{+}a_{-\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}}^{+}b_{-\mathbf{k}})}. \tag{5.90}$$

由于（5.85)$a$与（5.85)$b$的一致性，因而上式也是（5.85)$b$的试探解. 但这个试探解显然不满足（5.85）式. 为了进一步得到所需的解，可对(5.89）式再作幺正变换$e^{i\lambda' S'}$，使得

〔注 1〕 等式（5.86），可将其左边展开为泰勒级数来直接进行验证。

〔注 2〕 我们这里使用的求解方法完全取自DAVID LURIE,《Particles and Fields》, pp. 103—104, Wiley, 1968.

$$e^{i\lambda' S'} e^{i\frac{\pi}{2}S} a_{k} e^{-i\frac{\pi}{2}S} e^{-i\lambda' S'}$$

$$= e^{i\lambda' S'}(-ia_{-k})e^{-i\lambda' S'} = a_{-k}, \tag{5.91a}$$

即

$$e^{i\lambda' S'} a_k e^{-i\lambda' S'} = ia_k. \tag{5.91b}$$

注意到我们曾从（5.87）式导致（5.88）式，就可取适当的厄米算符$S'$，使得(5.91)式左边成为：

$$e^{i\lambda' S'} a_k e^{-i\lambda' S'} = a_k\cos\lambda' - ia_k\sin\lambda', \tag{5.92}$$

这样，只需选取

$$\lambda' = -\frac{\pi}{2}, \tag{5.93a}$$

就可使（5.91）得到满足. 不难验证，满足（5.92）的$S'$为：

$$S' = \sum_k (a_k^+ a_k + b_k^+ b_k). \tag{5.93b}$$

至此，我们得到（5.85）$a$式的解如下：

$$\mathscr{P}_s = e^{-i\frac{\pi}{2}S'} e^{i\frac{\pi}{2}S}$$

$$= \exp\left\{-\frac{i}{2}\pi\sum_k (a_k^+ a_k - a_k^+ a_{-k} + b_k^+ b_k - b_k^+ b_{-k})\right\}. \tag{5.94}$$

这便是在标量场情形下，空间反演算符的显示表示式. 对于赝标量场，用类似方法求解（5.83）式可得：

$$\mathscr{P}_{ps} = \exp\left\{\frac{i}{2}\pi\sum_k (a_k^+ a_k + a_k^+ a_{-k} + b_k^+ b_k + b_k^+ b_{-k})\right\}. \tag{5.95}$$

利用（5.94）和（5.95）可以方便地讨论场物理量的空间反演性质. 因为场的能量算符、动量算符和电荷算符都是形如$a_k^+ a_k$、$b_k^+ b_k$的一些项之和，而且对$\mathbf{k}$的求和遍及整个动量空间，故按照（5.82）式显然有：

$$\mathscr{P}_s \mathrm{H} \mathscr{P}_s^{-1} = \mathrm{H}, \tag{5.96}$$

$$\mathscr{P}_s \mathbf{P} \mathscr{P}_s^{-1} = -\mathbf{P}, \tag{5.97}$$

$$\mathscr{P}_s eQ \mathscr{P}_s^{-1} = eQ. \tag{5.98}$$

以上三式表明，量子场的能量和电荷均不随空间反演而变化；而量子场动量仅改变符号，这与动量是一个空间性极矢量之事实一致. 由于我们在进行量子化时曾把场算符展开为平面波，因而场的粒子解释是在动量空间给出的. 这时，场的角动量没有确定值。但我们仍然可以在坐标空间来证明：

$$\mathscr{P}_s M_{jk} \mathscr{P}_s^{-1} = M_{jk}. \tag{5.99}$$

为了证明此式，只需利用场算符的变换法则（5.81）$a$以及$M_{jk}$的坐标空间表示式(3.81)即可．（5.99）式与角动量是赝矢量的事实一致．（5.96）式——（5.99）式对$\mathscr{P}_{ps}$也同样成立。

现在来看标量粒子的内禀宇称．首先把宇称算符作用于量子场的最低激发态 $a_k^+|0\rangle$ 和$b_k^+|0\rangle$：

$$\mathscr{P}_s a_k^+ | 0 \rangle = \mathscr{P}_s a_k^+ \mathscr{P}_s^{-1} \mathscr{P}_s | 0 \rangle = a_{-k}^+ | 0 \rangle, \tag{5.100a}$$

同样地，
$$\mathscr{P}_s b_k^+ | 0 \rangle = b_{-k}^+ | 0 \rangle; \tag{5.100b}$$

$$\mathscr{P}_{ps} a_k^+ | 0 \rangle = \mathscr{P}_{ps} a_k^+ \mathscr{P}_{ps}^{-1} \mathscr{P}_{ps} | 0 \rangle = - a_{-k}^+ | 0 \rangle, \tag{5.101a}$$

同样地，
$$\mathscr{P}_{ps} b_k^+ | 0 \rangle = - b_{-k}^+ | 0 \rangle. \tag{5.101b}$$

以上诸式表明，这些一粒子态都不是宇称算符的本征态．这一点，正是（5.97）式的必然结果．因为宇称算符与动量算符不对易，它们没有共同本征态．但是，在粒子自身参考系里，上述这些一粒子态都是宇称的本征态：

$$\mathscr{P}_s a_0^+ | 0 \rangle = a_0^+ | 0 \rangle, \tag{5.102a}$$

（对标量场）

$$\mathscr{P}_s b_0^+ | 0 \rangle = b_0^+ | 0 \rangle; \tag{5.102b}$$

$$\mathscr{P}_{ps} a_0^+ | 0 \rangle = - a_0^+ | 0 \rangle, \tag{5.103a}$$

（对赝标量场）

$$\mathscr{P}_{ps} b_0^+ | 0 \rangle = - b_0^+ | 0 \rangle. \tag{5.103b}$$

由此可见，标量粒子具有偶宇称，赝标量粒子具有奇宇称．由于在上面的推导过程里使用了如下的宇称本征值方程[注1]：

$$\mathscr{P}_s | 0 \rangle = | 0 \rangle, \tag{5.104a}$$

$$\mathscr{P}_{ps} | 0 \rangle = | 0 \rangle, \tag{5.104b}$$

因此，（5.102）式和（5.103）式的结论包含着真空态具有偶宇称这一约定．另方面，我们是在粒子自身参考系里得到（5.102）式和（5.103）式，这一点正好反映了内禀宇称是粒子内部固有的属性这一事实．

现在再回到（5.96）、（5.98）和（5.99），这三式表明，量子场可以处于能量、角动量、电荷和宇称均具有确定值的状态．如果我们不是把场展开为平面波，而是展开为球面波，就可以清楚地看出这一点[注2]．此外，（5.96）式还表明，在自由场情形下宇称总是守恒的．

---

〔注1〕 将（5.94）和（5.95）形式地展开为幂级数，并利用$a_k|0\rangle = b_k|0\rangle = 0$便不难验证（5.104）式．

〔注2〕 展开为球面波的量子化方法详见朱洪元著，《量子场论》，科学出版社，1960年．

量子化标量场理论具有空间反演不变性．这一点与自由场情形下宇称守恒的事实有关．在第一章里，我们未曾证明K—G方程的空间反演不变性，由于K—G方程包含对空间坐标的二阶导数，而且方程的解又是Lorentz标量函数（或赝标量函数），因而这是不证自明的．为了证明理论的空间反演不变性，只需检验对易关系的不变性：以$\mathscr{P}_s$和$\mathscr{P}_s^{-1}$分别左乘和右乘（5.29）式就得到反演后的对易关系为

$$[\phi'(\mathbf{x},t),\pi'(\mathbf{y},t)]=i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{5.105a}$$

或

$$[\phi(-\mathbf{x},t),\pi(-\mathbf{y},t)]=i\delta^{(3)}[(-\mathbf{x})-(-\mathbf{y})]; \tag{5.105b}$$

$$[\phi'^{+}(\mathbf{x},t),\pi'^{+}(\mathbf{y},t)]=i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{5.106a}$$

或

$$[\phi^{+}(-\mathbf{x},t),\pi^{+}(-\mathbf{y},t)]=i\delta^{(3)}[(-\mathbf{x})-(-\mathbf{y})]. \tag{5.106b}$$

对于赝标量场可用完全一样的方法进行证明．

## （二）电荷共轭变换

在第一章§10里曾经从量子力学的角度讨论了Dirac理论的电荷共轭变换．现在，我们从量子场论的角度来讨论这一变换．由于厄米标量场的粒子没有对应的反粒子，所以这里只讨论非厄米标量场的电荷共轭变换．由§2知道：非厄米标量场有两套独立的自由度，分别由场算符$\phi(x)$和$\phi^{+}(x)$来标志．而存在两套自由度的事实又与量子场有两类粒子（标量粒子与反粒子）的事实相关．既然电荷共轭变换是交换粒子与反粒子的操作，它必定使场的两套自由度相互交换．由此，可以定义非厄米标量场的电荷共轭变换如下：

$$\mathscr{C}\phi(x)\mathscr{C}^{-1}=\phi^{+}(x), \tag{5.107a}$$

$$\mathscr{C}\phi^{+}(x)\mathscr{C}^{-1}=\phi(x). \tag{5.107b}$$

利用场的平面波展式（5.43），极易将电荷共轭变换的定义（5.107）转到动量空间：

$$\mathscr{C}\phi(x)\mathscr{C}^{-1}=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\left(\mathscr{C}a_{\mathbf{k}}\mathscr{C}^{-1}e^{ik\cdot x}+\mathscr{C}b_{\mathbf{k}}^{+}\mathscr{C}^{-1}e^{-ik\cdot x}\right)$$

$$=\phi^{+}(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\left(b_{\mathbf{k}}e^{ik\cdot x}+a_{\mathbf{k}}^{+}e^{-ik\cdot x}\right),$$

由上式立即得到：

$$\mathscr{C}a_{\mathbf{k}}\mathscr{C}^{-1}=b_{\mathbf{k}}, \tag{5.108a}$$

$$\mathscr{C}b_{\mathbf{k}}\mathscr{C}^{-1}=a_{\mathbf{k}}. \tag{5.108b}$$

把（5.108）与（5.82）比较可知，$\mathscr{C}$的表示式可以这样得到：在$\mathscr{P}_s$的表示式里把$a_{-\mathbf{k}}$换成$b_{\mathbf{k}}$，$b_{-\mathbf{k}}$换成$a_{\mathbf{k}}$：

$$\mathscr{C} = \exp\left\{-\frac{i\pi}{2}\sum_{k}'(a_k^+ a_k - a_k^+ b_k + b_k^+ b_k - b_k^+ a_k)\right\} \tag{5.109}$$

(5.108) 式表明，电荷共轭变换直接把具有 $n$ 个粒子的场态与具有 $n$ 个反粒子的场态互换，即直接把粒子与反粒子在理论里的地位互换．由此可以推断，真空态将不受电荷共轭变换的影响．事实上，只要把 (5.109) 右边展成幂级数便立即得到

$$\mathscr{C}\,|0\rangle = |0\rangle. \tag{5.110}$$

在电荷共轭变换下，场的能量、动量不变．这一点，只要注意到

$$\mathscr{C}(a_k^+ a_k + b_k^+ b_k)\mathscr{C}^{-1} = b_k^+ b_k + a_k^+ a_k,$$

就一目了然．但场的守恒流密度矢量的变换性质需要稍微详细地进行讨论．按照(3.92)和 (3.33)，并考虑到 $J$ 为厄米算符，$J_4$为反厄米算符，就得到

$$J_\mu = i[(\partial_\mu\phi^+)\phi - \phi^+(\partial_\mu\phi)]. \tag{5.111}$$

由此式定义的$J_\mu$在电荷共轭变换下没有任何对称性．这是不足为怪的．因为这时，在广义守恒荷Q的动量空间表示式里将出现无穷大的零点荷〔参见(5.48) 式后面的叙述〕，正是这个无穷大的零点荷破坏了$J_\mu$在电荷共轭变换下应当具有的对称性质．因此，必须把零点荷去掉．为此，可重新定义$J_\mu$为

$$J_\mu = i:[(\partial_\mu\phi^+)\phi - \phi^+(\partial_\mu\phi)]: \tag{5.112}$$

据此定义，并利用

$$\mathscr{C}\phi^{(\pm)}\mathscr{C}^{-1} = \phi^{+(\pm)}, \quad \mathscr{C}\phi^{+(\pm)}\mathscr{C}^{-1} = \phi^{(\pm)}, \tag{5.113}$$

以及

$$[\phi^{(+)}, \partial_\mu\phi^{+(+)}] = [\phi^{(-)}, \partial_\mu\phi^{+(-)}] = 0, \tag{5.114}$$

就得到

$$\mathscr{C}J_\mu\mathscr{C}^{-1} = -J_\mu. \tag{5.115}$$

此式表明，粒子与反粒子具有等大反号的广义荷（例如$\pi^+$和$\pi^-$、$K^+$和$K^-$具有反号的电荷；而$K^0$与$\tilde{K}^0$则具有等大反号的奇异数），这与实验事实是一致的．由此可见，量子场的零点荷（和零点能量一样）不但会使场在任一状态下的广义荷成为无限大，而且破坏了理论的对称性质．另方面，这些在实验上观测不到的零点量的出现，又是量子场论的基本假设和内在逻辑性的必然结果，人们无法从理论上提出足够的理由来使它们不再出现，而只能参照实验事实把它们抛弃掉．或者说，把它们吸收到场的能量和广义荷的新定义里去（即重新定义真空态下的一切物理量均为零）．这样，在量子场论里，零点量的出现应当看成是第一类发散困难（第二类发散困难是由微扰级数的高阶效应所产生的），而去掉零点量的处理方法同样应当看成是一种简易的重整化方法．

极易证明，量子化标量场理论具有电荷共轭不变性．这一工作请读者自己去做。

## （三）时间反演变换〔注1〕

所谓时间反演，就是把计算时间的方向倒转．或者说，把时间轴的方向倒转：

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}, \qquad (5.116)$$
$$t' = -t.$$

如果把一个实际物理过程拍成电影，然后把电影胶卷倒过来放映，并从银幕上进行观察，这就相当于在时间反演后的坐标系里观察该物理过程的变化．这时，我们所看到的便是运动方程的时间反演解所描写的过程．与反演前的过程相比，我们将首先看到一个物理过程的结束，然后才看到物理过程的开始．

一个物理学理论的时间反演不变性，是指该理论的基本方程式在时间反演下不改变形式．在经典力学里，实验上检验时间反演不变性的方法是直接观察基本方程式的时间反演解所描写的过程（即逆过程）是否存在．当系统的自由度数目不大时，只要理论上的时间反演不变性成立，则逆过程是存在的．但是对于由大量质点组成的体系，时间反演解在客观上是不可能实现的．量子场是无限自由度的体系，因而上述实验检验方法不再适用．在量子场论里，从实验上检验时间反演不变性的主要方法是看倒易定理是否成立〔注2〕．我们不去涉及这一定理的内容，而仅仅指出，人们已经做了大量工作来检验时间反演不变性的理论预言．结果表明，在三种基本相互作用（强、电、弱）里，时间反演不变性是普遍成立的．唯一破坏这种不变性的例子是中性长寿命K介子的衰变．而对于自由场，时间反演不变性均成立．因此，我们将在假定时间反演不变性成立的前提下来寻找保证这种不变性的场算符的对称变换．

以非厄米标量场为例，在时间反演变换（5.116）之下，场算符按下式变换：

$$\phi'(\mathbf{x}', t') = \pm\phi(\mathbf{x}, t), \qquad (5.117)a$$

$$\phi^{+\prime}(\mathbf{x}', t') = \pm\phi^{+}(\mathbf{x}, t). \qquad (5.117)b$$

其中，正号相应于时间性标量场，负号相应于时间性赝标量场．与空间反演的情形类似，可将（5.117）改写为如下主动变换：

$$\phi(\mathbf{x}, t) \longrightarrow \phi'(\mathbf{x}, t) = \pm\phi(\mathbf{x}, -t), \qquad (5.118)a$$

$$\phi^{+}(\mathbf{x}, t) \longrightarrow \phi^{+\prime}(\mathbf{x}, t) = \pm\phi^{+}(\mathbf{x}, -t) \qquad (5.118)b$$

假定$\mathscr{T}$是场态矢量空间的算符，而且$\phi'(\mathbf{x}, t) = \mathscr{T}\phi(\mathbf{x}, t)\mathscr{T}^{-1}$，$\phi^{+\prime}(\mathbf{x}, t) = \mathscr{T}\phi^{+}(\mathbf{x}, t)\mathscr{T}^{-1}$，此二式与（5.118）式应当是相容的，故有：

$$\mathscr{T}\phi(\mathbf{x}, t)\mathscr{T}^{-1} = \pm\phi(\mathbf{x}, -t) \qquad (5.119)a$$

---

〔注1〕关于时间反演的含义以及时向方向性等问题可参见苏汝铿，倪光炯，自然杂志，7（1981），pp，506—512；关于量子场论里时间反演的深入讨论，可参阅李政道，《场论与粒子物理学》，上册，第十二章，科学出版社，1980年，以及P.罗曼，《基本粒子理论》，第四章，上海科学技术出版社，1966年．

〔注2〕见李政道，"场论与粒子物理学"，上册，p.172，科学出版社，1980年．

$$\mathscr{T}\phi^+(\mathbf{x},t)\mathscr{T}^{-1}=\pm\phi^+(\mathbf{x},-t) \tag{5.119b}$$

与空间反演和电荷共轭不同之点是，在时间反演的情形下，算符$\mathscr{T}$不再是幺正算符．因若不然，尽管场方程具有时间反演不变性，但等时对易关系并不是不变的．例如我们来看（5.29）$a$式．利用（5.118）$b$和（5.119）$b$我们有

$$\mathscr{T}\pi(\mathbf{x},t)\mathscr{T}^{-1}=\mp\pi(\mathbf{x},-t), \tag{5.120}$$

因而对（5.29）$a$作幺正变换$\mathscr{T}$可得：

$$[\phi(\mathbf{x},-t),\pi(\mathbf{y},-t)]=\mathscr{T}(-i)\mathscr{T}^{-1}\mathscr{T}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathscr{T}^{-1} \tag{5.121}$$

要使（5.121）回到（5.29）$a$，就必须要求：

$$\mathscr{T}(-i)\mathscr{T}^{-1}=i,$$

换言之，$\mathscr{T}$必须具有如下形式：

$$\mathscr{T}=U\mathscr{K}, \tag{5.122}$$

其中，$U$是一个幺正算符，而$\mathscr{K}$是一个复共轭运算的算符：

$$\mathscr{K}i\mathscr{K}^{-1}=-i, \tag{5.123a}$$

$$\mathscr{K}\lambda\mathscr{K}^{-1}=\lambda^*. \tag{5.123b}$$

这里，$\lambda$是一个任意复数．我们看到，$\mathscr{T}$是一个反线性幺正算符，我们称它为反幺正算符．

为了找到$\mathscr{T}$的显示表示式，把(5.43)$a$代入(5.119)$a$，并注意幺正算符$U$对场算符的相位因子不起作用，算符$\mathscr{K}$与$a_\mathbf{k}$、$b_\mathbf{k}$可以对易，就得到

$$Ua_\mathbf{k}U^{-1}=\pm a_{-\mathbf{k}} \tag{5.124a}$$

$$Ub_\mathbf{k}U^{-1}=\pm b_{-\mathbf{k}}. \tag{5.124b}$$

当此二式右边取正号时便得到（5.82）式；而当右边取负号时，则得到（5.83）式．因此，对于时间性标量场，$U$的表示式与$\mathscr{P}_s$的表示式（5.94）相同；而对于时间性赝标量场，$U$的表示式与$\mathscr{P}_{ps}$的表示式（5.95）相同．(5.94)、(5.95) 和 (5.122) 完全确定了算符$\mathscr{T}$．

由于算符$\mathscr{K}$与$a_\mathbf{k}$、$b_\mathbf{k}$可以对易，因而与空间反演的情形一样，时间反演对场的能量、动量的影响是：

$$\mathscr{T}\mathrm{H}\mathscr{T}^{-1}=\mathrm{H}, \tag{5.125a}$$

$$\mathscr{T}\mathbf{P}\mathscr{T}^{-1}=-\mathbf{P}. \tag{5.125b}$$

利用场算符的变换法则（5.119）、（5.120）以及$M_{jk}$的表示式（3.81）可以证明：

$$\mathscr{T}M_{jk}\mathscr{T}^{-1}=-M_{jk}, \tag{5.126}$$

这一结果表明，在时间反演变换下，场的角动量方向倒转（与动量一样）〔注1〕。此外，从（5.112）可得

$$\mathscr{T} J_\mu \mathscr{T}^{-1} = :\mathscr{T} i \mathscr{T}^{-1} \mathscr{T} \{[\partial_\mu \phi^+(\mathbf{x},t)]\phi(\mathbf{x},t) - \phi^+(\mathbf{x},t)[\partial_\mu \phi(\mathbf{x},t)]\} \mathscr{T}^{-1}:$$

$$= :-i\{[\partial'_\mu \phi^+(\mathbf{x},-t)]\phi(\mathbf{x},-t) - \phi^+(\mathbf{x},-t)[(\partial'_\mu \phi(\mathbf{x},-t)]\}: = -J_\mu(\mathbf{x},-t), \quad (5.127)$$

式中，$\partial'_\mu = \mathscr{K}\partial_\mu \mathscr{K}^{-1} = (\nabla, -\frac{\partial}{\partial it})$。把（5.127）写成空间分量与时间分量分开的形式：

$$\mathscr{T} \mathbf{J} \mathscr{T}^{-1} = -\mathbf{J}(\mathbf{x},-t), \quad (5.128)a$$

$$\mathscr{T} J_0 \mathscr{T}^{-1} = J_0(\mathbf{x},-t). \quad (5.128)b$$

或者，

$$\mathbf{J}'(x') = -\mathbf{J}(x), \quad (5.129)a$$

$$J'_0(x') = J_0(x). \quad (5.129)b$$

因此，时间反演将使守恒流密度矢量 $\mathbf{J}$ 的方向倒转，而场的守恒荷不变。这一结果与物理的直觉是一致的。

## §5　对易关系的不变形式

量子场论是相对论性的量子理论。在第一章曾证明：当波函数是某类 Lorentz 协变量时，场方程式具有显示的 Lorentz 不变性。但是第四章到本章所建立的正则等时对易关系并不具有显示的不变性（虽然，我们可以利用本章 §3 的方法来证明这些等时对易关系的不变性）。在这一节里要建立不等时的对易关系，使之像场方程那样具有显示的 Lorentz不变性。

### （一）不变对易关系的建立

等时对易关系（5.29）不具有显示的 Lorentz 不变性，其原因有二：第一是它的等时性，它要求两个场算符属同一时刻的算符，而"同时性"概念与参考系有关；第二是它的正则性，在该式左边出现$\pi(x)$和$\pi^+(x)$，而这些算符都不是Lorentz协变量。据此，在建立不变对易关系时首先要放弃上述的同时性，其次要使对易括号里只出现 Lorentz 协变的算符。

以非厄米标量场为例，我们来建立$\phi(x)$和$\phi^+(x)$所满足的对易关系。首先把(5.43)式写成正、负频率部分之和：

$$\phi(x) = \phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x), \quad (5.130)a$$

---

〔注1〕 当有相互作用时，情况比较复杂，详见李政道《场论与粒子物理学》，上册，pp. 164—166. 科学出版社，1980年。

$$\phi^+(x) = \phi^{+(+)}(x) + \phi^{+(-)}(x). \tag{5.130b}$$

其中，

$$\phi^{(+)}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}a_{\mathbf{k}}e^{ik\cdot x}, \tag{5.131a}$$

$$\phi^{(-)}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}b_{\mathbf{k}}^+e^{-ik\cdot x}; \tag{5.131b}$$

$$\phi^{+(+)}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}b_{\mathbf{k}}e^{ik\cdot x}, \tag{5.132a}$$

$$\phi^{+(-)}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}a_{\mathbf{k}}^+e^{-ik\cdot x}. \tag{5.132b}$$

其次，利用对易关系（5.47）可得

$$[\phi(x), \phi^+(y)] = [\phi^{(+)}(x), \phi^{+(-)}(y)] + [\phi^{(-)}(x), \phi^{+(+)}(y)]$$

$$= \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{2\omega_k}e^{ik\cdot(x-y)} - \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{2\omega_k}e^{-ik\cdot(x-y)}. \tag{5.133}$$

令

$$i\Delta^{(+)}(x) = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{2\omega_k}e^{ik\cdot x}, \tag{5.134a}$$

$$i\Delta^{(-)}(x) = \frac{-1}{V}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{2\omega_k}e^{-ik\cdot x}. \tag{5.134b}$$

则可将（5.133）式写为

$$[\phi(x), \phi^+(y)] = i\Delta(x-y), \tag{5.135}$$

其中，

$$i\Delta(x) = i\Delta^{(+)}(x) + i\Delta^{(-)}(x). \tag{5.136}$$

（5.135）式便是所要建立的不变对易关系式．它的左边是两个Lorentz标量算符组成的对易括号，因而左边具有显示的不变性．由此便可断定右边的对易子函数$\Delta(x-y)$是一个Lorentz标量函数．证明如下．利用（4.55）式把（5.134）右边的求和转换为积分，则（5.136）式成为

$$i\Delta(x) = i\Delta^{(+)}(x) + i\Delta^{(-)}(x)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\frac{1}{2\omega_k}(e^{ik\cdot x} - e^{-ik\cdot x})$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\frac{1}{2\omega_k}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}(e^{-i\omega_k t} - e^{i\omega_k t}). \tag{5.137}$$

在得出上式最后一步时，使用了积分的如下对称关系：

$$\int d^3k e^{-ik\cdot x} = \int d^3k e^{+ik\cdot x}. \tag{5.138}$$

现在，把（5.137）中的$e^{\pm i\omega_k t}$表示为如下的积分：

$$e^{-i\omega_k t} = \int \in(k_0) e^{-ik_0 t} \delta(k_0 - \omega_k) dk_0 \tag{5.139a}$$

$$-e^{i\omega_k t} = \int \in(k_0) e^{-ik_0 t} \delta(k_0 + \omega_k) dk_0 \tag{5.139b}$$

积分变数$k_0$沿动量空间的整个时间轴变化，$\in(k_0)$是一个阶跃函数，它的定义如下：

$$\in(k_0) = \frac{k_0}{|k_0|} = \begin{cases} +1, & 当k_0 > 0 \\ -1, & 当k_0 < 0 \end{cases} \tag{5.140}$$

把（5.139）代入（5.137）得到

$$i\Delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4k \frac{1}{2\omega_k} e^{ik\cdot x} \in(k_0) [\delta(k_0 - \omega_k) + \delta(k_0 + \omega_k)].$$

$$(d^4k = d^3k dk_0) \tag{5.141}$$

利用公式

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a} [\delta(x+a) + \delta(x-a)] \tag{5.142}$$

不难将（5.141）式化为

$$i\Delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4k \in(k_0) \delta(k^2 + m^2) e^{ik\cdot x}. \tag{5.143}$$

此式右边的积分区域是整个四维动量空间；$e^{ik\cdot x}$是一个 Lorentz 不变的相位因子；由于$\delta(k^2+m^2)$要求$k_0 = \pm\omega_k$，而且在正Lorentz变换下，未来时间性矢量与过去时间性矢量不会互相转换，因此，$\in(k_0)$在任何一个参考系里或者恒取值“+1”，或者恒取值“-1”。综上所述，我们证明了$\Delta(x)$的确是一个Lorenz标量函数。

类似地可以证明：

$$[\phi(x), \phi(y)] = [\phi^+(x), \phi^+(y)] = 0. \tag{5.144}$$

（5.135）和（5.144）便是非厄米标量场的不变对易关系式。对于厄米标量场，用同样的方法可以得到

$$[\phi(x), \phi(y)] = i\Delta(x-y). \tag{5.145}$$

从理论的自洽性考虑，场的不变对易关系在等时情形下应能导致正则等时对易关系. 可以证明，的确如此. 这一工作请读者自己去做.

在这一小节的末了，我们给出$\Delta(x)$的三维积分表示式，$\Delta^{(\pm)}(x)$的协变表示式以及$\Delta(x)$所满足的若干关系式。把（5.134）右边的求和转变为积分便得到

$$i\Delta^{(+)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\frac{e^{ik\cdot x}}{2\omega_k},\tag{5.146a}$$

$$i\Delta^{(-)}(x)=\frac{-1}{(2\pi)^3}\int d^3k\frac{e^{-ik\cdot x}}{2\omega_k}.\tag{5.146b}$$

此二式就是$\Delta^{(\pm)}(x)$的三维积分表示式。把它们代入（5.136），就得到$\Delta(x)$的三维积分表示式：

$$\Delta(x)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{\omega_k}\sin k\cdot x\tag{5.147}$$

现在定义另一种阶跃函数θ：

$$\theta(k_0)=\begin{cases}1, & 当k_0>0\\ 0, & 当k_0<0\end{cases}\tag{5.148a}$$

$$\theta(-k_0)=\begin{cases}0, & 当k_0>0\\ 1, & 当k_0<0\end{cases}\tag{5.148b}$$

显然，

$$\epsilon(k_0)=\theta(k_0)-\theta(-k_0),\tag{5.149}$$

这些阶跃函数的曲线示于图5－1。将（5.149）代入(5.143)，并将所得式与(5.136)比较就得到$\Delta^{(\pm)}(x)$的协变表示式如下：

$$\Delta^{(+)}(x)=\frac{-i}{(2\pi)^3}\int d^4k\theta(k_0)\delta(k^2+m^2)e^{ik\cdot x},\tag{5.150a}$$

$$\Delta^{(-)}(x)=\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^4k\theta(-k_0)\delta(k^2+m^2)e^{-ik\cdot x}.\tag{5.150b}$$

此二式表明，$\Delta^{(+)}(x)$与$\Delta^{(-)}(x)$之间有以下关系：

$$\Delta^{(+)}(x)=-\Delta^{(-)}(-x).\tag{5.151}$$

此外，由（5.143）式容易看出：

$$\Delta(\mathbf{x},t)=\Delta(-\mathbf{x},t),\tag{5.152a}$$

$$\Delta(\mathbf{x},t)=-\Delta(\mathbf{x},-t),\tag{5.152b}$$

$$\Delta(x)=-\Delta(-x).\tag{5.152c}$$

因为当$x$是空间性矢量，即当$x^2>0$时，总可以找到一个参考系，使得

$$x=(\mathbf{x},0),$$

所以，由 (5.152)$b$式以及$\Delta(x)$的标量性质易得：

$$\Delta(\mathbf{x},\ 0)=0,\ \text{在所述参考系里,} \tag{5.153a}$$

$$\Delta(\mathbf{x},t)=0,\ x^2>0,\text{在任意参考系里,} \tag{5.153b}$$

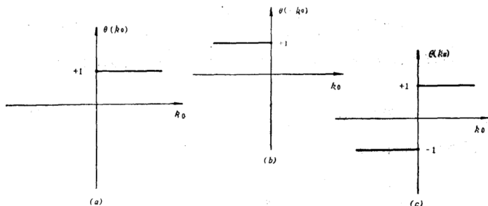



图5—1 $\theta(k_0)$、$\theta(-k_0)$、$\in(k_0)$的函数曲线

## （二）微观因果律

所谓因果律，在宏观物理现象里指的是如下的意思：客观上进行的物理过程总是先有原因，后有结果，原因与结果的先后顺序在彼此相差正 Lorentz 变换的任意两个参考系里都是相同的[注1]。例如在某一参考系$O$里，$t_1$时刻自$\mathbf{x}_1$点发一信号，于$t_2$时刻在$\mathbf{x}_2$点收到这一信号，则发射是原因，接收是结果，按照因果律，必定应有

$$t_2>t_1$$

设信号传递速度为$v$，则

$$v=|\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1|/(t_2-t_1), \tag{5.154}$$

按照狭义相对论，在与参考系$O$相差正Lorentz变换的任一参考系$O'$里，恒有

$$t_2'>t_1'.$$

而且由于所有信号速度都不大于真空中的光速$c$，故可将宏观因果律表为下式

$$v=\frac{|\Delta\mathbf{x}|}{\Delta t}\leqslant c.\quad \Delta t>0 \tag{5.155}$$

现在把四维坐标系的坐标原点置于$x_1$点，并照例令$c=1$，就得到宏观因果律的协变表示式：

〔注1〕 正Lorentz变换和空间反演变换都不会使原因与结果的先后顺序颠倒，但时间反演除外。正如§4（三）所述，基本方程式的时间反演解一般来说在客观上是不可能发生的。

$$x^2 \leqslant 0 . \tag{5.156}$$

此式表明，彼此有因果联系的任意两个事件之间的时空间隔必定是类时间隔．如果两事件之间相距类空间隔，即

$$y^2 > 0 , \tag{5.157}$$

则此二事件是没有因果联系的独立事件．

微观因果律是宏观因果律向量子领域的推广．在非相对论量子力学里，因果律就体现在Schrödinger方程的时间演化里，而在量子场论里，因果律可表述如下：在任意两个时空点 $x$和$y$ 处的场算符，能够相互对易的条件是：$x-y$是一个类空矢量．因此，对于厄米标量场，因果律可用下式表达：

$$\left.\begin{aligned} &[\phi(x), \phi(y)] = i\Delta(x-y) = 0 , \\ &\text{当}(x-y)^2 > 0 , \end{aligned}\right\} \tag{5.158}$$

对于非厄米标量场则可表为

$$\left.\begin{aligned} &[\phi(x), \phi^+(y)] = i\Delta(x-y) = 0 , \\ &\text{当}(x-y)^2 > O . \end{aligned}\right\} \tag{5.159}$$

以上二式是（5.153）$b$式的必然结果．这些公式都具有Lorentz不变性，它们便是量子化标量场的因果性条件．

对于量子场论里的因果律一般可作如下的理解：在彼此相距类空间隔的任意两个时空点所进行的物理测量彼此没有干扰．这是因为在这样两个时空点之间不能用光信号或任何物理信号进行联系．在这样两个时空点进行的测量是两个没有因果联系的独立事件．

## §6 Feynman传播函数

传播函数又称传播子．它和场算符一样，也是描写量子场运动规律的函数．在通常的教科书和专著里，定义传播函数的方法大致有以下几种：其一是从Green 函数的讨论入手，传播函数便是一个因果 Green 函数；其二是直接给出传播函数的数学定义；其三是在进行Wick展开的基础上（见第九章）自然地引入场算符收缩（即传播函数）的定义……．但是这些做法虽然具备理论体系严整的优点，却不易为初学者所接受．因此，我们宁可放弃形式的优美性，而采取一种有利于理解物理内容的叙述方法．

### （一）标量场传播函数

首先回忆一下量子力学里的传播函数[注1]．假设 $t$ 时刻，在空间每点 $\mathbf{x}$处，几率波的

〔注1〕 详见J. D. Bjorken, S. D. Drell, «Relativistic Quantum Mechanics», Chapter 6, McGraw-Hill, 1964.

振幅为$\psi(\mathrm{x},t)$。按照惠更斯原理，每一空间点x又是一个点波源，向外发射球面子波。再假定在$t'$时刻，来自x点的波有一部分到达x′点，并在该点引起振幅为$\psi_{\mathrm{x},t}(\mathrm{x}',t')$的振动，则$\psi_{\mathrm{x},t}(\mathrm{x}',t')$应与$\psi(\mathrm{x},t)$成比例。设比例系数为$iG(\mathrm{x}',t';\mathrm{x},t)$：

$$\psi_{\mathrm{x},t}(\mathrm{x}',t')=iG(\mathrm{x}',t';\mathrm{x},t)\psi(\mathrm{x},t),$$

$$t'>t \tag{5.160}$$

$t'$时刻x′点的几率波振动是来自较早时刻的所有时空点的振动之总和。因此，

$$\theta(t'-t)\psi(\mathrm{x}',t')=i\int d^3xG(\mathrm{x}',t';\mathrm{x},t)\psi(\mathrm{x},t). \tag{5.161}$$

式中，$G(x',x)$是两个时空点的坐标差$x'-x$的函数，称为传播函数。它是$t$时刻x点的几率波振动于$t'$时刻传播到x′点的几率幅。显然，$G(x',x)$应满足以下边界条件：

$$G(x',x)\neq 0 \qquad 当t'>t, \tag{5.162a}$$

$$G(x',x)=0 \qquad 当t'<t. \tag{5.162b}$$

根据这一条件，当$t'<t$时，(5.161) 式成为平凡的恒等式$0=0$。由此可见，传播函数$G(x',x)$把$t'$时刻的波函数$\psi(\mathrm{x}',t')$与某个初始时刻的波函数$\psi(\mathrm{x},t)$联系起来，只要知道了传播函数，就可由任意给定的初始时刻的波函数确定以后各个时刻的波函数。因此量子力学里的传播函数方法与求解Schrödinger方程等效。

可以证明，传播函数$G(x',x)$是Schrödinger方程的Green函数。为此，把算符$i\dfrac{\partial}{\partial t'}-\hat{H}(x')$作用于 (5.161)：

$$\begin{aligned}左边为\quad &\left(i\frac{\partial}{\partial t'}-\hat{H}(x')\right)\theta(t'-t)\psi(x')\\
&=\left(i\frac{\partial}{\partial t'}\theta(t'-t)\right)\psi(x')+\theta(t'-t)\left(i\frac{\partial}{\partial t'}-\hat{H}(x')\right)\psi(x')\\
&=i\delta(t'-t)\int d^3x\delta^{(3)}(\mathrm{x}'-\mathrm{x})\psi(x).\text{[注1]}\end{aligned}$$

$$右边为\quad i\int d^3x\left(i\frac{\partial}{\partial t'}-\hat{H}(x')\right)G(x',x)\psi(x).$$

因为$\psi(x)$是任意波函数，故可同时取消左、右两边的积分

$$i\int d^3x\cdots\cdots\psi(x),$$

---

[注1] 这里使用了$\delta(t'-t)\psi(x')=\delta(t'-t)\psi(x',t)$，以及θ函数求导数的公式：$\partial_t\theta(t)=\delta(t)$。关于奇异函数的基本知识在场论里常要用到，故建议读者学习И. M. 盖尔芳特，Γ. E. 希洛夫，《广义函数》，I，第一章，科学出版社，1965年。

由此便得到$G(x',x)$所满足的方程式：

$$[i\partial_{t'}-\widehat{\mathrm{H}}(x')]G(x',x)=\delta(t'-t)\delta^{(3)}(\mathbf{x}'-\mathbf{x})=\delta^{(4)}(x'-x). \quad (5.163)$$

因此，$G(x',x)$的确是Schrödinger方程的Green函数．由于它满足边界条件（5.162），故称为推迟Green函数。

现在，类比于上述非相对论量子力学的情况，将标量场传播函数$\Delta_F(x',x)$定义为K—G方程的Green函数．即定义$\Delta_F(x',x)$是方程

$$(\Box'-m^2)\Delta_F(x',x)=i\delta^{(4)}(x'-x) \quad (5.164)$$

的，满足条件

$$\begin{cases}\Delta_F(x',x)\text{描写自x点向x}'\text{点的传播过程，当}t'>t\\ \Delta_F(x',x)\text{描写自x}'\text{点向x点的传播过程，当}t>t'\end{cases} \quad (5.165)$$

的解．量子场论里的Green函数可表示为场算符时序乘积的真空期望值．$\Delta_F(x',x)$是一个两点Green函数，考虑到条件（5.165），可设：

$$\Delta_F(x',x)=\langle 0|T\phi(x')\phi^+(x)|0\rangle\text{，对非厄米标量场，} \quad (5.166)$$

$$\Delta_F(x',x)=\langle 0|T\phi(x')\phi(x)|0\rangle\text{，对厄米标量场．} \quad (5.167)$$

其中，$T$是时序算符，它由下式定义：

$$TA(x')B(x)=\begin{cases}A(x')B(x), & \text{当}t'>t\\ B(x)A(x'), & \text{当}t>t'\end{cases} \quad (5.168)$$

$A(x)$和$B(x)$是两个任意的Bose场算符．（5.168）式的算符乘积称为时序乘积或编时乘积（关于Fermi场的时序乘积定义，见第六章）．

容易证明，（5.166）和（5.167）确实满足（5.164）式．为此，将（5.166）代入（5.164），并注意，在$t'>t$和$t'<t$的两种情形下，$\Delta_F(x',x)$分别成为：

$$\begin{aligned}\langle 0|\phi(x')\phi^+(x)|0\rangle&=\langle 0|\phi^{(+)}(x')\phi^{+(-)}(x)|0\rangle\\&=\langle 0|[\phi^{(+)}(x'),\phi^{+(-)}(x)]|0\rangle\\&=\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{2\omega_k}\langle 0|[a_{\mathbf{k}},a_{\mathbf{k}}^+]|0\rangle e^{ik\cdot(x'-x)}\end{aligned} \quad (5.169)a$$

和

$$\begin{aligned}\langle 0|\phi^+(x)\phi(x')|0\rangle&=\langle 0|[\phi^{+(+)}(x),\phi^{(-)}(x')]|0\rangle\\&=\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{2\omega_k}\langle 0|[b_{\mathbf{k}},b_{\mathbf{k}}^+]|0\rangle e^{-ik\cdot(x'-x)},\end{aligned} \quad (5.169)b$$

即得

$$(\Box' - m^2)\Delta_F(x'-x) = (\Box' - m^2)\langle 0|T\phi(x')\phi^+(x)|0\rangle$$

$$= (\Box' - m^2)\left\{\theta(t'-t)\langle 0|\phi(x')\phi^+(x)|0\rangle + \theta(t-t')\langle 0|\phi^+(x)\phi(x')|0\rangle\right\}$$

$$= (\nabla^2_{x'} - m^2)\left\{\theta(t'-t)\langle 0|\phi(x')\phi^+(x)|0\rangle + \theta(t-t')\langle 0|\phi^+(x)\phi(x')|0\rangle\right\}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t'}\left\{\frac{\partial}{\partial t'}\theta(t'-t)\langle 0|\phi(x')\phi^+(x)|0\rangle + \theta(t'-t)\frac{\partial}{\partial t'}\langle 0|\phi(x')\phi^+(x)|0\rangle\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial t'}\theta(t-t')\langle 0|\phi^+(x)\phi(x')|0\rangle + \theta(t-t')\frac{\partial}{\partial t'}\langle 0|\phi^+(x)\phi(x')|0\rangle\right\}$$

$$= -\delta(t'-t)\frac{\partial}{\partial t'}\langle 0|\phi(x')\phi^+(x)|0\rangle + \delta(t-t')\frac{\partial}{\partial t'}\langle 0|\phi^+(x)\phi(x')|0\rangle$$

$$= i\delta(t'-t)\frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^3}\left\{\int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}'-\mathbf{x})} + \int d^3k e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}'-\mathbf{x})}\right\}$$

$$= i\delta^{(4)}(x'-x).$$

在上述推导过程里曾使用了

$$\delta(t'-t)[\phi(x'),\phi^+(x)] = i\delta(t'-t)\Delta(\mathbf{x}'-\mathbf{x},\ 0) \qquad (5.170)$$

和（5.153）$a$式．用同样的方法可以验证（5.167）是（5.164）的解．由此便可确信传播函数的定义（5.166）和（5.167）的正确性．我们指出，各种量子场的传播函数均可定义为场算符时序乘积的真空期望值．

## （二）传播函数的积分表示

传播函数的积分表示式对于实际计算很有用（见第九章）．仍以非厄米标量场为例．为了方便，令$x=0$，并把$x'$改记为$x$．这时由（5.169）式可得：

$$\Delta_F(x) = \theta(t)\langle 0|\phi(x)\phi^+(0)|0\rangle + \theta(-t)\langle 0|\phi^+(0)\phi(x)|0\rangle$$

$$= \theta(t)\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{2\omega_k}e^{ik\cdot x} + \theta(-t)\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{2\omega_k}e^{-ik\cdot x}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{2\omega_k}[\theta(t)e^{ik\cdot x} + \theta(-t)e^{-ik\cdot x}]$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{2\omega_k}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}[\theta(t)e^{-i\omega_k t} + \theta(-t)e^{i\omega_k t}] \qquad (5.171)$$

现在，把$\frac{1}{\omega_k}e^{\mp i\omega_k t}$表示为复$k_0$平面上的围道积分．具体做法是：当$t>0$，选择闭合积

分围道为$c_F$（即实轴，不包括$k_0=\pm\omega_k$）+下半平面内的无限半圆，并计算沿此反向闭合围道的积分：

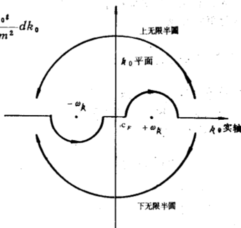


图5—2 传播子$\Delta_F$的积分围道

$$-\int_{c_F+\text{下无限半圆}}\frac{e^{-ik_0t}}{k^2+m^2}dk_0$$

$$=-\oint\frac{e^{-ik_0t}}{-(k_0^2-\omega_k^2)}dk_0=$$

$$=\oint\frac{e^{-ik_0t}}{-(k_0^2-\omega_k^2)}dk_0.$$

注意到积分围道包围被积函数的极点$k_0=\omega_k$，则利用Cauchy残数定理极易得到上述的积分结果为$-\pi i\frac{e^{-i\omega_kt}}{\omega_k}$，因此，我们有

$$\frac{1}{\omega_k}e^{-i\omega_kt}=\frac{1}{\pi i}\int_{c_F}\frac{e^{-ik_0t}}{k^2+m^2}dk_0. \tag{5.172}$$

同样地，当$t<0$，在上半平面内加一无限半圆，与$c_F$一起，构成一个正向闭合围道，它包围函数$e^{-ik_0t}/k^2+m^2$的极点$k_0=-\omega_k$。利用残数定理计算沿此闭合围道的积分

$$\int_{c_F+\text{上无限半圆}}\frac{e^{-ik_0t}}{k^2+m^2}dk_0,$$

便得到

$$\frac{1}{\omega_k}e^{i\omega_kt}=\frac{1}{\pi i}\int_{c_F}\frac{e^{-ik_0t}}{k^2+m^2}dk_0. \tag{5.173}$$

对于$t>0$的情况将（5.172）代入（5.171），而对于$t<0$的情况将（5.173）代入（5.171），在这两种情况下均得到下式：

$$\Delta_F(x)=\frac{-i}{(2\pi)^4}\int d^3k\int_{c_F}dk_0\frac{e^{ik\cdot x}}{k^2+m^2} \tag{5.174}$$

还可把积分围道稍作变化，使$c_F$与$k_0$实轴重合。这只要如图5—3那样把复$k_0$平面上的坐标架转动一个无穷小角度，使被积函数的极点$k_0=\pm\omega_k$分别移动到实轴之下方和上方，成为$k_0=\pm\omega_k\mp i\varepsilon$（$\varepsilon$是一个无限小的正数）。在作了这种变化之后，（5.174）式成为

$$\Delta_F(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\Delta_F(k)e^{ik\cdot x}. \tag{5.175a}$$

此式便是标量场传播函数$\Delta_F(x)$的坐标空间表示式。它是一个四维付里叶积分展式。其付里叶分量

$$\Delta_F(k)=\frac{-i}{k^2+m^2-i\varepsilon} \qquad (5.175)b$$

便是传播函数的动量空间表示式。其中，无穷小的虚数$-i\varepsilon$规定了积分围道，从而确定了$\Delta_F(x)$的时序。

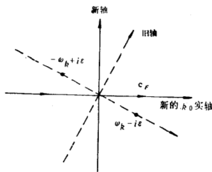



图5—3 把$k_0$平面上的坐标架转动一个无穷小角度后，积分围道$c_F$便是新的$k_0$实轴。

## （三）传播函数的物理意义

到此为此，我们一直是在Heisenberg图景中工作（直到第八章，我们都在Heisenberg图景中工作），因此，量子场态矢量与时间无关。而且态矢量不显含空间坐标**x**。这就是说，$h$图景中的量子场态矢量只是从粒子性一面反映了场的状态。现在要讨论量子场的传播，就需要同时从两个方面来反映场的运动。以非厄米标量场为例，我们来看具有一个正粒子的场态，这样一个一粒子场态可用如下的态矢量来描写：

$$\phi^+(x)|0\rangle=\phi^{+(-)}(x)|0\rangle=\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}a_{\mathbf{k}}^+|0\rangle e^{-ik\cdot x}, \qquad (5.176)$$

此式右边是许多具有确定能量、动量的一粒子态的组合，因而左边是一个能量、动量无定值的一粒子态。对于任何给定的坐标值$x_2$，$\phi^+(x_2)|0\rangle$确定场在时、空点$x_2$的运动状态，我们称它为$t_2$时刻，$\mathbf{x}_2$点的场态，显然，$\mathbf{x}_2$点的场振动将向着较晚时刻的时、空点传播。此振动于$t_1$时刻传播到$\mathbf{x}_1$点的几率幅，或者说，在$t_2$时刻$\mathbf{x}_2$点的场态中找到$t_1$时刻$\mathbf{x}_1$点的场态的几率幅是$\langle 0|\phi(x_1)\phi^+(x_2)|0\rangle$。与(5.169)$a$比较，立刻得到

$$\langle 0|\phi(x_1)\phi^+(x_2)|0\rangle=\Delta_F(x_1-x_2), \text{〔注1〕、〔注2〕}, \text{当} t_1>t_2. \qquad (5.177)$$

我们再来看具有一个反粒子的场态

$$\phi(x)|0\rangle=\phi^{(-)}(x)|0\rangle=\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}b_{\mathbf{k}}^+|0\rangle e^{-ik\cdot x}, \qquad (5.178)$$

现在假定$t_2>t_1$，则$t_1$时刻$\mathbf{x}_1$点的场振动于$t_2$时刻传播到$\mathbf{x}_2$点的几率幅是$\langle 0|\phi^+(x_2)\phi(x_1)|0\rangle$。与(5.169)$b$比较，又得到

$$\langle 0|\phi^+(x_2)\phi(x_1)|0\rangle=\Delta_F(x_1-x_2), \text{当} t_2>t_1. \qquad (5.179)$$

---

〔注1〕 从第（一）、（二）两小节的讨论看到，$\Delta_F(x_1,x_2)$是两个时、空点的坐标差$x_1-x_2$的函数，所以这里及以后，就把传播函数记为$\Delta_F(x_1-x_2)$。

〔注2〕 本章和第六、七、九、十章常用$x_1$、$x_2$……代表不同时空点的四维坐标矢量，请不要与矢量**x**的分量$x_1$、$x_2$、$x_3$、$x_4$混淆。

(5.177) 式和 (5.179) 式共同说明，传播函数 $\Delta_F(x_1-x_2)$ 对于场在任意两个时空点之间的传播过程给出统计性的预言．场振动的激发、传播和退激的过程与粒子的产生运动和湮灭的过程，乃是量子场运动过程的两个方面．由 (5.169) 式显见，当$t_1>t_2$时，$\Delta_F(x_1-x_2)$ 同时又是$t_2$时刻在$x_2$点产生一个粒子（能量、动量无定值），这个粒子于$t_1$时刻传播到$x_1$点并在该点湮灭的几率幅；而当$t_2>t_1$时，$\Delta_F(x_1-x_2)$ 又是在$t_1$时刻在 $x_1$ 点产生一个反粒子（能量、动量无定值），这个反粒子于$t_2$时刻传播到$x_2$点并在该点湮灭的几率幅．综上所述，传播函数对量子场运动过程给出统计性的预言．

另方面，传播函数的表示式(5.175)还显示了量子场运动的一个重要特征．(5.175)式在物理粒子的质壳处，即$k^2=-m^2$处有一极点．这就表明，传播函数所描写的过程并不是在迄今为止人们所能观测到的物理世界中发生的．恰恰相反，对于量子场的上述传播过程而言，可观察的物理粒子反映为一个数学意义上的极点．由于$k^2\neq -m^2$，所以按照 $|\Delta_F|^2$ 的几率伴随场振动的激发、传播、退激而不断产生、传播、湮灭的粒子是一些所谓“虚粒子”．而传播函数 $\Delta_F$ 所描写的上述过程也是一些所谓“虚过程”．这些“虚过程”在实验上是观测不到的．

如上所述，“虚粒子”、“虚过程”这些概念，都是从量子场论的理论体系里自然地产生出来的．既然量子场论还只是一个带有过渡性质的微观物理学理论，所以这些概念对于人们进一步探索微观世界的本质也只具有暗示和启发的意义．理论上预言：在自然界存在着实验上观测不到的“虚粒子”“虚过程“．这意味着，在已知的物理世界之外还存在着一个广阔的未知世界——这就是真空．如第二章所述，真空是量子场的一种运动状态，即量子场基态．反过来，我们可以把量子场的激发态看成是真空的“激发态”．场振动的激发、传播、退激以及与之相应的虚粒子产生、传播、湮灭，这些都与真空物质的运动有关．自然，还应当提出如下的问题，例如，由态矢量(5.176)或(5.178)所描写的量子场激发态是可以用实验方法观测到的，而由传播函数所描写的过程又是不可观测的，那么，这两者有什么联系呢？理论上又应当如何反映这种联系呢？这个问题，在第九章里我们可以得到形式的回答，在那里，人们用图形和数学的语言把物理粒子和上述的“虚过程”联系起来．但这种形式的回答完全是唯象的．它并未告诉我们真空物质是什么？真空与非真空的物理联系是什么？显然，这些问题远远不是量子场论所能回答的．

上述的全部讨论是在自由场理论的范围内进行的．应当指出，本章所给出的传播函数只是量子场的所谓“全传播子”的零次近似．这一点在重整化理论里是要详述的（见第十一章）．

## §7 不变函数

在量子场论里常常要用到一些奇异函数．由于这些奇异函数可以通过四维付里叶积分表示为Lorentz不变的形式（其中，对$k_0$的积分沿复$k_0$平面上的某一围道进行），所以又称为不变函数．量子化标量场的传播函数以及对易子函数$\Delta$、$\Delta^{(\pm)}$等都是不变函数．

现分别讨论如下：

$\Delta^{(+)}(x)$：由(5.146)$a$可得，

$$\Delta^{(+)}(x)=\frac{-i}{2(2\pi)^3}\int d^3k\ \frac{e^{ik\cdot x}}{\omega_k} \tag{5.180}$$

利用残数定理把$\frac{1}{\omega_k}e^{-i\omega_k t}$表示为沿围道$c^{(+)}$（见图5—4）的积分：因为

$$\int_{c^{(+)}}\frac{e^{-ik_0 t}}{k^2+m^2}dk_0$$

$$=-\pi i\frac{e^{-i\omega_k t}}{\omega_k},$$

故

$$\frac{1}{\omega_k}e^{-i\omega_k t}$$

$$=\frac{-1}{\pi i}\int_{c^{(+)}}\frac{e^{-ik_0 t}}{k^2+m^2}dk_0 \tag{5.181}$$

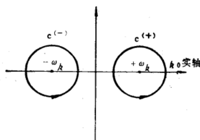



图5—4 $\Delta^{(\pm)}(x)$的积分围道

把此式代入(5.180)即得

$$\Delta^{(+)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3k\int_{c^{(+)}}dk_0\frac{e^{ik\cdot x}}{k^2+m^2}; \tag{5.182}$$

$\Delta^{(-)}(x)$：由(5.146)$b$得

$$\Delta^{(-)}(x)=\frac{i}{2(2\pi)^3}\int d^3k\ \frac{e^{-ik\cdot x}}{\omega_k}. \tag{5.183}$$

利用残数定理可得

$$\frac{e^{i\omega_k t}}{\omega_k}=\frac{1}{\pi i}\int_{c^{(-)}}\frac{e^{-ik_0 t}}{k^2+m^2}dk_0, \tag{5.184}$$

积分围道$c^{(-)}$表示在图5—4中，把(5.184)代入(5.183)并注意积分的对称关系(5.138)，便得到

$$\Delta^{(-)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3k\int_{c^{(-)}}dk_0\frac{e^{ik\cdot x}}{k^2+m^2}; \tag{5.185}$$

$\Delta(x)$：综合(5.136)、(5.182)、(5.185)，便得到

$$\Delta(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3k\left(\int_{c^{(+)}}+\int_{c^{(-)}}\right)dk_0\frac{e^{ik\cdot x}}{k^2+m^2}$$

由于

$$\int_{c^{(+)}}+\int_{c^{(-)}}=\int_c\ ,$$

所以

$$\Delta(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3k\int_C dk_0\frac{e^{ik\cdot x}}{k^2+m^2} \tag{5.186}$$

$\Delta_R(x)$：其定义如下：

$$\Delta_R(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3k\int_{C_R} dk_0\frac{e^{ik\cdot x}}{k^2+m^2} \tag{5.187}$$

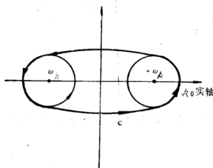



图5—5　$\Delta(x)$的积分围道c在图中用粗黑线表示

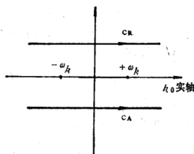



图5—6　$\Delta_R$和$\Delta_A$的积分围道

对$k_0$的积分围道选择如下；当$t>0$选择位于$c_R$下方的无限半圆，与$c_R$一起构成反向闭合围道（它即等于$-c$）. 此闭合围道包围被积函数的两个极点：$k_0=\pm\omega_k$；当$t<0$，选择位于$c_R$上方的无限半圆，与$c_R$一起构成正向闭合围道. 此闭合围道未包围任何奇点. 因此，我们有：

$$\Delta_R(x)=\begin{cases}-\Delta(x), & 当t>0\\ 0. & 当t<0\end{cases} \tag{5.188}$$

$\Delta_A(x)$：定义如下

$$\Delta_A(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3k\int_{C_A} dk_0\frac{e^{ik\cdot x}}{k^2+m^2} \tag{5.189}$$

对$k_0$的积分路线选择如下：当$t>0$，选择位于$c_A$下方的无限半圆与$c_A$一起构成反向闭合围道，此围道未包围任何奇点；当$t<0$，选择位于$c_A$上方的无限半圆，与$c_A$一起构成正向闭合围道（即图5—5中的围道c），此闭合围道包围被积函数的两个极点$k_0=\pm\omega_k$. 因此我们有：

$$\Delta_A(x)=\begin{cases}0, & 当t>0\\ \Delta(x) & 当t<0\end{cases} \tag{5.190}$$

$\Delta_1(x)$：其定义为

$$\Delta_1(x)=i\Delta^{(+)}(x)-i\Delta^{(-)}(x), \tag{5.191}$$

因$c^{(+)}-c^{(-)}=c_1$（见图5—7），故得：

$$\Delta_1(x)=\frac{i}{(2\pi)^4}\int d^3k\int_{c_1}dk_0\frac{e^{ik\cdot x}}{k^2+m^2} \tag{5.192}$$

综上所述，可以用一个普遍公式来概括所有不变函数：

$$\Delta^{(\ )}(x)=\frac{\eta}{(2\pi)^4}\int d^3k\int_l dk_0\frac{e^{\pm ik\cdot x}}{k^2+m^2} \tag{5.193}$$

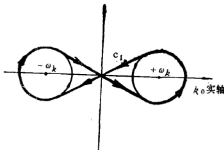



图5—7 $\Delta_1(x)$的积分围道$c_1$，在图中用粗黑线表示

其中，$\eta=+1,+i$.可以证明，凡积分围道 $l$ 为有限围道的不变函数都满足齐次K—G方程式：

$$(\Box-m^2)\Delta^{(\ )}(x)=0, \tag{5.194}$$

反之，凡是积分围道 $l$ 延伸到无限远的不变函数都是K—G方程的Green函数，即

$$(\Box-m^2)\Delta^{(\ )}(x)=\xi\delta^{(4)}(x) \tag{5.195}$$

$$\xi=\pm1,\pm i$$

对于（5.194)式，我们以$\Delta^{(+)}(x)$为例：

$$(\Box-m^2)\Delta^{(+)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3k\int_{c^{(+)}}dk_0\frac{-k^2-m^2}{k^2+m^2}e^{ik\cdot x}$$

$$=\frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^3ke^{ik\cdot x}\int_{c^{(+)}}dk_0e^{-ik_0t},$$

因为$e^{-ik_0t}$在$c^{(+)}$范围内解析，故得：

$$(\Box-m^2)\Delta^{(+)}(x)=0, \tag{5.196}$$

同样可证

$$(\Box-m^2)\Delta^{(-)}(x)=0. \tag{5.197}$$

因此，

$$(\Box-m^2)\Delta(x)=0, \tag{5.198}$$

$$(\Box-m^2)\Delta_1(x)=0. \tag{5.199}$$

对于（5.195），以$\Delta_R(x)$为例：

$$(\Box-m^2)\Delta_R(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3k\int_{c_R}\frac{-k^2-m^2}{k^2+m^2}e^{ik\cdot x}$$

$$=\frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^3ke^{ik\cdot x}\int_{c_R}dk_0e^{-ik_0t},$$

因为被积函数$e^{-ik_0t}$在实轴上无奇点，故$\int_{c_R}dk_0=\int_{实轴}dk_0$.由此便得到

$$(\Box - m^2)\Delta_R(x) = -\delta^{(4)}(x), \tag{5.200a}$$

又根据（5.188)式，$\Delta_R(x)$满足边界条件

$$\Delta_R(x) = 0, \quad 当t < 0 \tag{5.200b}$$

因此，$\Delta_R(x)$是K—G方程的推迟Green函数．只要把$c_R$换成$c_A$，采取同样的方法可得：

$$(\Box - m^2)\Delta_A(x) = -\delta^{(4)}(x), \tag{5.201a}$$

且

$$\Delta_A(x) = 0, 当t > 0. \tag{5.201b}$$

因此，$\Delta_A(x)$是K—G方程的超前Green函数。

## 习　题

（1）厄米标量场与非厄米标量场都是无限自由度的体系，据此是否可以说它们具有相等的自由度数？

（2）从（5.3）式出发重新导出实标量场的场方程式

$$(\Box - m^2)\phi(x) = 0.$$

（3）证明

$$G(t) = \varepsilon_\mu P_\mu - \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}M_{\mu\nu}$$

和

$$G(t) = -\alpha e Q(t)$$

都是厄米算符．

（4）自由量子场理论的电荷共轭对称性表明了理论的什么特点？这种特点在理论的框架里是怎样显示出来的？

（5）用正则等时对易关系（5.29）验证（5.66）式和（5.76）式

（6）证明$\partial_\mu\phi = i[\phi, P_\mu]$〔并注意将此结果与第三章习题（9）对比〕．

（7）验证（5.99）式．

（8）推出非厄米标量场的守恒流密度矢量算符$J_\mu(x)$在空间反演下的变换法则．

（9）证明宇称量子数是相乘性量子数．

（10）可以引入时间宇称吗？为什么？

（11）推出（5.145）式，并证明在等时情形下，（5.145）式过渡到(5.2)$a$式．

（12）证明：传播函数的定义（5.166）和（5.167）具有Lorentz协变性．

# 第六章　量子化旋量场

旋量场（或Dirac场）是自旋值最小的Fermi场．所有的轻子以及质子、中子、Λ超子、Σ超子等等都是联属于旋量场的量子．

## §1　旋量场的量子化

场的经典运动方程便是 Dirac 方程（1.34）和（1.85）．场方程的任意解可表示为平面波展式（1.188）．按照（4.56）式，Fermi场的量子化条件为：

$$\{\psi(\mathbf{x},t),\psi^+(\mathbf{y},t)\}=\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\tag{6.1a}$$

$$\{\psi(\mathbf{x},t),\psi(\mathbf{y},t)\}=\{\psi^+(\mathbf{x},t),\psi^+(\mathbf{y},t)\}=0\tag{6.1b}$$

应当注意，上式虽然是用旋量矩阵写出的，但正则等时反对易关系是场态矢量空间的算符 $\psi_\alpha$、$\psi_\beta^+$ 所满足的代数关系．事实上，我可以用场分量算符 $\psi_\alpha$、$\psi_\beta^+$ 重新写出 (6.1) 式：

$$\{\psi_\alpha(\mathbf{x},t),\ \psi_\beta^+(\mathbf{y},t)\}=\delta_{\alpha\beta}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\tag{6.2a}$$

$$\{\psi_\alpha(\mathbf{x},t),\psi_\beta(\mathbf{y},\ t)\}=\{\psi_\alpha^+(\mathbf{x},\ t),\ \psi_\beta^+(\mathbf{y},t)\}=0\tag{6.2b}$$

这里，$\alpha$、$\beta=1,2,3,4$．利用（6.1)式和公式

$$\begin{aligned}&[C(t),A(t)B(t)]\\&=\{A(t),C(t)\}B(t)-A(t)\{B(t),C(t)\}\end{aligned}\tag{6.3}$$

不难验证，量子场正则运动方程为

$$\dot{\psi}(\mathbf{x},t)=\frac{1}{i}[\psi(\mathbf{x},t),\mathrm{H}(t)]\tag{6.4}$$

算符H便是（3.41）式的量子对应：

$$\begin{aligned}\mathrm{H}&=\int d^3x\psi^+(\mathbf{x},t)(\gamma_4\gamma\cdot\nabla+\gamma_4 m)\psi(\mathbf{x},t)\\&=\int d^3x\overline{\psi}(\mathbf{x},t)\gamma_4 i\partial_t\psi(\mathbf{x},t)。\end{aligned}\tag{6.5}$$

其中$\partial_t\equiv\dfrac{\partial}{\partial t}$．运动方程(6.4）导致与（1.34)、（1.85）在形式上相同的量子场方程式．因此，类比于（1.188）我们得到场算符的平面波展式如下：

$$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{s=1}^{2}\sqrt{\frac{m}{E_k}}(c_{\mathbf{k}s}u_{\mathbf{k}s}e^{ik\cdot x}+d_{\mathbf{k}s}^{+}v_{\mathbf{k}s}e^{-ik\cdot x}) \quad (6.6)a$$

$$\overline{\psi}(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{s=1}^{2}\sqrt{\frac{m}{E_k}}(c_{\mathbf{k}s}^{+}\overline{u}_{\mathbf{k}s}e^{-ik\cdot x}+d_{\mathbf{k}s}\overline{v}_{\mathbf{k}s}e^{ik\cdot x}). \quad (6.6)b$$

现在，$E_k$既是单个旋量粒子的能量，也是量子场谐振动$(\mathbf{k},E_k)$的角频率。$c_{\mathbf{k}s}$、$c_{\mathbf{k}s}^{+}$以及$d_{\mathbf{k}s}$、$d_{\mathbf{k}s}^{+}$分别是互厄米共轭的算符．为了找到这些算符所满足的反对易关系，首先从(6.6)式中把它们解出来．为此，以$\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{E_k}}u_{\mathbf{k}s}^{+}e^{-ik\cdot x}$左乘(6.6)$a$，并将所得式两边对$\mathbf{x}$积分：

$$\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{E_k}}\int_V d^3x e^{-ik\cdot x}u_{\mathbf{k}s}^{+}\psi(x)$$

$$=\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}'}\sum_{s'=1}^{2}\sqrt{\frac{m^2}{E_kE_{k'}}}\left\{c_{\mathbf{k}'s'}u_{\mathbf{k}s}^{+}u_{\mathbf{k}'s'}\int_V d^3x e^{-i(k-k')\cdot x}\right.$$

$$\left.+d_{\mathbf{k}'s'}^{+}u_{\mathbf{k}s}^{+}v_{\mathbf{k}'s'}\int_V d^3x e^{-i(k+k')\cdot x}\right\}.$$

利用(1.184)完成上式右边对$\mathbf{x}$的积分，并注意到旋量振幅的正交归一条件(1.179)$a$和(1.182)$a$，就得到

$$c_{\mathbf{k}s}=\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{E_k}}\int_V d^3x e^{-ik\cdot x}\overline{u}_{\mathbf{k}s}\gamma_4\psi(x), \quad (6.7)a$$

用$\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{E_k}}v_{\mathbf{k}s}^{+}e^{ik\cdot x}$左乘(6.6)$a$，并大体上重复上述的推算，又得到

$$d_{\mathbf{k}s}^{+}=\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{E_k}}\int_V d^3x e^{ik\cdot x}\overline{v}_{\mathbf{k}s}\gamma_4\psi(x), \quad (6.7)b$$

将以上二式取厄米共轭就得到$c_{\mathbf{k}s}^{+}$和$d_{\mathbf{k}s}$的表示式：

$$c_{\mathbf{k}s}^{+}=\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{E_k}}\int_V d^3x\overline{\psi}(x)\gamma_4u_{\mathbf{k}s}e^{ik\cdot x}, \quad (6.7)c$$

$$d_{\mathbf{k}s}=\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{E_k}}\int_V d^3x\overline{\psi}(x)\gamma_4v_{\mathbf{k}s}e^{-ik\cdot x}. \quad (6.7)d$$

现在，利用(6.7)式和量子化条件(6.2)来推出$c_{\mathbf{k}s}$、$c_{\mathbf{k}s}^{+}$、$d_{\mathbf{k}s}$、$d_{\mathbf{k}s}^{+}$所满足的反对易关系：

$$\{c_{\mathbf{k}s}, c^+_{\mathbf{k}'s'}\} = \frac{1}{V}\sqrt{\frac{m^2}{E_k E_{k'}}}\int_V d^3x d^3y e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{y}} e^{i(E_k - E_{k'})t}$$

$$\times u^{+\alpha}_{\mathbf{k}s} u^{\beta}_{\mathbf{k}'s'} \{\psi_\alpha(\mathbf{x},t), \psi^+_\beta(\mathbf{y},t)\}$$

$$= \frac{1}{V}\sqrt{\frac{m^2}{E_k E_{k'}}}\int_V d^3x e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} e^{i(E_k - E_{k'})t} u^+_{\mathbf{k}s} u_{\mathbf{k}'s'}$$

$$= \frac{m}{E_k}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} u^+_{\mathbf{k}s} u_{\mathbf{k}s'} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{ss'}, \tag{6.8a}$$

**用同样的方法可得：**

$$\{d_{\mathbf{k}s}, d^+_{\mathbf{k}'s'}\} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{ss'}, \tag{6.8b}$$

和

$$\{c_{\mathbf{k}s}, c_{\mathbf{k}'s'}\} = \{d_{\mathbf{k}s}, d_{\mathbf{k}'s'}\} = \{c_{\mathbf{k}s}, d^+_{\mathbf{k}s}\} = \cdots = 0 \tag{6.8c}$$

后面就会看到，$c^+_{\mathbf{k}s} c_{\mathbf{k}s}$和$d^+_{\mathbf{k}s} d_{\mathbf{k}s}$是量子化旋量场的粒子数算符．因而利用（6.8）式不难证明$c^+_{\mathbf{k}s}$、$d^+_{\mathbf{k}s}$和$c_{\mathbf{k}s}$、$d_{\mathbf{k}s}$分别是粒子产生算符和湮灭算符．由（6.8)式很容易证明旋量场的量子服从Fermi-Dirac统计．事实上，由(6.8)$c$可得

$$c^+_{\mathbf{k}s} c^+_{\mathbf{k}'s'} = -c^+_{\mathbf{k}'s'} c^+_{\mathbf{k}s}, \cdots\cdots$$

因而场态矢量对于交换粒子是反对称的，或者说，不允许有两个或两个以上的粒子处于具有相同能量、动量和极化的状态：

$$c^+_{\mathbf{k}s} c^+_{\mathbf{k}s} |0\rangle = d^+_{\mathbf{k}s} d^+_{\mathbf{k}s} |0\rangle = 0\,.$$

在场的任一状态下，具有相同能量、动量和极化的粒子数目或者为零，或者为1：

$$c^+_{\mathbf{k}s} c_{\mathbf{k}s} c^+_{\mathbf{k}s} c_{\mathbf{k}s} = c^+_{\mathbf{k}s} c_{\mathbf{k}s}(1 - c_{\mathbf{k}s} c^+_{\mathbf{k}s}) = c^+_{\mathbf{k}s} c_{\mathbf{k}s}.$$

即粒子数算符$c^+_{\mathbf{k}s} c_{\mathbf{k}s}$的本征值是1和0；同样可证算符$d^+_{\mathbf{k}s} d_{\mathbf{k}s}$的本征值也是1和0．以上讨论表明，由于采用反对易关系（6.1)作为量子化条件，自然地导致场量子服从Fermi-Dirac统计，这与实验事实是完全符合的．

为了显示量子场的粒子性，需要把场物理量算符的表示式转到动量空间．把(6.6)代入（6.5）并利用积分公式（1.184）完成对$\mathbf{x}$的积分得

$$\begin{aligned} \mathrm{H} = \sum_{\mathbf{k}}\sum_{ss'}\frac{m}{\mathrm{E}_k}(&E_k c^+_{\mathbf{k}s} c_{\mathbf{k}s'} u^+_{\mathbf{k}s} u_{\mathbf{k}s'} \\ &- E_k c^+_{\mathbf{k}s} d^+_{-\mathbf{k}s'} u^+_{\mathbf{k}s} v_{-\mathbf{k}s'} e^{2iE_k t} \\ &+ E_k d_{\mathbf{k}s} c_{-\mathbf{k}s'} v^+_{\mathbf{k}s} u_{-\mathbf{k}s'} e^{-2iE_k t} \\ &- E_k d_{\mathbf{k}s} d^+_{\mathbf{k}s'} v^+_{\mathbf{k}s} v_{\mathbf{k}s'}), \end{aligned}$$

再利用旋量振幅的正交归一条件（1.179）和（1.182），可得

$$\mathrm{H}=\sum_{\mathbf{k}s}E_k(c_{\mathbf{k}s}^+c_{\mathbf{k}s}-d_{\mathbf{k}s}d_{\mathbf{k}s}^+)\,. \tag{6.9}$$

通过反对易关系（6.8）把上式求和号下第二项改写为$1-d_{\mathbf{k}s}^+d_{\mathbf{k}s}$，同时，抛弃零点能量$-\sum_{\mathbf{k}s}E_k$，就得到能量算符的动量空间表示式：

$$\mathrm{H}=\sum_{\mathbf{k}s}E_k(c_{\mathbf{k}s}^+c_{\mathbf{k}s}+d_{\mathbf{k}s}^+d_{\mathbf{k}s})\,. \tag{6.10}$$

从(3.69)$b$和（3.97）得到旋量场的动量算符和电荷算符分别为：

$$\mathbf{P}=-i\int_V d^3x\overline{\psi}(\mathbf{x},t)\gamma_4\nabla\psi(\mathbf{x},t), \tag{6.11}$$

和

$$eQ=e\int_V d^3x\psi^+(\mathbf{x},t)\psi(\mathbf{x},t) \tag{6.12}$$

采用类似于推导（6.9）式的方法，并抛弃（6.12)式中的零点电荷

$$eQ_0=\sum_{\mathbf{k}s}e \tag{6.13}$$

就得到：

$$\mathbf{P}=\sum_{\mathbf{k}s}\mathbf{k}(c_{\mathbf{k}s}^+c_{\mathbf{k}s}+d_{\mathbf{k}s}^+d_{\mathbf{k}s}), \tag{6.14}$$

$$eQ=\sum_{\mathbf{k}s}e(c_{\mathbf{k}s}^+c_{\mathbf{k}s}-d_{\mathbf{k}s}^+d_{\mathbf{k}s})\,. \tag{6.15}$$

（6.10）、（6.14）和（6.15）显示了量子化旋量场的粒子性. 量子旋量场包含两类粒子：$c$类粒子的产生、湮灭算符分别是$c_{\mathbf{k}s}^+$、$c_{\mathbf{k}s}$，而粒子数算符是$c_{\mathbf{k}s}^+c_{\mathbf{k}s}$；$d$类粒子的产生、湮灭算符分别是$d_{\mathbf{k}s}^+$、$d_{\mathbf{k}s}$，粒子数算符是$d_{\mathbf{k}s}^+d_{\mathbf{k}s}$. 如果$c$类粒子为正粒子，则$d$类粒子为反粒子，反之亦然. 粒子与反粒子具有相同的质量和自旋，但电荷符号相反（中性旋量粒子与反粒子具有符号相反的广义荷. 如中子与反中子具有符号相反的重子数）. 量子场的谐振动$(\mathbf{k},E_k,s)$同时又是许多能量为$E_k$，动量为$\mathbf{k}$，极化为$s$的旋量粒子和反粒子。

在上面的讨论里，我们曾把量子场的零点能量和零点电荷简单地抛弃掉（零点动量自动为零）. 如同标量场的情形一样，还可以通过正规乘积的约定使所有零点量均自动为零. 即代替（6.5）、（6.11）和（6.12），把H、$\mathbf{P}$、$eQ$的坐标空间表示式重写为：

$$\mathrm{H}=\int_V d^3x:\overline{\psi}(\mathbf{x},t)\gamma_4 i\partial_t\psi(\mathbf{x},t):, \tag{6.16}$$

$$\mathbf{P}=-i\int_V d^3x:\overline{\psi}(x,t)\gamma_4\nabla\psi(\mathbf{x},t):, \tag{6.17}$$

$$eQ=e\int_V d^3x:\psi^+(\mathbf{x},t)\psi(\mathbf{x},t):. \tag{6.18}$$

但对于Fermi场，正规乘积的定义与Bose场有所不同. 当把两个任意的Fermi场算符排列

为正规顺序时，如果需要对调这两个算符原来的排列顺序，则每对调一次就要引入一个负号．例如：

$$
\begin{aligned}
:\overline{\psi}(x)\psi(y):&=:[\overline{\psi}^{(+)}(x)+\overline{\psi}^{(-)}(x)][\psi^{(+)}(y)+\psi^{(-)}(y)]:\\
&=\overline{\psi}^{(+)}(x)\psi^{(+)}(y)+\overline{\psi}^{(-)}(x)\psi^{(+)}(y)+\overline{\psi}^{(-)}(x)\psi^{(-)}(y)\\
&\quad-\psi^{(-)}(y)\overline{\psi}^{(+)}(x).
\end{aligned}
\tag{6.19}
$$

上式中，$\psi^{(\pm)}$分别是$\psi$的正、负频率部分，一般地，对于$N$个算符的正规乘积，有

$$
\begin{aligned}
&:[A_1(x_1)A_2(x_2)\cdots\cdots A_N(x_N)]:\\
&=(-1)^{\delta}A_{j_1}(x_{j_1})A_{j_2}(x_{j_2})\cdots\cdots A_{j_N}(x_{j_N}).
\end{aligned}
\tag{6.20}
$$

这里的 $A_{j_k}(x_{j_k})$ 是一些产生算符或湮灭算符，$\delta$是把上式左边的原来顺序排列为右边的正规顺序所需要进行的算符的对换次数．

## §2 连续对称性与守恒定律

只要注意到旋量场的特殊性，则第五章§3的结果就同样适用于这里．现在(5.54)式成为

$$\psi'(x)=U^{+}\psi(x)U, \tag{6.21}$$

对于无穷小的非齐次Lorentz变换（5.50），幺正算符$U$取以下形式：

$$U(\omega,\ \varepsilon)=e^{-i\varepsilon_\mu P_\mu+\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M_{\mu\nu}}=e^{-iG(t)}. \tag{6.22}$$

这里，$G(t)$是一个守恒量算符，$P_\mu$和$M_{\mu\nu}$分别是量子化旋量场的能量、动量矢量算符和总角动量张量算符．按照（6.21）和（6.22），算符$G(t)$是场算符的主动变换的生成元．而$P_\mu$和$M_{\mu\nu}$则是非齐次Lorentz群的表示生成元，它们之间存在如下的简单关系：

$$G(t)=\varepsilon_\mu P_\mu-\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}M_{\mu\nu}. \tag{6.23}$$

由于$G(t)$是守恒量算符，因而$P_\mu$和$M_{\mu\nu}$也是守恒物理量算符．把（6.22)代入(6.21)，精确到一阶小量，我们有

$$
\begin{aligned}
\psi'(x)&=\psi(x)+\delta\psi(x)\\
&=\psi(x)+\frac{1}{i}[\psi(x),G(t)]
\end{aligned}
\tag{6.24}
$$

因此，

$$\delta\psi(x)=\frac{1}{i}[\psi(x),G(t)]. \tag{6.25a}$$

利用$G(t)$的厄米性，极易得到

$$\delta\psi^{+}(x)=\frac{1}{i}[\psi^{+}(x),G(t)]. \tag{6.25b}$$

利用正则等时反对易关系（6.1）和公式（6.3），不难验证（6.25）式。这样，我们就确信（6.21）和（6.22）的正确性。

另方面，根据（1.36）和（3.64），在变换（5.50）之下，$\psi(x)$按下式变换：

$$\psi'(x')=\Lambda(\omega)\psi(x), \tag{6.26}$$

其中，

$$\Lambda(\omega)=I_4+\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}S_{\mu\nu}.$$

在（6.26）式里以$x$代替$x'$得到

$$\psi'(x)=\Lambda(\omega)\psi[a^{-1}(x-\varepsilon)], \tag{6.27}$$

按照相容性条件（5.70），我们有

$$U(\omega,\varepsilon)\psi(x)U^{+}(\omega,\varepsilon)=\Lambda^{-1}(\omega)\psi(ax+\varepsilon). \tag{6.28}$$

当只考虑时、空平移变换时，

$$a=I_4,$$

$$\Lambda^{-1}(\omega)=\Lambda(\omega)=I_4,$$

（6.28）式简化为

$$U(\varepsilon)\psi(x)U^{+}(\varepsilon)=\psi(x+\varepsilon),$$

对于有限的时、空平移，同样有：

$$e^{-ib\cdot P}\psi(x)e^{ib\cdot P}=\psi(x+b), \tag{6.29}$$

此式显然适用于$\psi^{+}(x)$。

对于规范对称性的情形，我们仅仅指出，自（5.73)式——(5.76）式的讨论仍然适用，只需将那里的算符$Q$代以旋量场的广义荷算符，并注意旋量场与标量场在量子化条件方面的区别。这一工作请读者自己去做。

## §3 分立对称性

旋量场在分立对称变换下的变换法则与标量场有一些不同之处。对于相同之处，我们直接引用第五章§4的结果，而对不同之处，适当加以说明。

### （一）空间反演变换

在经典理论里，旋量场在空间反演下的变换法则即是（1.64）式：

$$\psi'(x')=\gamma_4\psi(\mathbf{x},t).$$

或者写为主动变换的形式：

$$\psi(\mathbf{x},t)\longrightarrow\psi'(\mathbf{x},t)=\gamma_4\psi(-\mathbf{x},t). \tag{6.30}$$

同样地，可以找到场态矢量空间的幺正变换$\mathscr{P}$，使得

$$\psi'(\mathbf{x},t)=\mathscr{P}\psi(\mathbf{x},t)\mathscr{P}^{-1}. \tag{6.31}$$

要求（6.30）与（6.31）式相容，这就导致

$$\mathscr{P}\psi(\mathbf{x},t)\mathscr{P}^{-1}=\gamma_4\psi(-\mathbf{x},t). \tag{6.32}$$

此式便是量子旋量场的空间反演变换法则，$\mathscr{P}$即是相应的空间反演算符或宇称算符. 为了找到$\mathscr{P}$的显示表示式，我们把(6.32)式转到动量空间. 把场算符的平面波展式(6.6)$a$代入（6.32）：

$$\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}s}\sqrt{\frac{m}{E_k}}(\mathscr{P}c_{\mathbf{k}s}\mathscr{P}^{-1}u_{\mathbf{k}s}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-iE_kt}$$

$$+\mathscr{P}d^+_{\mathbf{k}s}\mathscr{P}^{-1}v_{\mathbf{k}s}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+iE_kt})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}s}\sqrt{\frac{m}{E_k}}(c_{\mathbf{k}s}\gamma_4u_{\mathbf{k}s}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-iE_kt}$$

$$+d^+_{\mathbf{k}s}\gamma_4v_{\mathbf{k}s}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+iE_kt}), \tag{6.33}$$

利用（1.178）式容易验证以下二式：

$$\gamma_4u_{\mathbf{k}s}=u_{-\mathbf{k}s}, \tag{6.34a}$$

$$\gamma_4v_{\mathbf{k}s}=-v_{-\mathbf{k}s}. \tag{6.34b}$$

把（6.34）代入（6.33）右端，并将右端求和号下的$\mathbf{k}$全部换成$-\mathbf{k}$，即得

$$\mathscr{P}c_{\mathbf{k}s}\mathscr{P}^{-1}=c_{-\mathbf{k}s}, \tag{6.35a}$$

$$\mathscr{P}d_{\mathbf{k}s}\mathscr{P}^{-1}=-d_{-\mathbf{k}s}. \tag{6.35b}$$

将（5.82）与（5.83）比较，同时将（5.94）与（5.95）比较，即可看出：（5.83）式右端的负号是使（5.95）式指数里的第一、三两项与（5.94）的相应项反号. 据此便可得到（6.35）式的解为：

$$\mathscr{P}=\exp\Big\{-i\frac{\pi}{2}\sum_{\mathbf{k}s}(c^+_{\mathbf{k}s}c_{\mathbf{k}s}-c^+_{\mathbf{k}s}c_{-\mathbf{k}s}$$

$$-d^+_{\mathbf{k}s}d_{\mathbf{k}s}-d^+_{\mathbf{k}s}d_{-\mathbf{k}s})\Big\} \tag{6.36}$$

容易证明，空间反演对旋量场的能量、动量和电荷的影响如下：

$$\mathscr{P} H \mathscr{P}^{-1} = H, \tag{6.37}$$

$$\mathscr{P} \mathbf{P} \mathscr{P}^{-1} = -\mathbf{P}. \tag{6.38}$$

$$\mathscr{P} eQ \mathscr{P}^{-1} = eQ. \tag{6.39}$$

此外，从（3.81）式可以得到旋量场的角动量算符为

$$M_{jk} = \int d^3x(-x_j\pi\partial_k\psi + x_k\pi\partial_j\psi - \frac{i}{2}\pi\,\mathscr{S}_{jk}\psi)$$

利用（6.32）式以及

$$\mathscr{P}\pi(\mathbf{x},t)\mathscr{P}^{-1} = \pi(-\mathbf{x},t)\gamma_4$$

即可证明

$$\mathscr{P} M_{jk} \mathscr{P}^{-1} = M_{jk}. \tag{6.40}$$

（6.37）—（6.40）诸式的物理意义与（5.96）—（5.99）诸式相同。

为了计算旋量粒子的内禀宇称，首先把宇称算符$\mathscr{P}$作用于量子场的激发态$c^+_{\mathbf{k}s}|0\rangle$和$d^+_{\mathbf{k}s}|0\rangle$：

$$\mathscr{P}c^+_{\mathbf{k}s}|0\rangle = \mathscr{P}c^+_{\mathbf{k}s}\mathscr{P}^{-1}\mathscr{P}|0\rangle = c^+_{-\mathbf{k}s}|0\rangle, \tag{6.41a}$$

$$\mathscr{P}d^+_{\mathbf{k}s}|0\rangle = \mathscr{P}d^+_{\mathbf{k}s}\mathscr{P}^{-1}\mathscr{P}|0\rangle = -d^+_{-\mathbf{k}s}|0\rangle, \tag{6.41b}$$

然后令 $\mathbf{k}=0$（即在粒子自身参考系里来考察），便得到

$$\mathscr{P}c^+_{0s}|0\rangle = c^+_{0s}|0\rangle, \tag{6.42a}$$

$$\mathscr{P}d^+_{0s}|0\rangle = -d^+_{0s}|0\rangle. \tag{6.42b}$$

以上二式表明，粒子的内禀宇称为偶，反粒子的内禀宇称为奇。但是我们也可以令 $c$ 类粒子为反粒子，$d$ 类粒子为正粒子。因此，（6.42）式的确切意义是：旋量粒子与其反粒子具有符号相反的内禀宇称[注1]。

（6.37）式意味着量子化旋量场理论具有空间反演不变性。事实上，在第一章已证明了场方程的不变性[注2]，剩下的问题是要证明正则等时反对易关系的不变性。利用（6.2）$a$和（6.32）易得：

$$\begin{aligned}\{\psi_\alpha(-\mathbf{x},t),\psi^+_\beta(-\mathbf{y},t)\} &= \{\mathscr{P}[\gamma_4\psi(\mathbf{x},t)]_\alpha\mathscr{P}^{-1},\mathscr{P}[\psi^+(\mathbf{y},t)\gamma_4]_\beta\mathscr{P}^{-1}\}\\ &= \mathscr{P}(\gamma_4)_{\alpha\lambda}(\gamma_4)_{\delta\beta}\{\psi_\lambda(\mathbf{x},t),\ \psi^+_\delta(\mathbf{y},t)\}\mathscr{P}^{-1}\\ &= \delta_{\alpha\beta}\delta^{(3)}[(-\mathbf{x})-(-\mathbf{y})].\end{aligned}$$

［注1］ 在得到（6.42）式时，同样使用了显然的本征值方程$\mathscr{P}|0\rangle=|0\rangle$。

［注2］ 于由算符$\mathscr{P}$的幺正性，在量子场论的框架内，Dirac方程的空间反演不变性是极易证明的。

## （二）电荷共轭变换

在经典的Dirac理论里，场函数$\psi(x)$与其电荷共轭函数$\psi^C(x)$由下式联系：

$$\psi^C = C\overline{\psi}^T, \tag{6.43}$$

其中，矩阵C由（1.216）式确定．类似于（5.107）式，可以找到一个幺正算符$\mathscr{C}$，使得

$$\mathscr{C}\psi\mathscr{C}^{-1} = \psi^C, \tag{6.44$a$}$$

因算符$\mathscr{C}$与$\gamma_4$作用于不同的空间，所以又有

$$\mathscr{C}\overline{\psi}\mathscr{C}^{-1} = \overline{\psi}^C, \tag{6.44$b$}$$

又因$\mathscr{C}\mathscr{C}\psi\mathscr{C}^{-1}\mathscr{C}^{-1} = \psi$，所以（6.44）式的逆变换为：

$$\mathscr{C}\psi^C\mathscr{C}^{-1} = \psi, \tag{6.45$a$}$$

$$\mathscr{C}\overline{\psi^C}\mathscr{C}^{-1} = \overline{\psi}. \tag{6.45$b$}$$

按照相容性的要求，（6.44）$a$ 右边的$\psi^C$便是（6.43）式左边的$\psi^C$．因此，不难把（6.44）式转到动量空间．为此，将（6.6）$a$代入（6.44）$a$，得到

$$\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}s}\sqrt{\frac{m}{E_k}}(\mathscr{C}c_{\mathbf{k}s}\mathscr{C}^{-1}u_{\mathbf{k}s}e^{ik\cdot x} + \mathscr{C}d^+_{\mathbf{k}s}\mathscr{C}^{-1}v_{\mathbf{k}s}e^{-ik\cdot x})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}s}\sqrt{\frac{m}{E_k}}(c^+_{\mathbf{k}s}u^C_{\mathbf{k}s}e^{-ik\cdot x} + d_{\mathbf{k}s}v^C_{\mathbf{k}s}e^{ik\cdot x}). \tag{6.46}$$

现在，考虑（1.209）式的一种最简单的情况：

$$u^C_{\mathbf{k}s} = v_{\mathbf{k}s},$$

$$v^C_{\mathbf{k}s} = u_{\mathbf{k}s}.$$

把这两式代入（6.46）式即得：

$$\mathscr{C}c_{\mathbf{k}s}\mathscr{C}^{-1} = d_{\mathbf{k}s}, \tag{6.47$a$}$$

$$\mathscr{C}d_{\mathbf{k}s}\mathscr{C}^{-1} = c_{\mathbf{k}s}. \tag{6.47$b$}$$

由于（6.47）式与（5.108）在形式上一致，故可类比于（5.109）直接写出这里的算符$\mathscr{C}$：

$$\mathscr{C} = \exp\left\{-\frac{i\pi}{2}\sum_{\mathbf{k}s}(c^+_{\mathbf{k}s}c_{\mathbf{k}s} - c^+_{\mathbf{k}s}d_{\mathbf{k}s} + d^+_{\mathbf{k}s}d_{\mathbf{k}s} - d^+_{\mathbf{k}s}c_{\mathbf{k}s})\right\} \tag{6.48}$$

不难看出，电荷共轭变换不改变场的真空态：

$$\mathscr{C}|0\rangle=|0\rangle, \tag{6.49}$$

而且变换$\mathscr{C}$把一个粒子的场态与一个反粒子的场态互换：

$$\mathscr{C}c_{\mathbf{k}s}^{+}|0\rangle=d_{\mathbf{k}s}^{+}|0\rangle, \tag{6.50)a$$

$$\mathscr{C}d_{\mathbf{k}s}^{+}|0\rangle=c_{\mathbf{k}s}^{+}|0\rangle. \tag{6.50)b$$

因此，在场论的理论框架里，电荷共轭变换直接交换粒子与反粒子，场方程不再有负能解，“负能粒子海”也完全没有必要引入了。

电荷共轭变换对场物理量有以下影响：

$$\mathscr{C}\mathrm{H}\mathscr{C}^{-1}=\mathrm{H}, \tag{6.51}$$

$$\mathscr{C}\mathbf{P}\mathscr{C}^{-1}=\mathbf{P}, \tag{6.52}$$

$$\mathscr{C}Q\mathscr{C}^{-1}=-Q. \tag{6.53}$$

这些结果的正确性，只要注意到：在电荷共轭变换下，$c_{\mathbf{k}s}^{+}c_{\mathbf{k}s}$与$d_{\mathbf{k}s}^{+}d_{\mathbf{k}s}$互换就一目了然。按照（6.53）式，场的守恒流密度矢量$J_\mu$应当具有以下的变换性质：

$$\mathscr{C}J_\mu\mathscr{C}^{-1}=-J_\mu, \tag{6.54}$$

但是事实上，

$$J_\mu(x)=i\overline{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x) \tag{6.55}$$

并不具有（6.54）式的变换性质。这是因为按照（6.55）式，在广义守恒荷$Q$的动量空间表示式里将出现无穷大的零点荷。这个无穷大的零点荷使得$Q$的表示式对交换算符$c_{\mathbf{k}s}^{+}c_{\mathbf{k}s}$和$d_{\mathbf{k}s}^{+}d_{\mathbf{k}s}$的操作失去了应有的反对称性。因此，我们假定在$J_\mu$的表示式里场算符及其电符共轭算符应当反对称地出现，即应有：

$$J_\mu(x)=\frac{i}{2}[\overline{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)-\overline{\psi}^{\mathrm{C}}(x)\gamma_\mu\psi^{\mathrm{C}}(x)]. \tag{6.56}$$

此式已完全满足（6.54）式。由于

$$\overline{\psi}^{\mathrm{T}}(x)=\mathrm{C}^{-1}\psi^{\mathrm{C}}(x), \tag{6.57)a$$

$$\psi^{\mathrm{T}}(x)=-\overline{\psi}^{\mathrm{C}}\mathrm{C} \tag{6.57)b$$

故

$$\overline{\psi}^{\mathrm{C}}\gamma_\mu\psi^{\mathrm{C}}=\psi^{\mathrm{T}}\gamma_\mu^{\mathrm{T}}\overline{\psi}^{\mathrm{T}}=(\gamma_\mu\psi)^{\mathrm{T}}\overline{\psi}^{\mathrm{T}},$$

于是，可把（6.56）式重写为：

$$J_\mu(x)=\frac{i}{2}\left\{\overline{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)-[\gamma_\mu\psi(x)]^{\mathrm{T}}\overline{\psi}^{\mathrm{T}}(x)\right\}, \tag{6.58}$$

此式右边实际上是Hilbert空间算符$\psi_\alpha(x)$、$\overline{\psi}_\beta(x)$的对易括号，因而又可把（6.58）式的$J_\mu(x)$重写为如下的反对称形式：

$$J_\mu(x) = \frac{i}{2}[\overline{\psi}(x), \gamma_\mu \psi(x)]. \tag{6.59}$$

由此可见，用（6.56）式来定义$J_\mu(x)$，事实上是将$J_\mu(x)$对场算符$\psi_\alpha(x)$、$\overline{\psi}_\beta(x)$实行反对称化。相应地，（6.59）式的$J_\mu(x)$就叫做反对称化的流算符。

现在来证明，守恒流的上述反对称化定义与其正规乘积的定义

$$J_\mu(x) = i : \overline{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) : \tag{6.60}$$

等效，即要证明

$$\frac{1}{2}[\overline{\psi}(x), \gamma_\mu \psi(x)] = : \overline{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) : \tag{6.61}$$

注意到 $\psi_\alpha^T(x)\,(\gamma_\mu^T)^{\alpha\beta}\overline{\psi}_\beta^T(x) \equiv \psi_\alpha(x)\gamma_\mu^{\beta\alpha}\,\overline{\psi}_\beta(x)$，可将上式左边用$\psi_\alpha(x)$、$\overline{\psi}_\beta(x)$ 表示为：

$$\frac{1}{2}[\overline{\psi}(x),\ \gamma_\mu \psi(x)] = \frac{1}{2}\gamma_\mu^{\beta\alpha}\,[\overline{\psi}_\beta(x), \psi_\alpha(x)]. \tag{6.62}$$

将（6.62）代入（6.61），所要证明的结果就成为：

$$\frac{\gamma_\mu^{\beta\alpha}}{2}\left[\overline{\psi}_\beta(x),\ \psi_\alpha(x)\right] = \gamma_\mu^{\beta\alpha} : \overline{\psi}_\beta(x)\psi_\alpha(x) : \tag{6.63}$$

现在，把$\psi_\alpha(x)$和$\overline{\psi}_\beta(x)$均按(6.6)式分解为正、负频率部分之和：$\psi_\alpha(x) = \psi_\alpha^{(+)}(x) + \psi_\alpha^{(-)}(x)$，$\overline{\psi}_\beta(x) = \overline{\psi}_\beta^{(+)}(x) + \overline{\psi}_\beta^{(-)}(x)$，利用正规乘积的定义(6.19) 不难算出(6.63)式左、右两边之差为：

$$\gamma_\mu^{\beta\alpha}\left(:\overline{\psi}_\beta(x)\psi_\alpha(x): - \frac{1}{2}[\overline{\psi}_\beta(x),\ \psi_\alpha(x)]\right) = \frac{\gamma_\mu^{\beta\alpha}}{2}\Big(\{\overline{\psi}_\beta^{(+)}(x),\ \psi_\alpha^{(+)}(x)\}$$

$$- \{\psi_\alpha^{(-)}(x),\ \overline{\psi}_\beta^{(+)}(x)\} + \{\overline{\psi}_\beta^{(-)}(x),\ \psi_\alpha^{(+)}(x)\} + \{\overline{\psi}_\beta^{(-)}(x),\ \psi_\alpha^{(-)}(x)\}\Big). \tag{6.64}$$

将（6.6）式与（6.8）式相结合便可算出上式右边的反对易括号：

$$\{\psi_\alpha^{(+)}(x),\ \overline{\psi}_\beta^{(+)}(y)\} = \{\psi_\alpha^{(-)}(x),\ \overline{\psi}_\beta^{(-)}(y)\} = 0 \tag{6.65a}$$

$$\{\psi_\alpha^{(+)}(x),\ \overline{\psi}_\beta^{(-)}(y)\} = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}}\frac{m}{E_k}\Big(\sum_s u_{\mathbf{k}s}^\alpha \overline{u}_{\mathbf{k}s}^\beta\Big)e^{ik\cdot(x-y)} \tag{6.65b}$$

$$\{\psi_\alpha^{(-)}(x),\ \overline{\psi}_\beta^{(+)}(y)\} = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}}\frac{m}{E_k}\Big(\sum_s v_{\mathbf{k}s}^\alpha \overline{v}_{\mathbf{k}s}^\beta\Big)e^{-ik\cdot(x-y)} \tag{6.65c}$$

把（6.65）代入（6.64）即得

$$\gamma_\mu^{\beta\alpha}\left(:\overline{\psi}_\beta(x)\psi_\alpha(x):-\frac{1}{2}[\overline{\psi}_\beta(x),\psi_\alpha(x)]\right)$$

$$=\gamma_\mu^{\beta\alpha}\frac{1}{2V}\sum_{\mathbf{k}}\frac{m}{E_k}\sum_s\left(u_{\mathbf{k}s}^\alpha\overline{u}_{\mathbf{k}s}^\beta-v_{\mathbf{k}s}^\alpha\overline{v}_{\mathbf{k}s}^\beta\right)$$

$$=\gamma_\mu^{\beta\alpha}\frac{1}{2V}\sum_{\mathbf{k}}\frac{m}{E_k}\delta^{\alpha\beta}=\frac{1}{2V}\sum_{\mathbf{k}}\frac{m}{E_k}(\mathrm{Tr}\gamma_\mu)=0.$$

这样，就证明了（6.61）式。因$\mathrm{Tr}\gamma_5=0$，故当把$\gamma_\mu$换成$\gamma_5$时，（6.61）式仍然成立。

综上所述，由于守恒流的反对称化定义（6.59）等效于其正规乘积定义（6.60），因而这样定义守恒流算符之后，无穷大的零点荷已被抛弃，从而保证使$J_\mu(x)$具有正确的变换性质（6.54）。这与量子化标量场的情形是完全一致的〔见(5.111)—（5.115)〕。

在第一章里已从量子力学角度证明了Dirac方程的电荷共轭不变性。由于算符$\mathscr{C}$的幺正性，场方程和等时反对易关系的电荷共轭不变性是极易证明的，请读者自己去做。

### （三）时间反演变换

旋量场的时间反演变换法则比标量场要复杂一些。让我们首先来看经典场（即量子力学波函数）$\psi(x)$的时间反演变换。假设在时间反演变换

$$x'_\mu=\widetilde{\delta}_{\mu\nu}x_\nu\quad\left(\text{其中，}\widetilde{\delta}_{\mu\nu}=\begin{cases}0, & \text{当}\mu\neq\nu\\+1, & \text{当}\mu=\nu=j=1,2,3\\-1, & \text{当}\mu=\nu=4\end{cases}\right)$$

之下，场函数$\psi(x)$按下式变换：

$$\psi'(x')=R\psi(x),$$

那么，大体重复第一章§4的讨论方法（注意$\widetilde{\delta}_{\mu\nu}$与$\overline{\delta}_{\mu\nu}$的区别），即可看出，仅当$R=\gamma_1\gamma_2\gamma_3$时，即仅当

$$\psi'(x')=\gamma_1\gamma_2\gamma_3\psi(x)$$

时，才能保证Dirac方程的时间反演不变性。在量子场论里，上式同样是量子场算符在时间反演下的变换法则。

现在，采用类似于第五章§4，（三）的做法，用Hilbert空间的反幺正算符

$$\mathscr{T}=U\mathscr{K}\tag{6.66}$$

来实现场算符的时间反演变换。但必须注意，在旋量场情形下，

$$\mathscr{T}\psi(\mathbf{x},t)\mathscr{T}^{-1}\neq\psi'(\mathbf{x},t)=\gamma_1\gamma_2\gamma_3\psi(\mathbf{x},-t).$$

为了找到正确的对称变换法则，即为了确定$\mathscr{T}\psi(x)\mathscr{T}^{-1}$等于什么，首先来比较$\psi'(x)$与$\mathscr{T}\psi(x)\mathscr{T}^{-1}$所满足的方程式。在反演后的Dirac方程

$$(\gamma_\mu \partial'_\mu + m)\psi'(x') = 0$$

里，以$-t$代替$t$，就得到$\psi'(x)$所满足的方程式：

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi'(x) = 0 \tag{6.67a}$$

此式就是Dirac方程（1.34）。再以反幺正算符$\mathscr{T}$去变换（1.34）式，并注意：$\mathscr{T}\gamma_\mu\mathscr{T}^{-1} = \gamma_\mu^*$，$\mathscr{T}\partial_\mu\mathscr{T}^{-1} = \partial_\mu^*$以及$\gamma_1^* = -\gamma_1$，$\gamma_2^* = \gamma_2$，$\gamma_3^* = -\gamma_3$，$\gamma_4^* = \gamma_4$，$\partial_j^* = \partial_j$ $(j = 1, 2, 3)$，$\partial_4^* = -\partial_4$，就得到$\mathscr{T}\psi(x)\mathscr{T}^{-1}$所满足的方程式：

$$(-\gamma_1\partial_1 + \gamma_2\partial_2 - \gamma_3\partial_3 - \gamma_4\partial_4 + m)\mathscr{T}\psi(x)\mathscr{T}^{-1} = 0 \tag{6.67b}$$

由此可见，$\mathscr{T}\psi(x)\mathscr{T}^{-1}$不满足Dirac方程(1.34).现在，需要适当变换方程式(6.67)$a$，以$-\gamma_2$左乘(6.67)$a$，并利用$\gamma$矩阵的反对易关系(1.36)$a$以及前面得到的公式：$\psi'(x') = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\psi(x)$可得

$$(-\gamma_1\partial_1 + \gamma_2\partial_2 - \gamma_3\partial_3 - \gamma_4\partial_4 + m)\gamma_1\gamma_3\psi(\mathbf{x}, -t) = 0. \tag{6.68}$$

将（6.68）与（6.67)$b$比较可知，$\mathscr{T}\psi(x)\mathscr{T}^{-1}$与$\gamma_1\gamma_3\psi(\mathbf{x}, -t)$之间存在线性关系，从简单性考虑，可直接令二者相等．由此就得到场算符的时间反演变换法则：

$$\mathscr{T}\psi(\mathbf{x}, t)\mathscr{T}^{-1} = \gamma_1\gamma_3\psi(\mathbf{x}, -t), \tag{6.69a}$$

令

$$T_\gamma = \gamma_3\gamma_1, \tag{6.69b}$$

$$T_\gamma^{-1} = \gamma_1\gamma_3, \tag{6.69c}$$

就可把（6.69)$a$式写为：

$$\mathscr{T}\psi(\mathbf{x}, t)\mathscr{T}^{-1} = T_\gamma^{-1}\psi(\mathbf{x}, -t). \tag{6.70}$$

不难验证（6.69)$b$式定义的算符$T_\gamma$满足以下诸条件：

$$T_\gamma^+ = T_\gamma^{-1} = -T_\gamma, \tag{6.71a}$$

$$T_\gamma^T = -T_\gamma, \tag{6.71b}$$

$$T_\gamma^* = (T_\gamma^T)^{-1} = -T_\gamma^{-1}, \tag{6.71c}$$

$$T_\gamma^{-1}\gamma_\mu T_\gamma = \gamma_\mu^*. \tag{6.72a}$$

把（6.71)$a$与（6.72)$a$相结合，同样还有

$$T_\gamma\gamma_\mu T_\gamma^{-1} = \gamma_\mu^*. \tag{6.72b}$$

从（6.68）式容易看出，$\psi(\mathbf{x}, -t)$满足变换后的Dirac方程（1.34）：

$$(\gamma_\mu\partial'_\mu + m)\psi(\mathbf{x}, -t) = 0.$$

至此，我们已找到场算符的时间反演变换法则（6.70），以及$\psi'(x') = R\psi(x)$，并详细讨论了Dirac方程的时间反演不变性．下面再来证明等时反对易关系(6.2)的不变性．利用变换法则（6.70），并注意：$\mathscr{T}T_\gamma\mathscr{T}^{-1} = -T_\gamma^{-1}$、$\mathscr{T}^{-1}T_\gamma\mathscr{T} = -T_\gamma^{-1}$〔此二式可

用 (6.71)$c$式来验证〕即得：

$$
\begin{aligned}
&\{\psi_\alpha(\mathbf{x},-t),\ \psi_\beta^+(\mathbf{y},-t)\}\\
&=\{[\mathrm{T}_\gamma\mathscr{T}\psi(\mathbf{x},t)\mathscr{T}^{-1}]_\alpha,[\mathscr{T}\psi^+(\mathbf{y},t)\mathscr{T}^{-1}\mathrm{T}_\gamma^{-1}]_\beta\}\\
&=\mathscr{T}\{[\mathrm{T}_\gamma^{-1}\psi(\mathbf{x},t)]_\alpha,[\psi^+(\mathbf{y},t)\mathrm{T}_\gamma]_\beta\}\mathscr{T}^{-1}\\
&=\mathscr{T}(\mathrm{T}_\gamma^{-1})_{\alpha\sigma}(\mathrm{T}_\gamma)_{\lambda\beta}\{\psi_\sigma(\mathbf{x},t),\psi_\lambda^+(\mathbf{y},t)\}\mathscr{T}^{-1}\\
&=\delta_{\alpha\beta}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y});
\end{aligned}
$$

因为$R^+=\gamma_3\gamma_2\gamma_1=R^{-1}$，所以在上式两端乘以 $R_{\tau\alpha}R^+_{\beta\lambda}$，并注意$\psi'(x)=R\psi(\mathbf{x},-t)$，可得：

$$
\begin{aligned}
&\{\psi'_\tau(\mathbf{x},t),\ \psi'^+_\lambda(\mathbf{y},t)\}=\{R_{\tau\alpha}\psi_\alpha(\mathbf{x},-t),\ \psi_\beta^+(\mathbf{y},t)R^+_{\beta\lambda}\}\\
&=R_{\tau\alpha}R^+_{\beta\lambda}\ \delta_{\alpha\beta}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})=\delta_{\tau\lambda}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y});
\end{aligned}
$$

同样地，以$R_{\tau\alpha}R^+_{\beta\lambda}$ 乘 (6.2)$a$式之两端，并注意：$\psi'(x')=R\psi(x)$，又得到：

$$
\{\psi'_\tau(\mathbf{x}',t'),\ \psi'^+_\lambda(\mathbf{x}',t')\}=\delta_{\tau\lambda}\delta^{(3)}(\mathbf{x}'-\mathbf{y}').
$$

以上详细讨论了反对易关系 (6.2)$a$的时间反演不变性。(6.2)$b$ 的不变性请读者自己证明。

综上所述，在旋量场情形下，虽然不能像在标量场情形下那样找到一个简单的相容性条件，但经典场的时间反演变换法则$\psi'(x')=R\psi(x)$与量子场的变换法则 (6.70) 仍然是内在一致的。

时间反演对场物理量的影响，与从倒过来放映的电影里所看到的情形一致：

$$
\begin{aligned}
\mathscr{T}\mathrm{H}(t)\mathscr{T}^{-1}&=\int_V d^3x:\mathscr{T}\psi^+(\mathbf{x},t)\mathscr{T}^{-1}\mathscr{T}i\mathscr{T}^{-1}\\
&\times\mathscr{T}\partial_t\mathscr{T}^{-1}\mathscr{T}\psi(\mathbf{x},t)\mathscr{T}^{-1}:\\
&=\int_V d^3x:\psi^+(\mathbf{x},-t)i\partial_{-t}\psi(\mathbf{x},-t):=\mathrm{H}(-t)
\end{aligned}
\tag{6.73}
$$

因为H$(t)$是守恒物理量算符，故上式事实上应写为：

$$
\mathscr{T}\mathrm{H}(t)\mathscr{T}^{-1}=\mathrm{H}(t),\tag{6.74}
$$

类似地有

$$
\mathscr{T}\mathbf{P}(t)\mathscr{T}^{-1}=-\mathbf{P}(t),\tag{6.75}
$$

$$
\mathscr{T}J_\mu(\mathbf{x},t)\mathscr{T}^{-1}=-J_\mu(\mathbf{x},-t).\tag{6.76}
$$

## §4 不等时反对易关系

等时反对易关系 (6.1) 和 (6.2) 要求反对易括号中的两个场算符属同一时刻的算

符，而且$\psi^+(x)$不是Lorentz协变量．由于第五章§5所述的原因，这些反对易关系均不具有显示的 Lorentz 不变性．为了建立具有显示不变性的反对易关系，我们来计算不等时反对易括号$\{\psi_\alpha(x),\overline{\psi}_\beta(y)\}$之值．利用（6.65）$a$可得：

$$\{\psi_\alpha(x),\overline{\psi}_\beta(y)\}=\{\psi_\alpha^{(+)}(x),\ \overline{\psi}_\beta^{(-)}(y)\}+\{\psi_\alpha^{(-)}(x),\ \overline{\psi}_\beta^{(+)}(y)\},\qquad(6.77)$$

将（1.197）$a$和（1.201）$a$结合并代入（6.65）$b$得到上式右边第一项：

$$\{\ \psi_\alpha^{(+)}(x),\ \overline{\psi}_\beta^{(-)}(y)\}=\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{2iE_k}(\gamma\cdot k+im)_{\alpha\beta}e^{ik\cdot(x-y)},\qquad(6.78)a$$

再将（1.197）$b$和（1.201）$b$结合并代入（6.65）$c$得到（6.77）式右边第二项：

$$\{\ \psi_\alpha^{(-)}(x),\ \overline{\psi}_\beta^{(+)}(y)\}=\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{2iE_k}(\gamma\cdot k-im)_{\alpha\beta}e^{-ik\cdot(x-y)}\qquad(6.78)b$$

因

$$\gamma\cdot ke^{\pm ik\cdot(x-y)}=\mp i\gamma\cdot\partial e^{\pm ik\cdot(x-y)},$$

（这里，$\partial\equiv\partial_x=\dfrac{\partial}{\partial x}$），故（6.78）式又可重写为：

$$\{\ \psi_\alpha^{(+)}(x),\ \overline{\psi}_\beta^{(-)}(y)\}=-i(\gamma\cdot\partial-m)_{\alpha\beta}\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{2iE_k}e^{ik\cdot(x-y)},\qquad(6.79)a$$

$$\{\ \psi_\alpha^{(-)}(x),\ \overline{\psi}_\beta^{(+)}(y)\}=-i(\gamma\cdot\partial-m)_{\alpha\beta}(-\frac{1}{V})\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{2iE_k}e^{-ik\cdot(x-y)}\qquad(6.79)b$$

将以上二式分别与(5.134)$a$、(5.134)$b$比较，便可将$\dfrac{\pm1}{V}\sum\limits_{\mathbf{k}}\dfrac{1}{2iE_k}e^{\pm ik\cdot(x-y)}$记为$\Delta^{(\pm)}(x-y)$：

$$\{\ \psi_\alpha^{(+)}(x),\ \overline{\psi}_\beta^{(-)}(y)\}=-i(\gamma\cdot\partial-m)_{\alpha\beta}\Delta^{(+)}(x-y),\qquad(6.80)a$$

$$\{\ \psi_\alpha^{(-)}(x),\ \overline{\psi}_\beta^{(+)}(y)\}=-i(\gamma\cdot\partial-m)_{\alpha\beta}\Delta^{(-)}(x-y).\qquad(6.80)b$$

但应注意，这里的$\Delta^{(\pm)}(x-y)$与标量场的$\Delta^{(\pm)}(x-y)$有区别，其中的质量是旋量粒子的质量．把（6.80）代入（6.77），并利用（5.136）便得到：

$$\{\psi_\alpha(x),\overline{\psi}_\beta(y)\}=-i(\gamma\cdot\partial-m)_{\alpha\beta}\Delta(x-y),\qquad(6.81)a$$

此外，利用反对易关系（6.8）$c$和平面波展开式（6.6）又可得：

$$\{\psi_\alpha(x),\psi_\beta(y)\}=\{\overline{\psi}_\alpha(x),\overline{\psi}_\beta(y)\}=0.\qquad(6.81)b$$

（6.81）便是所要建立的不等时反对易关系．定义反对易子函数$S^{(\pm)}$和S：

$$S^{(\pm)}_{\alpha\beta}(x-y)=(\gamma\cdot\partial-m)_{\alpha\beta}\Delta^{(\pm)}(x-y), \tag{6.82a}$$

$$S_{\alpha\beta}(x-y)=(\gamma\cdot\partial-m)_{\alpha\beta}\Delta(x-y). \tag{6.82b}$$

则（6.80）式和（6.81）式分别成为：

$$\{\psi^{(+)}_{\alpha}(x),\overline{\psi}^{(-)}_{\beta}(y)\}=-iS^{(+)}_{\alpha\beta}(x-y), \tag{6.83a}$$

$$\{\psi^{(-)}_{\alpha}(x),\overline{\psi}^{(+)}_{\beta}(y)\}=-iS^{(-)}_{\alpha\beta}(x-y). \tag{6.83b}$$

和

$$\{\psi_{\alpha}(x),\overline{\psi}_{\beta}(y)\}=-iS_{\alpha\beta}(x-y), \tag{6.84a}$$

$$\{\psi_{\alpha}(x),\psi_{\beta}(y)\}=\{\overline{\psi}_{\alpha}(x),\overline{\psi}_{\beta}(y)\}=0. \tag{6.84b}$$

反对易关系（6.83）和（6.84）也可以用旋量矩阵的形式写出来：

$$\{\psi^{(+)}(x),\overline{\psi}^{(-)}(y)\}=-iS^{(+)}(x-y), \tag{6.85a}$$

$$\{\psi^{(-)}(x),\overline{\psi}^{(+)}(y)\}=-iS^{(-)}(x-y). \tag{6.85b}$$

$$\{\psi(x),\overline{\psi}(y)\}=-iS(x-y), \tag{6.86a}$$

$$\{\psi(x),\psi(y)\}=\{\overline{\psi}(x),\overline{\psi}(y)\}=0 \tag{6.86b}$$

现在来证明不等时反对易关系（6.81）的Lorentz 不变性。把（6.81）$a$ 中的算符和 $\partial_\mu$ 都换成变换后的量：

$$\begin{aligned}
\{\psi_{\alpha}(x),\overline{\psi}_{\beta}(y)\}&=\{\Lambda^{-1}_{\alpha\lambda}\psi'_{\lambda}(x'),\ \overline{\psi}'_{\sigma}(y')\Lambda_{\sigma\beta}\}\\
&=-i\,(\gamma_{\mu}a_{\nu\mu}\partial'_{\nu}-m)_{\alpha\beta}\Delta'(x'-y')\\
&=-i(\Lambda^{-1}\gamma_{\nu}\Lambda\partial'_{\nu}-m)_{\alpha\beta}\Delta'(x'-y')\\
&=-i\,[\Lambda^{-1}_{\alpha\alpha'}(\gamma_{\nu})_{\alpha'\beta'}\Lambda_{\beta'\beta}\partial'_{\nu}-m\delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\alpha'\beta'}\delta_{\beta'\beta}]\Delta'(x'-y'),
\end{aligned}$$

此式两边同乘以 $\Lambda_{\eta\alpha}\Lambda^{-1}_{\beta\tau}$ 并对 $\alpha$（从 1 到 4）和 $\beta$（从 1 到 4）求和：

$$\begin{aligned}
&\Lambda_{\eta\alpha}\Lambda^{-1}_{\alpha\lambda}\Lambda_{\sigma\beta}\Lambda^{-1}_{\beta\tau}\ \{\psi'_{\lambda}(x'),\ \overline{\psi}'_{\sigma}(y')\}\\
&=-i\,(\Lambda_{\eta\alpha}\Lambda^{-1}_{\alpha\alpha'}(\gamma_{\nu})_{\alpha'\beta'}\Lambda_{\beta'\beta}\ \Lambda^{-1}_{\beta\tau}\partial'_{\nu}\\
&\quad-m\Lambda_{\eta\alpha}\delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\alpha'\beta'}\delta_{\beta'\beta}\Lambda^{-1}_{\beta\tau})\Delta'(x'-y').
\end{aligned}$$

借助于熟知的矩阵乘法规则，立即由上式得到：

$$\{\psi'_{\eta}(x'),\ \overline{\psi}'_{\tau}(y')\}=-i(\gamma\cdot\partial'-m)_{\eta\tau}\Delta'(x'-y').$$

在上述证明中，曾使用了$\Delta(x)$的标量性质。类似地可以证明（6.81）$b$式的 Lorentz不变性。

## §5 Feynman传播函数

传播函数的物理意义以及它的场论定义已在第五章详述过．这一节我们来讨论旋量场传播函数的数学形式．与正规乘积的情形一样，旋量场算符在时序乘积符号下是反对易的：

$$T[\psi_\alpha(x_1)\overline{\psi}_\beta(x_2)] = \begin{cases} \psi_\alpha(x_1)\overline{\psi}_\beta(x_2), & \text{当} t_1 > t_2, \\ -\overline{\psi}_\beta(x_2)\psi_\alpha(x_1), & \text{当} t_2 > t_1. \end{cases} \tag{6.87}$$

即

$$T[\psi_\alpha(x_1)\overline{\psi}_\beta(x_2)] = -T[\overline{\psi}_\beta(x_2)\psi_\alpha(x_1)]. \tag{6.88}$$

量子化旋量场的传播函数$S_F(x_1-x_2)$便是时序乘积（6.87）的真空期望值：

$$S_F(x_1-x_2) = \langle 0|T[\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)]|0\rangle \tag{6.89a}$$

或

$$S_{F\alpha\beta}(x_1-x_2) = \langle 0|T[\psi_\alpha(x_1)\overline{\psi}_\beta(x_2)]|0\rangle. \tag{6.89b}$$

为了找到$S_F$的四维积分表示式， 首先要找出$S_F$与标量场传播函数$\Delta_F$之间的关系．当$t_1>t_2$时，注意到（6.83）$a$，我们有

$$\begin{aligned} S_{F\alpha\beta}(x_1-x_2) &= \langle 0|T[\psi_\alpha(x_1)\overline{\psi}_\beta(x_2)]|0\rangle \\ &= \langle 0|\{\psi_\alpha^{(+)}(x_1), \overline{\psi}_\beta^{(-)}(x_2)\}|0\rangle = -iS_{\alpha\beta}^{(+)}(x_1-x_2), \end{aligned} \tag{6.90a}$$

当$t_2>t_1$时，注意到（6.83）$b$，又有

$$S_{F\alpha\beta} = iS_{\alpha\beta}^{(-)}(x_1-x_2). \tag{6.90b}$$

因此，

$$\begin{aligned} S_{F\alpha\beta}(x_1-x_2) &= \langle 0|T[\psi_\alpha(x_1)\overline{\psi}_\beta(x_2)]|0\rangle \\ &= -i\theta(t_1-t_2)\,S_{\alpha\beta}^{(+)}(x_1-x_2) + i\theta(t_2-t_1)\,S_{\alpha\beta}^{(-)}(x_1-x_2) \\ &= -i\theta(t_1-t_2)(\gamma\cdot\partial-m)_{\alpha\beta}\Delta^{(+)}(x_1-x_2) \\ &\quad + i\theta(t_2-t_1)(\gamma\cdot\partial-m)_{\alpha\beta}\Delta^{(-)}(x_1-x_2), \end{aligned}$$

其中，$\partial\equiv\dfrac{\partial}{\partial x_1}$(即对$x_1$点的坐标求导)．因为

$$\gamma\cdot\partial\theta(t_1-t_2) = -i\gamma_4\partial_{t_1}\theta(t_1-t_2) = -i\gamma_4\delta(t_1-t_2),$$

且$t_1\neq t_2$，所以可将$\theta(t_1-t_2)$和$\theta(t_2-t_1)$移到微分算符右边：

$$S_{F\alpha\beta}(x_1-x_2)=-(\gamma\cdot\partial-m)_{\alpha\beta}[i\theta(t_1-t_2)\Delta^{(+)}(x_1-x_2)$$
$$-i\theta(t_2-t_1)\Delta^{(-)}(x_1-x_2)]$$

另方面，把（5.134）式代入到（5.171）式的第二个等号右方，可得到

$$\Delta_F(x)=i\theta(t)\Delta^{(+)}(x)-i\theta(-t)\Delta^{(-)}(x), \tag{6.91}$$

因而我们有

$$S_{F\alpha\beta}(x_1-x_2)=-(\gamma\cdot\partial-m)_{\alpha\beta}\Delta_F(x_1-x_2). \tag{6.92}$$

令$x_1=x$，$x_2=0$，则上式成为

$$S_{F\alpha\beta}(x)=-(\gamma\cdot\partial-m)_{\alpha\beta}\Delta_F(x), \qquad (6.93)a$$

或

$$S_F(x)=-(\gamma\cdot\partial-m)\Delta_F(x). \qquad (6.93)b$$

利用$\Delta_F(x)$的四维积分表示式（5.175），不难得到$S_F$的四维积分表示式为：

$$S_F(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k S_F(k)e^{ik\cdot x}, \qquad (6.94)a$$

其中，付利叶分量

$$S_F(k)=\frac{-1}{\gamma\cdot k-im-i\varepsilon} \qquad (6.94)b$$

便是传播函数$S_F(x)$的动量空间表示式。

## 习　题

*（1）根据第二章的讨论以及第五章§6的讨论，你现在如何理解一个自由电子的运动？量子场论对单个场量子的运动是否能给出理论描写？

（2）推导（6.14）式和（6.15）式。

（3）证明：在正规乘积符号下，Bose场算符相互对易，而Fermi场算符相互反对易。

（4）从（6.28）式出发推出在正Lorentz变换和三维空间正转动下$\psi(x)$之变换法则。

（5）以旋量场为例证明：在三维空间正转动下，场的主动变换的生成元是场的总角动量算符，而场的被动变换的生成元则是场的自旋角动量算符。

（6）完成本章§2关于规范对称性的讨论。

（7）在量子场论里，电荷共轭变换直接交换粒子与反粒子，勿需引入负能粒子作为中介，其根本原因何在？

（8）验证（6.76）式。

（9）在§4里曾证明了（6.81）式的Lorentz不变性，如果直接证明（6.86）式的Lorentz不变性，将会遇到什么困难？

（10）证明（6.82）式定义的$S^{(\pm)}(x)$、$S(x)$均满足量子场方程式（1.34）。

（11）用类似第五章§7的方法找出旋量场不变函数，并推出其四维积分表示式。

（12）在场物理量算符的表示式里、不等时反对易括号里以及传播子里，场算符的相乘方式有什么不同？为何会有这些不同？

（13）推出量子化旋量场的时间反演算符$\mathcal{T}$的表示式，并导出旋量场有一个粒子的态和有一个反粒子的态在时间反演下的变换法则。

（14）证明：如果我们要求场的真空态具有 Lorentz 不变性，则不但场的零点动量恒为零，而且零点能量也为零；

• 但是，在正则量子化的结果里，场的零点能量并不为零（必须根据实验事实人为地令它为零），对此应当如何解释？

# 第七章　量子化电磁场

如第一章所述，光子自旋为1，电磁场是Bose场。在第二章里曾通过场方程的谐振子解对电磁场进行量子化，但在那里，为了突出物理内容曾采用Coulomb规范进行量子化。在Coulomb规范下，非物理的自由度已被消除(见第一章，§12)，量子化方法比较简单，但理论失去了明显的Lorentz协变性，处理相互作用反而不方便。因此，在这一章里，我们将采用Lorentz规范进行量子化，由于在Lorentz规范下，电磁场出现非物理的自由度，因而量子化方法要复杂一些。

## §1　电磁场的量子化

在Lorentz规范下，经典电磁场的场方程便是(1.250)式。其中，势分量$A_\mu(x)$便是电磁场的场函数。场的Lagrange函数密度由(3.42)式给出，场的正则坐标和正则共轭动量分别是：

$$A_\mu(x) \text{ 和 } \pi_\mu(x)=\dot{A}_\mu(x), \tag{7.1}$$

因此，按照(4.38)式，电磁场的量子化条件为：

$$[A_\mu(\mathbf{x},t),\pi_\nu(\mathbf{y},t)]=i\delta_{\mu\nu}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{7.2a}$$

$$[A_\mu(\mathbf{x},t),A_\nu(\mathbf{y},t)]=[\pi_\mu(\mathbf{x},t),\pi_\nu(\mathbf{y},t)]=0. \tag{7.2b}$$

按照(4.41)式，量子场正则运动方程为：

$$\dot{A}_\mu(\mathbf{x},t)=\frac{1}{i}[A_\mu(\mathbf{x},t),\mathrm{H}(t)] \tag{7.3a}$$

$$\dot{\pi}_\mu(\mathbf{x},t)=\frac{1}{i}[\pi_\mu(\mathbf{x},t),\mathrm{H}(t)] \tag{7.3b}$$

场的Hamilton算符$\mathrm{H}(t)$便是(3.43)$b$式的量子对应：

$$\mathrm{H}(t)=\frac{1}{2}\int_V d^3x[\pi_\mu(\mathbf{x},t)\pi_\mu(\mathbf{x},t)+\nabla A_\mu(\mathbf{x},t)\cdot\nabla A_\mu(\mathbf{x},t)]. \tag{7.4}$$

把(7.4)代入(7.3)，并使用类似于导出(5.5)式的方法，可以得到：

$$\dot{A}_\mu=\pi_\mu,$$

以及

$$\dot{\pi}_\mu=\nabla^2 A_\mu,$$

以上两式给出量子化电磁场的场方程为

$$\square A_\mu(x) = 0 \tag{7.5}$$

此式与（1.250）式在形式上一致，因此，类似于（1.266）式，可以写出（7.5）式的任意解如下：

$$A_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}}\sum_{\lambda=1}^{4} e^{\mu}_{\mathbf{k}\lambda}\,(a_{\mathbf{k}\lambda}e^{ik\cdot x}+\bar{a}_{\mathbf{k}\lambda}e^{-ik\cdot x}) \tag{7.6a}$$

相应地有

$$\pi_\mu(x) = \frac{-i}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}\sqrt{\frac{|\mathbf{k}|}{2}}\sum_{\lambda=1}^{4} e^{\mu}_{\mathbf{k}\lambda}\,(a_{\mathbf{k}\lambda}e^{ik\cdot x}-\bar{a}_{\mathbf{k}\lambda}e^{-ik\cdot x}). \tag{7.6b}$$

其中，

$$\bar{a}_{\mathbf{k}\lambda} = \begin{cases} a^+_{\mathbf{k}\lambda}, & 当\lambda = 1, 2, 3 \\ -a^+_{\mathbf{k}\lambda} & 当\lambda = 4 \end{cases} \tag{7.7}$$

由（7.6）式和（7.7）式容易看出，$A_j(j=1, 2, 3)$为厄米算符，$A_4$为反厄米算符。如第一章所述，这是为了保证理论的显示协变性所必须的.

使用类似于推导（5.10）式的办法，并注意极化矢量的正交条件（1.264），即可从(7.6)式得到：

$$a_{\mathbf{k}\lambda} = \frac{i}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}}\int d^3x e^{-ik\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_t}e^{\mu}_{\mathbf{k}\lambda}A_\mu(x), \tag{7.8a}$$

$$\bar{a}_{\mathbf{k}\lambda} = \frac{i}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}}\int d^3x e^{\mu}_{\mathbf{k}\lambda}A_\mu(x)\overleftrightarrow{\partial_t}e^{ik\cdot x} \tag{7.8b}$$

微分算符$\overleftrightarrow{\partial_t}$的定义便是（5.11）式. 利用对易关系（7.2），正交条件（1.264），以及积分公式（1.184），并使用类似由（5.10）到（5.13）的推导步骤，即可得到$a_{\mathbf{k}\lambda}$、$\bar{a}_{\mathbf{k}\lambda}$所满足的如下对易关系：

$$[a_{\mathbf{k}\lambda},\ \bar{a}_{\mathbf{k}'\lambda'}] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{\lambda\lambda'}, \tag{7.9a}$$

$$[a_{\mathbf{k}\lambda},\ a_{\mathbf{k}'\lambda'}] = [\bar{a}_{\mathbf{k}\lambda},\ \bar{a}_{\mathbf{k}'\lambda'}] = 0. \tag{7.9b}$$

为了显示电磁场的粒子性，需要把场物理量算符的表示式转到动量空间. 把(7.6)代入（7.4），并利用积分公式（1.184）、对易关系（7.9），以及正交条件(1.264)，便得到算符H的动量空间表示式：

$$\mathrm{H} = \sum_{\mathbf{k}}\sum_{\lambda}^{4}(\bar{a}_{\mathbf{k}\lambda}a_{\mathbf{k}\lambda}+\frac{1}{2})|\mathbf{k}|. \tag{7.10}$$

重新定义真空态为零能态，并注意（7.7）式，可将上式重写为：

$$
\mathrm{H}=\sum_{\mathbf{k}}\Big(\sum_{\lambda}^{2}a_{\mathbf{k}\lambda}^{+}a_{\mathbf{k}\lambda}+a_{\mathbf{k}3}^{+}a_{\mathbf{k}3}-a_{\mathbf{k}4}^{+}a_{\mathbf{k}4}\Big)|\mathbf{k}| \tag{7.11}
$$

根据 (3.69)$b$，动量算符的坐标空间表示式为

$$
\mathbf{P}=-\int d^{3}x\,\dot{A}_{\mu}\nabla A_{\mu}. \tag{7.12}
$$

把 (7.6) 代入此式，大致重复 (7.11) 式的推导步骤就得到算符P的动量空间表示式

$$
\mathbf{P}=\sum_{\mathbf{k}}\Big(\sum_{\lambda}^{2}a_{\mathbf{k}\lambda}^{+}a_{\mathbf{k}\lambda}+a_{\mathbf{k}3}^{+}a_{\mathbf{k}3}-a_{\mathbf{k}4}^{+}a_{\mathbf{k}4}\Big)\mathbf{k}. \tag{7.13}
$$

由 (3.97) 式容易看出，电磁场的总电荷为零，这与光子不带电之事实一致。

现在，我们回到 (7.11) 式。该式右边的算符$a_{\mathbf{k}4}^{+}a_{\mathbf{k}4}$前面有负号，如果把这一算符定义为时间光子的粒子数算符，则场的能量就不可能是正定的。因此，为了保证场能的正定性，必须把时间光子的粒子数算符定义为

$$
\mathcal{N}_{\mathbf{k}4}=-a_{\mathbf{k}4}^{+}a_{\mathbf{k}4}. \tag{7.14}
$$

根据第二章的讨论以及对易关系 (7.9)，另外三种光子的粒子数算符分别是：$a_{\mathbf{k}1}^{+}a_{\mathbf{k}1}$、$a_{\mathbf{k}2}^{+}a_{\mathbf{k}2}$、$a_{\mathbf{k}3}^{+}a_{\mathbf{k}3}$；这些光子的产生、湮灭算符分别是$a_{\mathbf{k}j}^{+}$、$a_{\mathbf{k}j}(j=1,2,3)$。可以证明，时间光子的产生、湮灭算符便是$a_{\mathbf{k}4}^{+}$、$a_{\mathbf{k}4}$。假定$|n_{\mathbf{k}4}\rangle$是具有$n$个时间光子的场态，它即是$\mathcal{N}_{\mathbf{k}4}$的属于本征值$n$的本征态。我们来证明：$a_{\mathbf{k}4}^{+}|n_{\mathbf{k}4}\rangle$和$a_{\mathbf{k}4}|n_{\mathbf{k}4}\rangle$分别是$\mathcal{N}_{\mathbf{k}4}$的属于本征值$(n+1)$和$(n-1)$的本征态。为此，利用 (7.7) 式把对易关系 (7.9) 改写为：

$$
[a_{\mathbf{k}\lambda},a_{\mathbf{k}'\lambda'}^{+}]=\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{\lambda\lambda'},\quad 当\lambda、\lambda'=1,2,3 \tag{7.15a}
$$

$$
[a_{\mathbf{k}\lambda},a_{\mathbf{k}'\lambda'}^{+}]=-\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{\lambda\lambda'},\quad 当\lambda=\lambda'=4 \tag{7.15b}
$$

$$
[a_{\mathbf{k}\lambda},a_{\mathbf{k}'\lambda'}]=[a_{\mathbf{k}\lambda}^{+},a_{\mathbf{k}'\lambda'}^{+}]=0. \tag{7.15c}
$$

将$\mathcal{N}_{\mathbf{k}4}$作用于上述的两个态，并利用 (7.15) 式得：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N}_{\mathbf{k}4}a_{\mathbf{k}4}^{+}|n_{\mathbf{k}4}\rangle&=-a_{\mathbf{k}4}^{+}a_{\mathbf{k}4}a_{\mathbf{k}4}^{+}|n_{\mathbf{k}4}\rangle\\
&=-a_{\mathbf{k}4}^{+}(-1+a_{\mathbf{k}4}^{+}a_{\mathbf{k}4})|n_{\mathbf{k}4}\rangle=(n+1)\,a_{\mathbf{k}4}^{+}|n_{\mathbf{k}4}\rangle,\\
\mathcal{N}_{\mathbf{k}4}a_{\mathbf{k}4}|n_{\mathbf{k}4}\rangle&=-a_{\mathbf{k}4}^{+}a_{\mathbf{k}4}a_{\mathbf{k}4}|n_{\mathbf{k}4}\rangle\\
&=(-1-a_{\mathbf{k}4}a_{\mathbf{k}4}^{+})a_{\mathbf{k}4}|n_{\mathbf{k}4}\rangle\\
&=a_{\mathbf{k}4}(-1-a_{\mathbf{k}4}^{+}a_{\mathbf{k}4})|n_{\mathbf{k}4}\rangle\\
&=(n-1)a_{\mathbf{k}4}|n_{\mathbf{k}4}\rangle.
\end{aligned}
$$

这就证明了我们的结论。但是，到此为止尚无法对量子电磁场做出一个符合实验事实的粒子解释。这是因为在 (7.11) 式和 (7.13) 式里除了包含横光子以外，还包含纵光子

($\lambda = 3$)和时间光子($\lambda = 4$)，而后两种光子在自然界并不存在。

## §2 不定度规

在第一节里的量子化方法就是引入不定度规的量子化方法. 采用 Lorentz 规范进行量子化，就是为了使理论具有显示的Lorentz协变性，便于处理相互作用问题. 在Lorentz规范下，电磁场有四个独立的场函数$A_\mu(x)$.理论的明显协变性要求四个$A_\mu(x)$构成一个Lorentz矢量. 为此就必须使$A_j(x)$为实函数，$A_4(x)$为纯虚函数，在量子化之后，它们分别是厄米算符和反厄米算符. 这就意味着，理论的明显协变性与Minkowski空间的度量性质有着不可分割的联系. 为了说明这一点，首先简述一下什么是空间的度规（需要详细了解的读者，可参看П.К.РАШЕВСКИЙ 著，俞玉森译，"黎曼几何与张量解析"，上册，第三章. 高等教育出版社，1955年）. 度规是空间的几何性质. 例如在通常的三维坐标空间（三维实欧氏空间）里，关于任意两个矢量的标积以及任意一个矢量的长度平方的定义，就确定了这个三维空间的度规：假定$\mathbf{x}$、$\mathbf{y}$是两个任意的三维矢量，则：

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \sum_i x_i y_i = \sum_{ij} g_{ij} x_i y_j, \tag{7.16}$$

$$|\mathbf{x}|^2 = \sum_{ij} g_{ij} x_i x_j \tag{7.17}$$

其中，$g_{ij} \equiv \delta_{ij}$，且

$$\left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \tag{7.18}$$

称为三维实欧氏空间的度规张量. 由（7.17）式显见：

$$|\mathbf{x}|^2 > 0,\text{对任意的}\mathbf{x} \neq 0 \tag{7.19a}$$

$$|\mathbf{x}|^2 = 0,\text{仅当}\mathbf{x} = 0. \tag{7.19b}$$

即矢量的模平方均为正数，我们称三维实欧氏空间具有正定度规. 与此不同，在四维Minkowski空间里，矢量的模平方并不总取正值：

$$x^2 = |\mathbf{x}|^2 - t^2 \begin{cases} > 0 & \text{对于类空矢量} \\ = 0 & \text{对于类光矢量} \\ < 0 & \text{对于类时矢量} \end{cases} \tag{7.20}$$

因此，Minkowski空间具有不定度规. 倘若取时、空坐标为$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_0 = t$，则（7.20）式可重写为下式：

$$x^2 = |\mathbf{x}|^2 - t^2 = g_{\rho\sigma} x_\rho x_\sigma, (\rho、\sigma = 1, 2, 3, 0) \tag{7.21}$$

其中，$g_{jj} = 1, g_{00} = -1, g_{\rho\sigma} = 0$（当$\rho \neq \sigma$）. 在此种情形下，Minkowski 空间的度

规张量是

$$\{g_{\rho\sigma}\}=\begin{pmatrix}1&&&0\\&1&&\\&&1&\\0&&&-1\end{pmatrix} \tag{7.22}$$

现在来看场算符$A_\mu(x)$。因为$A_j(x)$为厄米算符，$A_4(x)$为反厄米算符，故$A_0(x)=-iA_4(x)$也是厄米算符．这样，算符$A_\mu(x)$便是Minkowski 空间的矢量（即 Lorentz 矢量）$A$的分量：

$$A^2=g_{\rho\sigma}A_\rho A_\sigma. \tag{7.23}$$

综上所述，Minkowski空间度规的不定性质，乃是使电磁场的量子理论具有明显协变性的必要条件，正因为如此，本章一开始就采取了平面波展式（7.6），并采取极化矢量的定义（1.263）．应当指出，在保证$A_4(x)$的反厄米性质的前提下，还可重新定义$e_{k4}$为

$$e_{k4}=\eta, \tag{7.24}$$

并同时在（7.6）中以$a^+_{k\lambda}$代替$\bar{a}_{k\lambda}$。但这样做，正交条件（1.264）也要相应地修改为：

$$e_{k\lambda}\cdot e_{k\lambda'}=\delta_{\lambda\lambda'}\qquad 当\lambda,\lambda'\neq 4, \tag{7.25a}$$

$$e_{k\lambda}\cdot e_{k\lambda}=-1\qquad 当\lambda=4. \tag{7.25b}$$

因而这时，对易关系（7.15）依然成立。

电磁场量子理论的明显协变性自然地导致Hilbert空间〔场算符$A_\mu(x)$的定义空间〕具有不定度规．要使理论具有显示的协变性，就必须要求场算符$A_\mu(x)$是Lorentz矢量的分量，否则，场方程（7.5）就没有Lorentz协变性，更谈不上建立协变的对易关系（这种对易关系将在§5 给出）；而为了使四个$A_\mu(x)$构成Lorentz矢量，就必须使$A_4(x)$为反厄米算符．如前所述，在此种情形下，我们有对易关系(7.9)，它可以改写成(7.15)式．首先来看具有$n$个(k，1)光子，$m$个(k，2)光子的态：

$$\frac{1}{\sqrt{n!\,m!}}(a^+_{k1})^n(a^+_{k2})^m|0\rangle=|n_{k1},m_{k2}\rangle. \tag{7.26}$$

在自由场情形下，可以把这个态表示为：

$$\frac{1}{\sqrt{n!\,m!}}(a^+_{k1})^n(a^+_{k2})^m|0\rangle=|n_{k1},m_{k2}\rangle$$

$$=a^+_{k1}\overbrace{|0\rangle\cdots a^+_{k1}|}^{n个}0\rangle\, a^+_{k2}\overbrace{|0\rangle\cdots a^+_{k2}|}^{m个}0\rangle.$$

按照正交条件（2.54），真空态的模平方为1，因而这个态的模平方也为1：

$$\langle m_{k2},n_{k1}|n_{k1},m_{k2}\rangle$$

$$=\langle 0|a_{k2}\cdots\langle 0|a_{k2}\langle 0|a_{k1}\cdots\langle 0|a_{k1}a^+_{k1}|0\rangle\cdots a^+_{k1}|0\rangle a^+_{k2}|0\rangle\cdots a^+_{k2}|0\rangle$$

$$=1. \tag{7.27}$$

在上式的证明里，使用了对易关系（7.15）$a$。利用（7.15）$a$式，同样可以证明具有$n$个纵光子的态，其模平方为1：

$$\langle n_{k3}|n_{k3}\rangle = 1 . \tag{7.28}$$

但利用(7.15)$b$式不难证明，具有$n$个时间光子的态，其模平方或者为1，或者为－1：

$$\begin{aligned}\langle n_{k4}|n_{k4}\rangle &= \overbrace{\langle 0|a_{k4}\cdots\langle 0|}^{n\text{个}}a_{k4}a_{k4}^{+}\overbrace{|0\rangle\cdots a_{k4}^{+}}^{n\text{个}}|0\rangle \\ &= \langle 0|a_{k4}\cdots\langle 0|[a_{k4},\ a_{k4}^{+}]|0\rangle\cdots a_{k4}^{+}|0\rangle \\ &= (-1)^{n}\end{aligned} \tag{7.29}$$

因此，凡是包含时间光子的态，其模平方可以为＋1，也可以为－1。换言之，由于我们要求理论具有明显的Lorentz协变性，就自然地导致Hilbert空间具有不定度规。

倘若放弃理论的明显协变性，可将（7.6）式中的$\bar{a}_{k\lambda}$代以$a_{k\lambda}^{+}$。这样，四个$A_{\mu}(x)$就都是厄米算符[注1]，四类光子的粒子数算符分别是$a_{k\lambda}^{+}a_{k\lambda}(\lambda=1,2,3,4)$，对易关系（7.15）$b$将与（7.15）$a$在形式上一致，因而Hilbert空间将具有正定度规。但是，为了使理论在事实上具有Lorentz协变性，就必须使$A_4(x)$具有纯虚的期望值，因此，仍然需要在Hilbert空间引入不定度规。这进一步反映了理论的Lorentz协变性与不定度规之间的联系。

## §3 Lorentz条件与规范不变性

如§1所述，采用Lorentz规范的量子化方法，使量子电磁场存在非物理的自由度。怎样才能消除这些非物理的自由度呢？在经典电磁理论里，场方程（1.250）必须与Lorentz条件结合才与Maxwell方程等效。换言之，只有满足Lorentz条件的势分量$A_{\mu}(x)$才描写真实的电磁运动。同样地，在电磁场的量子理论里也必须引入Lorentz条件才能消除非物理的自由度，使量子化电磁场理论能够反映电磁场只包含横光子，而无纵光子和时间光子这一事实。

在经典电磁理论里，Lorentz条件是加于场的状态函数$A_{\mu}(x)$的；而现在，$A_{\mu}(x)$是场算符，因此，量子场的Lorentz条件应当是对场态矢量（物理态）所加的限制。最直接的方法是将（1.248）式改变为下式：

$$\partial_{\mu}A_{\mu}(x)|a\rangle = 0 , \tag{7.30}$$

其中，$|a\rangle$是量子化电磁场的任意态矢量。但由于$\partial_{\mu}A_{\mu}^{(-)}(x)|0\rangle \neq 0$，故真空态不满足（7.30）式。但真空态无疑是量子场的一个可以允许的状态(物理态)，因而应将(7.30)式进一步修改为

〔注1〕 例如，参见邹国兴编著《量子场论导论》，科学出版社，1980年。

$$\partial_\mu A_\mu^{(+)}(x)|a\rangle = 0 . \left(\begin{array}{l}A_\mu^{(\pm)}\text{是}A_\mu\text{的正、负频率部分，}\\ \text{分别包含湮灭和产生算符。}\end{array}\right) \quad (7.31)$$

此式就是量子电磁场应满足的 Lorentz 条件．为了阐明这一条件的物理内容，需要把它转到动量空间．把（7.6）$a$式右边的正频率部分代入（7.31）式得

$$\sum_{\lambda=1}^{4} k\cdot e_{k\lambda}a_{k\lambda}|a\rangle = 0 , \quad (7.32)$$

因$\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{k1}=\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{k2}=0$，所以由（1.263）$a$和（1.263）$b$，应有

$$k\cdot e_{k1}=k\cdot e_{k2}=0 ,$$

而且这一正交条件与参考系无关．据此，可将（7.32）式简化为

$$\sum_{\lambda=3}^{4} k\cdot e_{k\lambda}a_{k\lambda}|a\rangle = 0 .$$

把（1.263）$c$、$d$、$e$三式代入上式．便得到动量空间的Lorentz条件

$$(a_{k3}-ia_{k4})|a\rangle = 0 .\ (\text{对任意的}\mathbf{k}) \quad (7.33)$$

为了看出这一条件对量子场态矢量提出怎样的物理限制，尚需进行如下的推算：将（7.33）取厄米共轭得

$$\langle a|(a_{k3}^{+}+ia_{k4}^{+}) = 0 , \quad (7.34)$$

以$\langle a|a_{k3}^{+}-ia_{k4}^{+})$左乘（7.33）式，再以$(a_{k3}+ia_{k4})|a\rangle$右乘（7.34）式，然后将所得结果相加而得下式：

$$\langle a|\mathcal{N}_{k3}+\mathcal{N}_{k4}|a\rangle = 0 \ (\text{对任意的}\mathbf{k}) \quad (7.35)$$

以模方$\langle a|a\rangle$除上式就得到Lorentz条件对量子场态矢量所加的物理限制：

$$\langle \mathcal{N}_{k3}+\mathcal{N}_{k4}\rangle = \frac{\langle a|\mathcal{N}_{k3}+\mathcal{N}_{k4}|a\rangle}{\langle a|a\rangle} = 0 . \quad (7.36)$$

此式的意思是，对于量子场的任意一个物理态$|a\rangle$而言，算符$\mathcal{N}_{k3}$和$\mathcal{N}_{k4}$的期望值或者等大反号，或者全都为零．因此，Lorentz条件限制量子场态矢量是Hilbert空间的这样一些矢量：在这些矢量所描写的状态下，纵光子和时间光子对场的能量、动量的贡献总和为零，以致从物理观察的效果看来，量子电磁场只有横光子，而无纵光子和时间光子．这样，Lorentz条件有效地消除了非物理的自由度，使理论描写与实验事实一致．

按照（7.11）、（7.13）和（7.36），可以对量子电磁场作如下的粒子解释：电磁场包含许多质量为零、自旋为1的横光子．横光子有两种独立的横向极化态，分别与$\lambda=1$，2对应．量子场的频率为$\omega_k$、波矢为k的谐振动，同时又是一些能量为$\omega_k$、动量为k的横光子．

如上所述，Lorentz条件从Hilbert空间中选出了一个与真实的微观电磁运动对应的子空间，这个子空间的任意矢量都是描写量子场物理状态的态矢量．显然，这个子空间

的所有矢量均应同时满足（7.33）式和（7.36）式．这里应注意的是，在满足（7.33）式的所有矢量中，只有那些模平方不为零的矢量才同时满足（7.36）式．现在，我们首先按照（7.33）式的要求来构造量子电磁场的态矢量．以$|a_T\rangle$代表一个由（2.48）式给出的、只有横光子的场态［$|a_T\rangle$显然同时满足（7.33）和（7.36）］，则因

$$[(a_{k3}-ia_{k4}),\ (a_{k3}^{+}+ia_{k4}^{+})]=0, \tag{7.37}$$

故满足条件（7.33）的、总共具有 $n$ 个动量为 $\mathbf{k}$ 的纵光子和时间光子（并具有横光子）的场态是：

$$|a_T\rangle^{(n)}=\frac{1}{\sqrt{n!}}(a_{k3}^{+}+ia_{k4}^{+})^{n}|0\rangle|a_T\rangle, \tag{7.38}$$

还可以用算符$\mathcal{N}_{k3}$、$\mathcal{N}_{k4}$的归一化本征右矢$|n_{k3}\rangle$、$|n_{k4}\rangle$来表示$|a_T\rangle^{(n)}$：

$$\begin{aligned}
&|a_T\rangle^{(n)}\\
&=\frac{1}{\sqrt{n!}}\sum_{l=0}^{n}\frac{n!}{(n-l)!\,l!}i^{l}a_{k3}^{+(n-l)}a_{k4}^{+l}|0\rangle|a_T\rangle\\
&=\sum_{l=0}^{n}\sqrt{\frac{n!}{(n-l)!\,l!}}\,i^{l}|(n-l)_{k3}\rangle|l_{k4}\rangle|a_T\rangle.
\end{aligned} \tag{7.39}$$

此式表明，虽然$|n_{k3}\rangle$和$|n_{k4}\rangle$都不满足Lorentz条件（7.33），但它们按(7.39)式的组合$|a_T\rangle^{(n)}$则满足(7.33)式．量子场的四种光子俱全的任意态$|a\rangle$可以表示为$|a_T\rangle^{(n)}$的线性组合：

$$\begin{aligned}
|a\rangle&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\mathbf{k}}g_n(\mathbf{k})|a_T\rangle^{(n)}\\
&=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\mathbf{k}}g_n(\mathbf{k})\frac{1}{\sqrt{n!}}(a_{k3}^{+}+ia_{k4}^{+})^{n}|0\rangle\right]|a_T\rangle.
\end{aligned} \tag{7.40}$$

在上式右边，$|a_T\rangle$与求和无关．容易看出，态$|a\rangle$满足（7.33）式．现在来证明，它同时满足（7.36）式．因为态矢量$|a\rangle$可以归化为1（后面将要证明这一点），故

$$\begin{aligned}
&\langle\mathcal{N}_{k3}+\mathcal{N}_{k4}\rangle=\langle a|\mathcal{N}_{k3}+\mathcal{N}_{k4}|a\rangle\\
&=\sum_{n',n''=0}^{\infty}\sum_{\mathbf{k}',\mathbf{k}''}g_{n'}^{*}(\mathbf{k}')g_{n''}(\mathbf{k}'')^{(n')}\langle a_T|\mathcal{N}_{k3}+\mathcal{N}_{k4}|a_T\rangle^{(n'')}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}|g_n(\mathbf{k})|^{2\,(n)}\langle a_T|\mathcal{N}_{k3}+\mathcal{N}_{k4}|a_T\rangle^{(n)}.
\end{aligned} \tag{7.41}$$

利用（7.28）和（7.29），并假定$|a_T\rangle$是归一化右矢，可以得到：

$${}^{(n)}\langle a_T|\mathcal{N}_{k3}|a_T\rangle^{(n)}=\sum_{l=0}^{n}\frac{n!}{(n-l)!\,l!}(n-l)(-1)^{l}, \tag{7.42a}$$

$$^{(n)}\langle a_T|\mathscr{H}_{k4}|a_T\rangle^{(n)}=\sum_{l=0}^{n}\frac{n!}{(n-l)!\,l!}l(-1)^l,\qquad(7.42)b$$

即

$$^{(n)}\langle a_T|\mathscr{H}_{k3}|a_T\rangle^{(n)}=\begin{cases}+1, & 当n=1\\ 0, & 当n>1和n=0\end{cases}\qquad(7.43)a$$

$$^{(n)}\langle a_T|\mathscr{H}_{k4}|a_T\rangle^{(n)}=\begin{cases}-1, & 当n=1\\ 0, & 当n>1和n=0\end{cases}\qquad(7.43)b$$

把（7.43）代入（7.41），就得到$\mathscr{H}_{k3}+\mathscr{H}_{k4}$在态$|a\rangle$下的期望值为

$$\begin{aligned}\langle\mathscr{H}_{k3}+\mathscr{H}_{k4}\rangle&=\langle a|\mathscr{H}_{k3}+\mathscr{H}_{k4}|a\rangle\\&=\langle a|\mathscr{H}_{k3}|a\rangle+\langle a|\mathscr{H}_{k4}|a\rangle\\&=|g_1(\mathbf{k})|^2-|g_1(\mathbf{k})|^2=0.（对任意的\mathbf{k}）.\end{aligned}\qquad(7.44)$$

由于$|a\rangle$同时满足（7.33）式和(7.36）式，所以它是量子电磁场的一个任意的物理态．至此，可以将（7.36）式进一步解释为：在量子电磁场的任意物理态之下，时间光子所贡献的负能与纵光子所贡献的正能恰相抵消，这两种光子各自所贡献的总动量也恰好等大反向，因此，纵光子和时间光子对场的能量、动量均无贡献．

在（7.40）式里，当$n=0$时，我们得到横光子态

$$|a\rangle=g_0|a_T\rangle,\qquad(7.45)$$

由于$|g_0|^2\langle a_T|a_T\rangle>0$，因而横光子态无疑是量子电磁场的物理态，这一点，使我们进一步确信（7.33）式和（7.36）式相结合，的确对量子场态矢量给出了符合实验事实的物理限制．

值得注意的是，当$n\neq0$时，$|a_T\rangle^{(n)}$并不是量子电磁场的物理态．这是因为，尽管这时(7.33)式已得到满足，但由于

$$^{(n)}\langle a_T|a_T\rangle^{(n)}=0,\quad n\geq1\qquad(7.46)$$

故这些矢量不满足（7.36）式．在这些态下，不但$\mathscr{H}_{k3}+\mathscr{H}_{k4}$的期望值不确定：

$$\langle\mathscr{H}_{k3}+\mathscr{H}_{k4}\rangle=\frac{^{(n)}\langle a_T|\mathscr{H}_{k3}+\mathscr{H}_{k4}|a_T\rangle^{(n)}}{^{(n)}\langle a_T|a_T\rangle^{(n)}}=\frac{0}{0},$$

而且算符H的期望值也没有物理意义：

$$\langle\mathrm{H}\rangle=\frac{^{(n)}\langle a_T|\sum_{\mathbf{k}}'(\mathscr{H}_{k1}+\mathscr{H}_{k2}+\mathscr{H}_{k3}+\mathscr{H}_{k4})|\mathbf{k}||a_T\rangle^{(n)}}{^{(n)}\langle a_T|a_T\rangle^{(n)}}=\frac{0}{0}.$$

因此，（7.40）式右边，除了$n=0$的一项以外，其余各项都不是物理态，然而，它们按（7.40）式的线性组合则是量子场的物理态．

综上所述，量子电磁场的物理态是这样一些态：真空态$|0\rangle$，所有可能的$|a\rangle$态〔见（7.40）式〕，所有可能的横光子态$|a_T\rangle$以及所有可能的纵、时光子态$|a_0\rangle$（它在观察效果上等同于真空态）：

$$|a_0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\mathbf{k}} g_n(\mathbf{k})\frac{1}{\sqrt{n!}}(a^+_{\mathbf{k}3} + ia^+_{\mathbf{k}4})^n|0\rangle. \tag{7.47}$$

态矢量$|0\rangle$、$|a\rangle$、$|a_T\rangle$、$|a_0\rangle$的全体构成Hilbert空间的一个子空间，量子场物理态的态矢量空间。

不难看出，量子场态矢量空间具有正定度规：利用（7.37）式和（7.40）式可得

$$\langle a|a\rangle = |g_0|^2\langle a_T|a_T\rangle = |g_0|^2 > 0. \tag{7.48}$$

因为$\frac{1}{g_0}|a\rangle$与$|a\rangle$描写同一个态，故态矢量$|a\rangle$可以归化为1，即可令

$$\langle a|a\rangle = 1. \text{（这相当于取} |g_0|^2 = 1\text{）} \tag{7.49}$$

同样地，从（7.37）式和（7.47）式可得

$$\langle a_0|a_0\rangle = |g_0|^2\langle 0|0\rangle = |g_0|^2 > 0. \tag{7.50}$$

这里我们按通常的做法，取$\langle 0|0\rangle = 1$；类似于前述的理由可令态矢量$|a_0\rangle$归一化为1：

$$\langle a_0|a_0\rangle = 1. \tag{751}$$

由此可见，Lorentz 条件（7.33）与由它所导致的物理限制（7.36）相结合，从具有不定度规的Hilbert空间中选出一个具有正定度规的子空间．这一点是十分重要的，因若场态矢量的模平方小于零，就有可能使场物理量算符具有负的期望值．

从上述的讨论看到，纵光子和时间光子对场物理量不作贡献，这就是说：

$$\langle a|\mathrm{H}a\rangle = \langle a_T|\mathrm{H}|a_T\rangle, \tag{7.52$a$}$$

$$\langle a|\mathbf{P}|a\rangle = \langle a_T|\mathbf{P}|a_T\rangle; \tag{7.52$b$}$$

$$\langle a_0|\mathrm{H}|a_0\rangle = \langle 0|\mathrm{H}|0\rangle, \tag{7.53$a$}$$

$$\langle a_0|\mathbf{P}|a_0\rangle = \langle 0|\mathbf{P}|0\rangle. \tag{7.53$b$}$$

这两类光子对场态矢量的归一化也没有影响〔见（7.48）式和（7.50）式〕．但另一方面，在理论里又不可避免地出现了纵光子和时间光子，这就必须回答这样一个问题：这两类光子的出现与什么物理事实对应？（7.48）、（7.50）、（7.52）、（7.53）诸式表明，量子电磁场理论在态矢量的下述变换下是不变的：

$$|a_T\rangle \longrightarrow |a\rangle,$$

$$|0\rangle \longrightarrow |a_0\rangle.$$

实现这些变换的具体方法分别由（7.40）式和（7.47）式给出、现在，把这两式重写为：

$$|a\rangle = g_0|a_T\rangle + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\mathbf{k}} g_n(\mathbf{k})\,|a_T\rangle^{(n)}, \tag{7.54}$$

$$|a_0\rangle = g_0|\,0\,\rangle + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\mathbf{k}} g_n(\mathbf{k})|\,0\,\rangle^{(n)}. \tag{7.55}$$

其中，

$$|0\rangle^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a_{\mathbf{k}3}^{+} + i a_{\mathbf{k}4}^{+})^n|\,0\,\rangle. \tag{7.56}$$

为了弄清变换（7.54）、（7.55）的意义，我们来考察场算符期望值的变化．经典电磁势的规范变换（1.247），在量子理论里应看成场算符$A_\mu(x)$所经受的变换：

$$A_\mu'(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x). \tag{7.57}$$

当态矢量经受（7.54）式的变换时，场算符$A_\mu(x)$的期望值将按如下法则变化（取$\langle a|a\rangle = \langle a_T|a_T\rangle = 1$）：

$$\langle A_\mu(x)\rangle = \langle a_T|A_\mu(x)|a_T\rangle \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \langle A_\mu(x)\rangle' = (\langle a_T|A_\mu(x)|a_T\rangle)' = \langle a|A_\mu(x)|a\rangle. \tag{7.58}$$

我们假定，上述场算符期望值的变化同样可以归因于场算符按（7.57）式的变化：

$$\langle A_\mu(x)\rangle = \langle a_T|\langle A_\mu(x)|a_T\rangle \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \langle A_\mu(x)\rangle' = \langle A_\mu'(x)\rangle = \langle a_T|A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x)|a_T\rangle$$

$$= \langle a_T|A_\mu(x)|a_T\rangle + \partial_\mu\alpha(x). \tag{7.59}$$

比较（7.58）和（7.59）可得：

$$\langle a|A_\mu(x)|a\rangle = \langle a_T|A_\mu(x)|a_T\rangle + \partial_\mu\alpha(x), \tag{7.60}$$

类似地，可以推得：

$$\langle a_0|A_\mu|a_0\rangle = \langle\,0\,|A_\mu(x)|\,0\,\rangle + \partial_\mu\alpha(x). \tag{7.61}$$

在得到（7.60）式和（7.61）式时，我们使用了变换（7.54）、（7.55）与（7.57）式之间的等效性．为了确信这种等效性成立，可直接由变换（7.54）、（7.55）来推出（7.60）和（7.61）：

$$\langle a|A_\mu(x)|a\rangle$$

$$= \langle a_T|A_\mu(x)|a_T\rangle$$

$$+ \langle a_T|g_0^* A_\mu(x)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\mathbf{k}} g_n(\mathbf{k})\,|a_T\rangle^{(n)}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\mathbf{k}} g_n^*(\mathbf{k})\,g_0\,{}^{(n)}\langle a_T|A_\mu(x)|a_T\rangle$$

$$+ \sum_{n',n''=1}^{\infty}\sum_{\mathbf{k}',\mathbf{k}''} g_{n'}^*(\mathbf{k}')\,g_{n''}(\mathbf{k}'')\,{}^{(n')}\langle a_T|A_\mu(x)\,|a_T\rangle^{(n'')} \tag{7.62}$$

将（7.6）$a$式代入上式．并利用对易关系（7.15）和 $\mathcal{N}_{k\lambda}(\lambda=1,2,3,4)$ 的本征右矢的正交归一性，可以算得上式右边第二、第三两项分别为：

$$\text{第二项}=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}g_0^*g_1(\mathbf{k})\,\frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}}\,(e^{\mu}_{\mathbf{k}3}-ie^{\mu}_{\mathbf{k}4})\,e^{ik\cdot x},\tag{7.63a}$$

$$\text{第三项}=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}g_1^*(\mathbf{k})g_0\,\frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}}\,(e^{\mu}_{\mathbf{k}3}-ie^{\mu}_{\mathbf{k}4})\,e^{-ik\cdot x},\tag{7.63b}$$

再同时利用（7.43）式和（7.46）式，可以证明（7.62）式右边第四项为零．因此，（7.62）式成为

$$\langle a|A_\mu(x)|a\rangle=\langle a_T|A_\mu(x)|a_T\rangle+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}\frac{k^\mu}{|\mathbf{k}|\sqrt{2|\mathbf{k}|}}\left(g_0^*g_1(\mathbf{k})e^{ik\cdot x}+g_1^*(\mathbf{k})g_0e^{-ik\cdot x}\right).\tag{7.64}$$

其中，

$$\frac{k^\mu}{|\mathbf{k}|}=e^{\mu}_{\mathbf{k}3}-ie^{\mu}_{\mathbf{k}4},$$

令

$$\alpha(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}\frac{-i}{|\mathbf{k}|\sqrt{2|\mathbf{k}|}}\left(g_0^*\,g_1(\mathbf{k})e^{ik\cdot x}-g_1^*(\mathbf{k})g_0e^{-ik\cdot x}\right),\tag{7.65}$$

则（7.64）式便可写为下式：

$$\langle a|A_\mu(x)|a\rangle=\langle a_T|A_\mu(x)|a_T\rangle+\partial_\mu\alpha(x),$$

这便是（7.60）式．由于$k^2=0$，因而$\alpha(x)$满足条件（1.249）．用同样的方法，可由（7.55）式推得（7.61）式．

由于变换（7.54）、（7.55）与（7.57）式之间的等效性，我们可以把前者解释为量子场态矢量的规范变换，即量子电磁场理论里的规范变换．相应地，(7.48)、(7.50)、（7.52）、（7.53）诸式则表明了电磁场的量子理论具有规范不变性．在理论里出现纵光子和时间光子，而这两类光子又丝毫不影响理论的物理结果，这种情形就与理论本身具有规范不变性的事实相对应．从（7.54）式和（7.55）式容易看出，场态矢量的规范变换是从只有横光子的态 $|a_T\rangle$变换到四类光子俱全的态 $|a\rangle$，从真空态 $|0\rangle$ 变换到仅有纵、时光子的态 $|a_0\rangle$〔注1〕．因此，规范变换（7.54)、(7.55）是由纵、时光子“生成”的．

## §4 理论的规范不变性与不定度规的关系

在前面三节里，我们采用不定度规，并加入 Lorentz 条件，由此建立起一个既符合

〔注1〕 一般地，规范变换是从给定的任意态 $|a\rangle$、$|a_0\rangle$ 分别变换到具有不同数目纵、时光子的态 $|b\rangle$、$|b_0\rangle$．这一工作留给读者去做，请见本章练习．

实验事实，又内在一致的电磁场量子理论．如前所述，由于Lorentz条件的限制，量子场态矢量空间是一个具有正定度规的子空间．于是，也许会提出如下的问题：是否可以避免不定度规，而又能够建立一个既符合实验事实又内在一致的理论呢？

在§2末尾曾说过，倘若将四个$A_\mu(x)$都视为厄米算符，就可以避免不定度规．但是这样做，不仅使理论失去了Lorentz协变性，而且将同时导致场态矢量无法归一化．因而为了建立一个自洽的理论，仍然需要在Hilbert空间引入不定度规．

那么，在保证$A_4(x)$为反厄米算符的前提下，又是否可以避免不定度规呢？为了说明这样做是不可能的，我们来进行如下的尝试：为了保证$A_4(x)$为反厄米算符，仍取平面波展式（7.6）$a$，并仍假定$\bar{a}_{k\lambda}$与$a^+_{k\lambda}$之间有关系式（7.7），因而对易关系（7.15）依然成立．但是，

方案一：定义

$$\mathcal{H}_{k4}=a^+_{k4}a_{k4}; \tag{7.66}$$

$a_{k4}$为时间光子产生算符，（7.67）$a$

$a^+_{k4}$为时间光子湮灭算符．（7.67）$b$

这样做时，定义（7.66）与对易关系（7.15）$b$矛盾，因而无法建立一个自洽的量子理论．

方案二：在方案一里，把（7.66）式修改为

$$\mathcal{H}_{k4}=-a_{k4}a^+_{k4}, \tag{7.68}$$

但这一定义与（7.67）式矛盾．

方案三：令$a_{k4}=ia_{k0}$，$\bar{a}_{k4}=ia^+_{k0}$，并定义：

$$\mathcal{H}_{k4}=a_{k0}a^+_{k0}; \tag{7.69}$$

$a_{k0}$为时间光子产生算符；（7.70）$a$

$a^+_{k0}$为时间光子湮灭算符．（7.70）$b$

由（7.15）$b$可得：

$$[a^+_{k0},a_{k0}]=1, \tag{7.71}$$

因此，（7.69）和（7.70）两式是相容的，它们与（7.71）式也是相容的．这样做，不定度规已避免：

$$\langle n_4|n_4\rangle=\langle 0|a^+_{k0}\langle 0|a^+_{k0}\cdots\langle 0|a^+_{k0}a_{k0}|0\rangle\cdots a_{k0}|0\rangle a_{k0}|0\rangle=+1. \tag{7.72}$$

类似于得出（7.31）式的理由，Lorentz条件在坐标空间应有以下形式：

$$\left(\partial_j A^{(+)}_j(x)+\partial_4 A^{(-)}_4(x)\right)|a\rangle=0. \tag{7.73}$$

但由该式无法导致适当的动量空间表示式．可尝试用

$$(a_{k3}-ia^+_{k4})|a\rangle=0,\ (a^+_{k4}=-ia^+_{k0}) \tag{7.74}$$

作为动量空间的Lorentz条件．容易看出，（7.74）式对场态矢量所加的物理限制是：

$$\langle \mathscr{H}_{k3} - \mathscr{H}_{k4} \rangle = \frac{\langle a | \mathscr{H}_{k3} - \mathscr{H}_{k4} | a \rangle}{\langle a | a \rangle} = 0 . \tag{7.75}$$

抛弃零点能量 $E_0 = -\sum_k \frac{1}{2}|\mathbf{k}|$，可将（7.10）式重写为：

$$\mathrm{H} = \sum_{\mathbf{k}} (\mathscr{H}_{k1} + \mathscr{H}_{k2} + \mathscr{H}_{k3} - \mathscr{H}_{k4}) |\mathbf{k}|, \tag{7.76}$$

因此，（7.75）式表明纵光子和时间光子对场的能量、动量不作贡献；但是，在具有正定度规的Hilbert空间，我们虽然可以构造满足(7.74)式和(7.75) 式的任意态矢量 $|a\rangle$，却使理论解释带有牵强性，并破坏了理论的规范不变性．因

$$[a_{k3} - i a_{k4}^{+}), (a_{k3}^{+} - i a_{k4})] = 0, \tag{7.77}$$

所以，具有 $n$ 个纵、时光子并具有横光子的场态为

$$|a_T\rangle^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a_{k3}^{+} - i a_{k4})^n | 0 \rangle | a_T \rangle$$

$$= \sum_{l=0}^{n} \sqrt{\frac{n!}{(n-l)!\, l!}} \, |(n-l)_{k3}\rangle |l_{k4}\rangle | a_T \rangle, \tag{7.78}$$

由于

$${}^{(n)}\langle a_T | a_T \rangle^{(n)} = \sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{(n-l)!\, l!} > 0, \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{7.79}$$

且

$${}^{(n)}\langle a_T | \mathscr{H}_{k3} | a_T \rangle^{(n)} = \sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{(n-l)!\, l!} (n-l), \tag{7.80)a$$

$${}^{(n)}\langle a_T | \mathscr{H}_{k4} | a_T \rangle^{(n)} = \sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{(n-l)!\, l!} l \tag{7.80)b$$

故在态 $|a_T\rangle^{(n)}$之下，有

$$\frac{{}^{(n)}\langle a_T | \mathscr{H}_{k3} - \mathscr{H}_{k4} | a_T \rangle^{(n)}}{{}^{(n)}\langle a_T | a_T \rangle^{(n)}} = 0, \tag{7.81}$$

即 $|a_T\rangle^{(n)}$是量子电磁场的“物理态”。任意“物理态” $|a\rangle$可以表示为 $|a_T\rangle^{(n)}$ 的线性组合：

$$|a\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{k}} g_n(\mathbf{k}) | a_T \rangle^{(n)}, \tag{7.82}$$

显然，$|a\rangle$无法归一化：

$$\langle a|a\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\mathbf{k}}|g_n(\mathbf{k})|^2\sum_{l=0}^{n}\frac{n!}{(n-l)!\,l!}\longrightarrow\infty \tag{7.83}$$

(7.83) 式造成的第一个困难是，在态 $|a\rangle$ 之下，可以有任意多的纵光子和时间光子：

$$\langle\mathscr{N}_{\mathbf{k}3}\rangle=\frac{\langle a|\mathscr{N}_{\mathbf{k}3}|a\rangle}{\langle a|a\rangle}=\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}|g_n(\mathbf{k})|^2\sum\limits_{l=0}^{n}\frac{n!}{(n-l)!\,l!}(n-l)}{\sum\limits_{n'=0}^{\infty}\sum\limits_{\mathbf{k}'}|g_{n'}(\mathbf{k}')|^2\sum\limits_{l'=0}^{n'}\frac{n'!}{(n'-l')!\,l'!}}=\frac{\infty}{\infty} \tag{7.84a}$$

$$\langle\mathscr{N}_{\mathbf{k}4}\rangle=\frac{\langle a|\mathscr{N}_{\mathbf{k}4}|a\rangle}{\langle a|a\rangle}=\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}|g_n(\mathbf{k})|^2\sum\limits_{l=0}^{n}\frac{n!}{(n-l)!\,l!}\,l}{\sum\limits_{n'=0}^{\infty}\sum\limits_{\mathbf{k}'}|g_{n'}(\mathbf{k}')|^2\sum\limits_{l'=0}^{n'}\frac{n'!}{(n'-l')!\,l'!}}=\frac{\infty}{\infty} \tag{7.84b}$$

由于 (7.84)$a$与 (7.84)$b$右边分子上的两个无穷级数按求和指标 $n$ 逐项相等，因而态矢量 $|a\rangle$满足 (7.75) 式，但是，在“物理态” $|a\rangle$之下允许有任意多的纵光子和时间光子，这样的理论解释是牵强的。对于没有横光子的“物理态”

$$|a_0\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\mathbf{k}}g_n(\mathbf{k})\frac{1}{\sqrt{n!}}(a_{\mathbf{k}3}^{+}-ia_{\mathbf{k}4})^n|0\rangle, \tag{7.85}$$

也可得到相同的结论。(7.83) 式造成的第二个困难（也是根本的困难）则是使理论的规范不变性受到破坏：首先$\mathscr{N}_{\mathbf{k}1}$、$\mathscr{N}_{\mathbf{k}2}$在态 $|a\rangle$下的期望值没有意义，即

$$\langle\mathscr{N}_{\mathbf{k}\lambda}\rangle=\frac{\langle a|\mathscr{N}_{\mathbf{k}\lambda}|a\rangle}{\langle a|a\rangle}$$

$$=\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}|g_n(\mathbf{k})|^2\sum\limits_{l=0}^{n}\frac{n!}{(n-l)!\,l!}\langle a_T|\mathscr{N}_{\mathbf{k}\lambda}|a_T\rangle}{\sum\limits_{n'=0}^{\infty}\sum\limits_{\mathbf{k}'}|g_{n'}(\mathbf{k}')|^2\sum\limits_{l'=0}^{n'}\frac{n'!}{(n'-l')!\,l'!}}$$

$$=\frac{\infty}{\infty},\qquad(\lambda=1,2) \tag{7.86}$$

由此，H和P的期望值也就没有意义：

$$\langle \mathrm{H}\rangle=\frac{\langle a|\mathrm{H}|a\rangle}{\langle a|a\rangle}=\frac{\infty}{\infty}, \tag{7.87}$$

$$\langle \mathbf{P}\rangle=\frac{\langle a|\mathbf{P}|a\rangle}{\langle a|a\rangle}=\frac{\infty}{\infty} \tag{7.88}$$

从以上两式看到，纵光子和时间光子不但完全改变了理论的结果，而且使这些结果失去物理意义。因此，在现在的情况下，我们不可能得到（7.52)式和（7.53）式。如§3所述，在理论里出现纵、时光子，与理论本身具有规范不变性的事实对应，而现在，我们从Hilbert空间具有正定度规的假设出发却导致完全相反的结论：当Hilbert空间具有正定度规时，纵、时光子恰恰破坏了理论的规范不变性。

综上所述，即使理论本身具有显示的Lorentz协变性，并引入相应的Lorentz条件来消除非物理的自由度，但若人为地使Hilbert空间具有正定度规，便不可避免地破坏了理论的规范不变性，使理论的结果没有物理意义。产生这种情况的原因是：电磁场量子理论的规范不变性与Hilbert空间的不定度规有着内在的联系。或者说理论的规范不变性与Hilbert空间的正定度规是不相容的，因而，从正定度规的假设出发建立起来的理论便不是一个自洽的理论，更谈不上与实验事实符合了。

## §5 协变对易关系与传播函数

因为电磁场是矢量场，所以为了建立协变对易关系，可直接考察对易括号$[A_\mu(x), A_\nu(y)]$。利用对易关系（7.9）可得

$$[A_\mu(x),\ A_\nu(y)] = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{2|\mathbf{k}|}\sum_{\lambda} e^{\mu}_{\mathbf{k}\lambda}\ e^{\nu}_{\mathbf{k}\lambda}\ e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \times (e^{-i|\mathbf{k}|(t-t')} - e^{i|\mathbf{k}|(t-t')}),$$

再利用封备性关系式（1.283），就可把上式简化为：

$$[A_\mu(x),\ A_\nu(y)] = \frac{\delta_{\mu\nu}}{V}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{2|\mathbf{k}|}e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \times (e^{-i|\mathbf{k}|(t-t')} - e^{i|\mathbf{k}|(t-t')}). \tag{7.89}$$

令

$$\mathrm{D}(x) = \frac{-i}{V}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{2|\mathbf{k}|}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\,(e^{-i|\mathbf{k}|t} - e^{i|\mathbf{k}|t}), \tag{7.90}$$

则（7.89）式成为

$$[A_\mu(x), A_\nu(y)] = i\delta_{\mu\nu}\mathrm{D}(x-y). \tag{7.91}$$

按照（4.55）式给出的转换关系

$$\sum_{\mathbf{k}} \longrightarrow \frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3k, \tag{7.92}$$

把（7.90）式右边对 k 的求和转换为积分：

$$\mathrm{D}(x) = \frac{-i}{(2\pi)^3}\int d^3k\frac{1}{2|\mathbf{k}|}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}(e^{-i|\mathbf{k}|t} - e^{i|\mathbf{k}|t}). \tag{7.93}$$

(7.93)式与 (5.137)式之区别仅在于：前者，$m=0$，因而$\omega_k=|\mathbf{k}|$.故可类比于(5.143)式把$D(x)$表示为如下的积分：

$$D(x)=\frac{-i}{(2\pi)^3}\int d^4k\in(k_0)\delta(k^2)e^{ik\cdot x}. \tag{7.94}$$

因此，$D(x)$是一个Lorentz标量函数，从而（7.91）式两端都是一个Lorentz张量函数.这就是说，（7.91）式具有显示的Lorentz协变性.

选择$\mathbf{x}$方向作为$\mathbf{k}$空间第三轴的正向，并在$\mathbf{k}$空间取球极坐标，使得$\int d^3k=\int|\mathbf{k}|^2\sin\theta\, d|\mathbf{k}|d\theta d\varphi$，然后完成(7.93)右边对$\theta$、$\varphi$的积分，可得

$$D(x)=\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}\{\delta(|\mathbf{x}|+t)-\delta(|\mathbf{x}|-t)\} \tag{7.95}$$

此式明显地表示出$D(x)$的奇异性，并且不难看到：

$$D(\mathbf{x},t)=D(-\mathbf{x},t), \tag{7.96a}$$

$$D(\mathbf{x},t)=-D(\mathbf{x},-t). \tag{7.96b}$$

量子化电磁场的传播函数记为$D_{F\mu\nu}(x)$.使用类似于第五章§6的讨论，定义：

$$D_{F\mu\nu}(x_1-x_2)=\langle 0|T(A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)|0\rangle$$

$$=\delta_{\mu\nu}D_F(x_1-x_2), \tag{7.97a}$$

其中，

$$D_F(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4kD_F(k)e^{ik\cdot x}, \tag{7.97b}$$

$$D_F(k)=\frac{-i}{k^2-i\varepsilon}, \tag{7.97c}$$

所以传播函数在动量空间的表示式为

$$D_{F\mu\nu}(k)=\frac{-i\delta_{\mu\nu}}{k^2-i\varepsilon}. \tag{7.97d}$$

## §6 粒子自旋值与统计法则的关系

从第五章到本章，我们讨论了三种场的量子理论.对于Bose场$\phi(x)$和$A_\mu(x)$，量子化条件由对易括号给出；对于Fermi场$\psi(x)$，量子化条件由反对易括号给出.为了深刻理解这样做的必要性和唯一性，本节就来谈谈粒子自旋与其统计法则之间的关系.

实验事实证明，粒子的自旋与其统计法则之间存在着确定的联系.凡整数自旋的粒子服从Bose-Einstein统计，凡半整数自旋的粒子服从Fermi-Dirac统计.

根据上述实验事实，在量子力学里，就要求整数自旋粒子体系的波函数是对称波函

数，而半整数自旋粒子体系的波函数是反对称波函数．因此，在量子力学里，粒子的统计法则是作为一个附加的要求引入到理论里去的．在非相对论性的量子场论里，我们曾使用对易括号对Schrödinger场进行量子化〔见第二章，§2．(一)〕，结果，导致场量子服从Bose-Einstein统计；我们也曾从Fermi-Dirac统计出发对Schrödinger场进行量子化〔见第四章，§3(二)〕．在以上两种情形下都得到了自洽的量子化方案．因而在非相对论性量子场论里，粒子自旋值与统计法则之间的关系仍然必须根据实验事实外加到理论里去．

在相对论性量子场论里，实验上得到的粒子自旋与统计法则之间的关系可以作为理论的预言而自然地导出来．为了证明这一点，我们从以下两方面来进行讨论．

### （一）能量的正定性与电荷的不定性

如第二章所述，从量子力学到量子场论的过渡，其必要性在于：相对论性量子力学无法描写粒子相互作用和转化的现象，并存在负能困难和负几率困难．在量子场论里不再存在上述困难．首先，量子场联系于粒子——反粒子的系集，每个场量子都具有正定的能量，场在每一激发态的能量是相应场量子能量之总和，因而场的能量是正定的．其次，在量子场论里，量子力学意义下的几率被解释为场的电荷（或广义荷），由于粒子与反粒子具有等值反号的电荷（或广义荷），因而场的电荷（或广义荷）应当是不定的．通过从第五章到本章的讨论，我们已清楚地看到量子场能量的正定性和电荷的不定性．这些物理结果是基于如下的做法而得到的：凡零和整数自旋的场，其量子化条件由场算符的对易关系给出，凡半整数自旋的场，其量子化条件由场算符的反对易关系给出．

标量粒子自旋为零．现在，我们尝试用反对易关系对标量场进行量子化．以非厄米标量场为例，取消（5.31）式右边的正规顺序，并将（5.43)式代入该式右边，完成对x的积分并稍加整理即得

$$\mathrm{H}=\sum_{\mathbf{k}}\omega_k(a_{\mathbf{k}}^{+}a_{\mathbf{k}}+b_{\mathbf{k}}b_{\mathbf{k}}^{+}); \tag{7.98}$$

当用反对易关系进行量子化时，（5.47）式要用下式来代替：

$$\{a_{\mathbf{k}},a_{\mathbf{k}'}^{+}\}=\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}; \tag{7.99a}$$

$$\{b_{\mathbf{k}},b_{\mathbf{k}'}^{+}\}=\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}. \tag{7.99b}$$

因此，抛弃无穷大的零点能量$E_0=\sum_{\mathbf{k}}\omega_k$，就可把（7.98）式写为

$$\mathrm{H}=\sum_{\mathbf{k}}\omega_k(a_{\mathbf{k}}^{+}a_{\mathbf{k}}-b_{\mathbf{k}}^{+}b_{\mathbf{k}}). \tag{7.100}$$

此式表明，如果用反对易关系作为量子化条件，则非厄米标量场的能量将不是正定的．这就导致负能困难．顺便指出，几乎在所有教科书和专著里，非厄米标量场的算符H，

均取较为对称的形式：$\mathrm{H}=\int_V d^3x(\pi^+\pi+\nabla\phi^+\cdot\nabla\phi+m^2\phi^+\phi)$，而不是(5.31)式．但这样做，将得不到（7.100）式，而（7.100）式是在此种情况下必定要得到的一个矛盾结果．这再次证明了（5.31）式之正确性．此外，取消（5.33）式右边的正规顺序，并借助于（7.99）式将该式转到动量空间又得

$$eQ=\sum_{\mathbf{k}}(a_{\mathbf{k}}^+a_{\mathbf{k}}+b_{\mathbf{k}}^+b_{\mathbf{k}})e. \tag{7.101}$$

因此，量子场具有正定的电荷．（7.101）式是自相矛盾的；它一方面显示量子场联系于粒子——反粒子的系集，另方面又否认了粒子与反粒子的区别．（7.100）和（7.101）是由场算符之间的反对易关系得来的，这就表明，对于标量场，量子化条件必须由场算符之间的对易关系给出，而不能由反对易关系给出．

对于电磁场也可得到相同的结论．

我们再尝试用对易关系作为旋量场的量子化条件．这时，（6.8）式要用下式来代替：

$$[c_{\mathbf{k}s},\ c_{\mathbf{k}'s'}^+]=\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{ss'}, \tag{7.102a}$$

$$[d_{\mathbf{k}s},\ d_{\mathbf{k}'s'}^+]=\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{ss'}, \tag{7.102b}$$

$$[c_{\mathbf{k}s},\quad c_{\mathbf{k}'s'}]=[d_{\mathbf{k}s},\ d_{\mathbf{k}'s'}]=\cdots=0. \tag{7.102c}$$

把（7.102）$b$ 代入（6.9），并抛弃零点能量 $-\sum_{\mathbf{k}s}E_k$，就得到能量算符的动量空间表示式

$$\mathrm{H}=\sum_{\mathbf{k}s}E_k(c_{\mathbf{k}s}^+c_{\mathbf{k}s}-d_{\mathbf{k}s}^+d_{\mathbf{k}s}). \tag{7.103}$$

如第三章所述，在经典理论里，旋量场的能量不是正定的．我们现在看到，倘若使用对易关系作为量子化条件，则量子旋量场的能量依然不是正定的．此外，在经典理论里，旋量场的总电荷是正定的．倘若将（6.12）式转到动量空间，并同时利用（7.102）式，可得：

$$eQ=\sum_{\mathbf{k}s}(c_{\mathbf{k}s}^+c_{\mathbf{k}s}+d_{\mathbf{k}s}^+d_{\mathbf{k}s})e, \tag{7.104}$$

其中，已将零点电荷抛弃．由此可见，倘若使用对易关系作为量子化条件，则量子旋量场的总电荷依然是正定的，这是不合理的．综上所述，对于旋量场，唯有采用场算符的反对易关系作为量子化条件，才能得到自洽的量子理论．

## （二）微观因果律的要求

在物理学里，因果律被认为是普遍成立的．我们来证明，对于标量场唯有采用对易关系作为量子化条件，而对于旋量场唯有采用反对易关系作为量子化条件，才能与微观因果律的要求一致．在第五章里，我们曾直接借助场算符的不变对易关系来表述微观因

果律．由于场物理量均与场算符的二次式有关，因此，对于任意的场，可把

$$O(x)=\phi_A(x)\phi_B(x) \tag{7.105}$$

视为场的某个可观测量．这时，微观因果律可以更一般地用下式来表达：

$$\left.\begin{aligned}&[O(x),O(y)]=0,\\&\text{当}(x-y)^2>0.\end{aligned}\right\} \tag{7.106}$$

现在，分别用场算符的对易括号和反对易括号来展开上式之左边：

$$\begin{aligned}0&=[O(x),O(y)]\\&=\phi_A(x)\phi_A(y)[\phi_B(x),\phi_B(y)]+\phi_A(x)[\phi_B(x),\phi_A(y)]\phi_B(y)\\&\quad+\phi_A(y)[\phi_A(x),\phi_B(y)]\phi_B(x)+[\phi_A(x),\phi_A(y)]\phi_B(y)\phi_B(x),\\&\qquad\text{当}(x-y)^2>0;\end{aligned} \tag{7.107}$$

$$\begin{aligned}0&=[O(x),O(y)]\\&=\phi_A(x)\{\phi_B(x),\phi_A(y)\}\phi_B(y)-\phi_A(x)\phi_A(y)\{\phi_B(x),\phi_B(y)\}\\&\quad+\{\phi_A(x),\phi_A(y)\}\phi_B(y)\phi_B(x)-\phi_A(y)\{\phi_A(x),\phi_B(y)\}\phi_B(x),\\&\qquad\text{当}(x-y)^2>0.\end{aligned} \tag{7.108}$$

按照（7.107）式，必须有下式成立：

$$[\phi_A(x),\phi_B(y)]=0,\text{当}(x-y)^2>0, \tag{7.109}$$

按照（7.108）式，则必须有下式成立：

$$\{\phi_A(x),\phi_B(y)\}=0.\quad\text{当}(x-y)^2>0. \tag{7.110}$$

在标量场情形下，$O(x)$为：

$$O(x)=\begin{cases}\phi(x)\phi(x), & \text{对厄米标量场}\\ \phi^+(x)\phi(x). & \text{对非厄米标量场}\end{cases} \tag{7.111}$$

如果用场算符的正则等时对易关系作为标量场的量子化条件（如第五章所做的那样），那么，对于厄米标量场，（7.109）式便是(5.158)式，而对于非厄米标量场，(7.109)式便是（5.159）式．因此，考虑到（5.144）式，则在上述两种情况下，(7.106）式均已得到满足．

在旋量场情形下，

$$O(x)=\overline{\psi}(x)\psi(x), \tag{7.112}$$

如果像第六章那样，用正则等时反对易关系作为场的量子化条件，那么，由（6.86）$a$和（5.153）$b$可得：

$$\{\psi(x),\overline{\psi}(y)\}=-iS(x-y)$$

$$=-i(\gamma\cdot\partial-m)\Delta(x-y)=0,\quad (x-y)^2>0, \tag{7.113}$$

这便是（7.110）式．因此，考虑到（6.86）$b$，（7.106）式便得到满足．

但当采用正则等时反对易关系作为标量场的量子化条件时，第五章里的所有对易括号均代之以反对易括号，相应地，（5.158）和（5.159）分别要用以下二式来代替：

$$\{\phi(x),\ \phi(y)\}=0,\text{当}(x-y)^2>0. \tag{7.114}$$

$$\{\phi(x),\ \phi^{+}(y)\}=0,\text{当}(x-y)^2>0. \tag{7.115}$$

（7.114）式和（7.115）式便是（7.110）式．但由于

$$\{\phi(x),\ \phi(y)\}=\Delta_1(x-y),\quad \text{对厄米标量场}$$

$$\{\phi(x),\ \phi^{+}(y)\}=\Delta_1(x-y),\quad \text{对非厄米标量场}$$

且

$$\Delta_1(x-y)\neq 0,\quad \text{当}(x-y)^2>0,$$

所以在现在的情况下，（7.114）和（7.115）事实上不成立，因而（7.110）式不再成立．换言之，当用正则等时反对易关系作为标量场的量子化条件时，微观因果律便遭到破坏．

同样地，当用正则等时对易关系作为旋量场的量子化条件时，第六章的所有反对易括号应代换成对易括号．相应地（7.113）式应该用下式来代替：

$$[\psi(x),\ \overline{\psi}(y)]=0,\ \text{当}(x-y)^2>0, \tag{7.116}$$

此式便是（7.109）式．但事实上可以证明：

$$[\psi(x),\ \overline{\psi}(y)]=[\psi^{(+)}(x),\ \overline{\psi}^{(-)}(y)]+[\psi^{(-)}(x),\ \overline{\psi}^{(+)}(y)]$$

$$=-(\gamma\cdot\partial-m)[i\Delta^{(+)}(x-y)-i\Delta^{(-)}(x-y)]$$

$$=-(\gamma\cdot\partial-m)\Delta_1(x-y)\neq 0,\ \text{当}(x-y)^2>0.$$

因此，（7.109）式不成立，进而（7.106）式也不成立．换言之，当用正则等时对易关

系作为旋量场的量子化条件时，微观因果律同样受到破坏.

如本小节一开始所述，因果律是物理学的普遍定律. 如果一个物理学理论违反了因果律，它就不能成立. 除此以外，还有更深一层的原因：在量子场论里，场算符是连续变数 $\mathbf{x}$、$t$ 的连续函数，它们分别满足一定的微分方程式，即量子场方程式. 因此，空间某点 $\mathbf{x}$ 的场的变化由与 $\mathbf{x}$ 点无限接近的各点的场来决定. 这就是说，场的概念完全排除了“超距作用”的概念. 换句话说，场总是以不超过光速 $c$ 的有限速度在空间传播，场的运动服从微观因果律. 因此，量子场是服从微观因果律的定域场. 场的定域性与因果性存在上述联系，倘若违背了微观因果律，也就破坏了理论的定域性. 但是，量子场论的形式体系是建立在场方程和对易关系上面的，迄今为止，尚无任何一种令人信服的理论，它能够避免场的微分方程式，这样，场的定域性同样是必须保持的概念. 这里应当说明，虽然破坏了微观因果律就同时破坏了定域性，但反过来，放弃理论的定域性是否一定破坏因果律，这一问题在历史上曾有过许多讨论. 请读者参阅汤川秀树等编著的《基本粒子》一书（pp.128—135科学出版社，1975年）的介绍.

以上（一）、（二）两方面的讨论，对所有整数（包括零）自旋的场和半整数自旋的场均适用. 因而可以得出如下结论：为了建立自洽的量子场论的理论体系，所有零和整数自旋的场均必须用对易关系进行量子化；而所有半整数自旋的场均必须用反对易关系进行量子化. 由于场算符的对易关系导致场量子服从Bose-Einstein统计，而反对易关系导致场量子服从 Fermi-Dirac 统计，因而相对论性量子场论从自身的理论体系中合乎逻辑地得出如下的重要预言：零和整数自旋的场必须按Bose-Einstein统计进行量子化，其场量子服从Bose统计；半整数自旋的场，必须按 Fermi-Dirac 统计进行量子化，其场量子服从 Fermi 统计. 在场论里，这一预言又称为自旋与统计关系的定理. 我们在本节所进行的讨论并不是对这一定理的严格证明. 对严格证明有兴趣的读者，请参阅：A.И. 阿希叶泽尔，В.Б.别列斯捷茨基著《量子电动力学》，科学出版社，1964年中译本，§21；或N.N. Bogolubov等著《Introduction to Axiomatic Quantum Field Theory》，W.A. Benjamin, Inc, 1975.

## 习　题

（1）电磁场的量子化与标量场、旋量场比较有那些不同点？有那些困难，这些困难是怎样克服的？

（2）证明 $\langle a|\partial_\mu A_\mu(x)|a\rangle = 0$.

（3）利用上题的结果和（7.60）式导出 $\alpha(x)$ 满足的方程式：

$$\Box\alpha(x) = 0.$$

（4）（7.82）式是否仍可视为电磁场量子理论里的规范变换？

（5）证明：对于电磁场的两个任意的物理态

$$|a\rangle = g_0^a|a_T\rangle + \sum_{\mathbf{k},n=1}^{\infty} g_n^a(\mathbf{k})|a_T\rangle^{(n)},$$

和

$$|b\rangle = g_0^b|a_T\rangle + \sum_{\mathbf{k},n=1}^{\infty} g_n^b(\mathbf{k})|a_T\rangle^{(n)},$$

存在以下的规范变换：

$$|b\rangle = g_0^{ab}|a\rangle + \sum_{\mathbf{k},n=1}^{\infty} g_n^{ab}(\mathbf{k})|a\rangle^{(n)},$$

其中，

$$|a\rangle^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a_{\mathbf{k}3}^+ + ia_{\mathbf{k}4}^+)^n|0\rangle|a\rangle,$$

并且系数 $g^{ab}{}_0$ 和 $g_1^{ab}$ 满足以下条件：

$$g_0^{ab*}\, g_1^{ab} = g_0^{b*}\, g_1^b - g_0^{a*}\, g_1^a$$

（6）证明$D_F(x)$是量子电磁场方程的Green函数，即，

$$\Box D_F(x) = -i\delta^{(4)}(x).$$

（7）验证（7.95）式。

（8）利用标量场的不变函数找出电磁场的相应的不变函数。

（9）找出在正 Lorentz 变换和三维空间转动下，电磁场的主动变换和被动变换的生成元，并解释所得结果的物理意义。

# 第八章　量子场相互作用

前面各章讨论了自由运动的量子场。研究自由场的量子理论是量子场论发展中必不可少的一步。但是，现实的物理世界总是处于各种各样的相互作用和相互转化之中，要把量子场论用于描写基本粒子的实际运动，就必须研究相互作用的量子场。

如第二章所述，量子场论对基本粒子相互作用过程的理论描写是从如下的基本假设出发：粒子的相互作用是通过相应量子场的相互耦合来实现的。在相互作用过程中，一些原来的场退激，与之相关的粒子随之消失；反之，一些新的场受到激发，与之相关的粒子随之产生。因而，相互作用能够导致粒子之间的互相转化。

在自然界里倒底有多少种基本的相互作用力？现代物理学的回答是：共有四种基本的相互作用力，即电磁力、强力、弱力和引力。迄今为止，对电磁力研究得最清楚，其次是弱力、但对另外的二种力还了解得较少。而且到目前为止量子场论尚不能对每种相互作用的动力学机制作出透彻的（或统一的）解释，而是建立各种唯象理论，把这种机制包含在场与场的相互耦合之中。

## §1　电磁相互作用

在经典电磁理论里，对宏观电磁过程已有透彻的论述。微观电磁过程并不是与宏观电磁过程不相干的另一类物理过程。恰恰相反，从不同物质层次相互联系的观点看来，前者是后者的更深一层的基础。看来，量子场论对电磁相互作用的机制已给出了“令人满意的”回答：带电粒子之间的电磁力是通过交换虚光子来传递的。当带电粒子之间交换虚光子时，它们之间就发生电磁相互作用。所以带电粒子的场与电磁场之间的相互作用是直接作用，而两个带电粒子场之间的相互作用则是间接作用。如第五章所述，量子场论对电磁力的上述解释尚不能看成是最终的结论。还有许多问题有待人们去思考，去发现。

在量子场论里，专门研究电磁相互作用的这一部分理论称为量子电动力学，或简称QED。它是量子场论里发展得最早，而且与实验符合得最好的理论。

### （一）带电旋量场与电磁场的相互作用

带电旋量粒子（如电子、质子）与光子的相互作用是通过旋量场与电磁场的相互耦合来实现的。旋量场与电磁场在相互作用中构成一个相互作用的场系统。这个系统的Lagrange函数密度包括三个部分：自由旋量场的$\mathscr{L}_\psi$、自由电磁场的$\mathscr{L}_A$以及两场相互作用部分$\mathscr{L}_I$。即

$$\mathscr{L} = \underbrace{-\bar{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu + m)\psi}_{\mathscr{L}_\psi} \underbrace{- \frac{1}{2}\partial_\nu A_\mu \partial_\nu A_\mu}_{\mathscr{L}_A} + \mathscr{L}_I, \tag{8.1}$$

$\mathscr{L}_I$的具体形式可以通过与经典电磁理论里的最小耦合原理进行类比来确定．但是近十余年来，规范理论的发展取得了巨大的成功，为了今后学习现代量子场论的内容，我们借此机会了解一下规范场论的初步概念．规范场论的一条最基本的假定（或基本出发点）即是所谓"规范原则"．按照规范原则，一切描写基本粒子相互作用的理论，均具有在相应规范群G的局域变换下的不变性、而所谓局域变换则是指群G的参数与时空坐标有关．QED的规范群是$U(1)$群．在$U(1)$群的变换下，旋量场按下式变换：

$$\psi'(x) = e^{ie\alpha(x)}\psi(x) \tag{8.2)a$$

$$\bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)e^{-ie\alpha(x)}. \tag{8.2)b$$

（8.2）式与第三章里的整体规范变换不同之处是：群参数$\alpha(x)$是$x$的连续函数．这就使得不同时、空点的场受到不同的规范变换，所以叫做局域规范变换．

容易看出，$\mathscr{L}_\psi$中含有偏导数$\partial_\mu\psi$的项在变换（8.2）之下不是不变的：

$$-\bar{\psi}'\gamma_\mu\partial_\mu\psi' = -\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi - ie[\partial_\mu\alpha(x)]\bar{\psi}\gamma_\mu\psi.$$

原因在于$\partial_\mu\psi$在变换（8.2）之下不是一个协变量．为了构造一个在变换（8.2）之下具有不变性的Lagrange函数密度，我们来定义一个在规范变换（8.2）之下协变的导数$D_\mu\psi$，即我们要求$D_\mu\psi$像$\psi$一样地变换：〔注1〕

$$(D_\mu\psi)' = e^{ie\alpha(x)}D_\mu\psi. \tag{8.3}$$

用$D_\mu\psi$去代替$\partial_\mu\psi$，则$\mathscr{L}_\psi$就相应地代之以$\mathscr{L}_{\psi A}$

$$\mathscr{L}_{\psi A} = -\bar{\psi}(\gamma_\mu D_\mu + m)\psi, \tag{8.4}$$

我们的基本想法是：要通过局域$U(1)$规范不变性的要求来确定旋量场与电磁场的耦合项$\mathscr{L}_I$，因此微分算符$D_\mu$自然应与电磁势$A_\mu$有关．假定

$$D_\mu\psi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi, \tag{8.5}$$

将（8.5）代入（8.3）便得到势分量$A_\mu$在$U(1)$群变换下的变换法则

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x). \tag{8.6}$$

现在，我们已从局域$U(1)$规范不变性出发，得到旋量场——电磁场系统的Lagrange函数密度为

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_{\psi A} + \mathscr{L}_A = -\bar{\psi}(\gamma_\mu D_\mu + m)\psi - \frac{1}{2}\partial_\nu A_\mu\partial_\nu A_\mu$$

〔注1〕参见"基本粒子译文集"，第二集p.6，科技文献出版社重庆分社，1978．

$$= -\overline{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu+m)\psi - \frac{1}{2}\partial_\nu A_\mu\partial_\nu A_\mu + ie\overline{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu. \quad (8.7)$$

$$\underbrace{\qquad}_{\mathscr{L}_\psi} \quad \underbrace{\qquad}_{\mathscr{L}_A} \quad \underbrace{\qquad}_{\mathscr{L}_I}$$

将（8.7）与（8.1）比较可知：

$$\mathscr{L}_I = ie\overline{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu = J_\mu A_\mu. \quad (8.8)$$

其中，$J_\mu(x) = ie\overline{\psi}\gamma_\mu\psi$是四维电流密度矢量．旋量粒子的电荷$e$便是电磁相互作用的耦合常数．相互作用强度由精细结构常数$\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$来表征。

以（8.7）式的$\mathscr{L}$为基础建立起来的相互作用理论具有在（8.2）和（8.6）联合变换下的不变性，即局域$U(1)$规范不变性．$\mathscr{L}_{\psi A}$显然是不变的，$\mathscr{L}_A$在（8.6）变换下将出现附加项：

$$\delta\mathscr{L}_A = \frac{\partial\mathscr{L}_A}{\partial A_\nu}\delta A_\nu + \frac{\partial\mathscr{L}_A}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\delta(\partial_\mu A_\nu) = -\partial_\mu A_\nu\partial_\mu\partial_\nu\alpha(x),$$

但由于$\Box\alpha(x) = 0$，故这一附加项对场方程没有影响[注1]．

因为$U(1)$群是Abel群，所以为了保证理论的局域$U(1)$规范不变性而按上述方式引入的电磁场，称为Abel规范场，相应地，光子便是传递电磁力的规范粒子，称为规范Bose子．电磁相互作用理论是一个Abel规范理论，而近十余年发展起来的规范理论则是非Abel规范理论．在那里，相应的规范群是一些非Abel李群．

把（8.7）式的$\mathscr{L}$代入Euler-Lagrange方程式，就得到相互作用场系统的场方程组：

$$(\gamma_\mu\partial_\mu+m)\psi = ie\gamma_\mu\psi A_\mu, \quad (8.9)a$$

$$\overline{\psi}(\gamma_\mu\overleftarrow{\partial}_\mu - m) = -ie\overline{\psi}\gamma_\mu A_\mu, \quad (8.9)b$$

$$\Box A_\mu = -J_\mu \quad (8.9)c$$

其中，（8.9）$b$式可由（8.9）$a$式取厄米共轭而得到．由（8.9）式可见，在经典意义下，旋量场与电磁场的相互作用是以如下方式进行的：旋量场以其四维电流密度$J_\mu$去影响电磁场的运动，而电磁场又以其势分量$A_\mu$去影响旋量场的运动．将（8.9）$a$与（8.9）$b$结合不难得到如下的微分形式的电荷守恒定律：

$$\partial_\mu J_\mu(x) = 0. \quad (8.10)$$

场的正则坐标和正则共轭动量分别是：

$$\psi, \pi_\psi = i\psi^+; \quad A_\mu, \pi_\mu = \dot{A}_\mu,$$

---

〔注1〕规范不变的$\mathscr{L}_A$通常取为$\mathscr{L}_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$，$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$．但我们这里及以后一直使用$\mathscr{L}_A = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu\partial_\mu A_\nu$，我们的计算表明，这样做同样能够方便地讨论理论的规范不变性．

因此，场的Hamilton函数密度为

$$\begin{aligned}\mathscr{H}(x) &= \pi_\psi\dot{\psi} + \pi_\mu\dot{A}_\mu - \mathscr{L}\\ &= \mathscr{H}_\psi(x) + \mathscr{H}_A(x) + \mathscr{H}_I(x).\end{aligned} \tag{8.11}$$

其中，

$$\mathscr{H}_\psi(x) = \bar{\psi}(\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla + m)\psi, \tag{8.12a}$$

$$\mathscr{H}_A(x) = \frac{1}{2}\left[\pi_\mu\pi_\mu + (\nabla A_\mu)\cdot(\nabla A_\mu)\right], \tag{8.12b}$$

$$\mathscr{H}_I(x) = -\mathscr{L}_I(x). \tag{8.12c}$$

进行类似于第四章的讨论，可以得到相互作用场系统的量子化条件为：

$$\{\psi(\mathbf{x},t),\ \psi^+(\mathbf{y},t)\} = \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \tag{8.13a}$$

$$\{\psi(\mathbf{x},t),\ \psi(\mathbf{y},t)\} = \{\psi^+(\mathbf{x},t),\ \psi^+(\mathbf{y},t)\} = 0. \tag{8.13b}$$

$$[A_\mu(\mathbf{x},t),\ \dot{A}_\nu(\mathbf{y},t)] = i\delta_{\mu\nu}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{8.13c}$$

$$[A_\mu(\mathbf{x},t),\ A_\nu(\mathbf{y},t)] = [\dot{A}_\mu(\mathbf{x},t),\ \dot{A}_\nu(\mathbf{y},t)] = 0. \tag{8.13d}$$

以上四式与自由场的量子化条件一致．唯一的区别是，凡Bose场算符均与其它场算符相互对易：

$$\begin{aligned}[][\psi_\alpha(\mathbf{x},t),\ A_\mu(\mathbf{x},t)] &= [\psi_\alpha(\mathbf{x},t),\ \dot{A}_\mu(\mathbf{x},t)]\\ &= \cdots\cdots = 0.\end{aligned} \tag{8.13e}$$

场系统的正则运动方程式为

$$\dot{\psi} = \frac{1}{i}[\psi,\ \mathrm{H}], \qquad \dot{\psi}^+ = \frac{1}{i}[\psi^+,\ \mathrm{H}], \tag{8.14a}$$

$$\dot{A}_\mu = \frac{1}{i}[A_\mu,\ \mathrm{H}], \qquad \dot{\pi}_\mu = \frac{1}{i}[\pi_\mu,\ \mathrm{H}], \tag{8.14b}$$

（8.14）式与自由场情形下的正则方程式只有形式上的相似性．其中的Hamilton算符为

$$\mathrm{H} = \int_V d^3x(\mathscr{H}_\psi + \mathscr{H}_A + \mathscr{H}_I) = \mathrm{H}_\psi + \mathrm{H}_A + \mathrm{H}_I \tag{8.15}$$

把（8.15）代入（8.14）便得到量子场的场方程式：

$$(\gamma_\mu\partial_\mu + m)\psi = ie\gamma_\mu\psi A_\mu. \tag{8.16a}$$

$$\Box A_\mu = -J_\mu. \tag{8.16b}$$

此式与（8.9）式具有相同形式

为了消除非物理的自由度，仍需加上Lorentz条件的限制：

$$\partial_\mu A_\mu^{(+)}(x)|a\rangle = 0 . \tag{8.17}$$

相应地，算符$A_\mu$仍定义于具有不定度规的Hilbert空间。

因为（8.16）式是非线性非齐次方程组，所以它的解不能表示为平面波解的迭加（像自由场情形下所做的那样）．但是，对于一个任意给定的时刻$t$，如$t=0$，$\psi(\mathbf{x},0)$和$A_\mu(\mathbf{x},0)$显然均满足狄里赫利条件．因而在周期边界条件下，我们仍有以下的付里叶展开式：

$$\psi(\mathbf{x},\ 0) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{s=1}^{2}\sqrt{\frac{m}{E_k}}(u_{\mathbf{k}s}c_{\mathbf{k}s}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + v_{\mathbf{k}s}d_{\mathbf{k}s}^{+}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}), \tag{8.18a}$$

$$\overline{\psi}(\mathbf{x},\ 0) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{s=1}^{2}\sqrt{\frac{m}{E_k}}(\overline{u}_{\mathbf{k}s}c_{\mathbf{k}s}^{+}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \overline{v}_{\mathbf{k}s}d_{\mathbf{k}s}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}), \tag{8.18b}$$

$$A_\mu(\mathbf{x},\ 0) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{\lambda=1}^{4}\frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}}e_{\mathbf{k}\lambda}^{\mu}(a_{\mathbf{k}\lambda}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \overline{a}_{\mathbf{k}\lambda}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}). \tag{8.18c}$$

$$\dot{A}_\mu(\mathbf{x},\ 0) = \frac{-i}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{\lambda=1}^{4}\sqrt{\frac{|\mathbf{k}|}{2}}e_{\mathbf{k}\lambda}^{\mu}(a_{\mathbf{k}\lambda}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - \overline{a}_{\mathbf{k}\lambda}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}). \tag{8.18d}$$

这里，$\overline{a}_{\mathbf{k}\lambda}$与$a_{\mathbf{k}\lambda}^{+}$之间仍由（7.7）式相互联系。

为了确定场算符随时间的变化，我们对场系统进行时、空平移，在自由场情形下的公式（5.63）$a$，对相互作用场同样适用（时、空平移对称性是普遍成立的），因此，我们有

$$\delta\phi_A = -\varepsilon_\mu\partial_\mu\phi_A = \frac{1}{i}[\phi_A,\ \varepsilon_\mu P_\mu],$$

即

$$\partial_\mu\phi_A = i[\phi_A,\ P_\mu], \tag{8.19}$$

这里，$(P_\mu)=(\mathbf{P}, iH)$是相互作用场系统的能量、动量矢量算符（即四维动量矢量算符）．因为$P_\mu$是守恒物理量的算符，故可对（8.19）式做积分．把该式右边的算符$\phi_A$形

式地移到左边，并同时记住$\phi_A$在右边时的原来位置，积分后得到：

$$\phi_A = e^{-iP_\mu x_\mu}(\phi_A)e^{iP_\mu x_\mu}, \tag{8.20}$$

此式右边的$(\phi_A)$既代表积分“常数”，又表明了$\phi_A$原来的位置，式中的重复指标$\mu$不表示求和，因此，当$\mu = j \neq 4$时，（8.20）式成为

$$\phi_A = e^{-iP_j x_j}(\phi_A)e^{iP_j x_j}, \quad (j\text{仍不表示求和})$$

将三维空间坐标架转动一个任意角度，又有

$$\phi_A = e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}}(\phi_A)e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}}. \tag{8.21}$$

当$\mathbf{x} = 0$时，$\phi_A(\mathbf{x}, t) = \phi_A(0, t)$，由此得到$(\phi_A) = \phi_A(0, t)$：

$$\phi_A(\mathbf{x}, t) = e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}}\phi_A(0, t)e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}}, \tag{8.22}$$

类似地，当$\mu = 4$时，由（8.20）式得到：

$$\phi_A(\mathbf{x}, t) = e^{iHt}\phi_A(\mathbf{x}, 0)e^{-iHt}. \tag{8.23}$$

对于本小节讨论的相互作用场系统，（8.22）式和（8.23）式具体化为：

$$\psi(\mathbf{x}, t) = e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}}\psi(0, t)e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}}, \tag{8.24a}$$

$$A_\mu(\mathbf{x}, t) = e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}}A_\mu(0, t)e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}}. \tag{8.24b}$$

和

$$\psi(\mathbf{x}, t) = e^{iHt}\psi(\mathbf{x}, 0)e^{-iHt}, \tag{8.25a}$$

$$A_\mu(\mathbf{x}, t) = e^{iHt}A_\mu(\mathbf{x}, 0)e^{-iHt}. \tag{8.25b}$$

（8.25）式给出了场算符的时间依赖关系．我们看到，$t$时刻的场与给定时刻$(t = 0)$的场相差一个幺正变换，故二者应满足同样的对易关系（8.13）．又因这些对易关系与自由场的量子化条件相同，所以算符$c_{\mathbf{k}s}$、$d_{\mathbf{k}s}$、$a_{\mathbf{k}\lambda}$以及它们的厄米共轭算符所满足的对易关系形式上与自由场产生、湮灭算符所满足的对易关系相同．但是现在，不能再把这些算符解释为自由粒子态的产生、湮灭算符，这是因为它们虽在形式上是场方程在$t = 0$时的解的展开系数，但在有相互作用的情形下，场方程并没有平面波叠加解．一般地，我们也无法找到相互作用场方程的精确解．

## （二）带电标量场与电磁场的相互作用

带电标量粒子（如$\pi^\pm$介子、$K^\pm$介子）与光子的相互作用是通过非厄米标量场与电磁场的相互耦合来实现的．在局域$U(1)$规范变换下，场函数按下式变换：

$$\phi'(x) = e^{ie\alpha(x)}\phi(x) \tag{8.26a}$$

$$\phi^{*\prime}(x) = \phi^*(x)e^{-ie\alpha(x)} \tag{8.26b}$$

为了构造一个具有局域$U(1)$不变性的$\mathscr{L}$，必须按以下方法引入规范场（即电磁场）$A_\mu(x)$：

第一，在$\mathscr{L}_\phi = -\partial_\mu\phi^*\partial_\mu\phi - m^2\phi^*\phi$里以$D_\mu\phi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi$代替$\partial_\mu\phi$，并以$(D_\mu\phi)^* = (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi^*$代替$\partial_\mu\phi^*$。我们要求$D_\mu\phi$和$(D_\mu\phi)^*$分别象$\phi$和$\phi^*$一样地变换，即按(8.26)式变换。因此，$A_\mu$仍按（8.6）式变换。

第二，通过上述代替，构成一个在（8.26）和（8.6）联合变换下不变的$\mathscr{L}_{\phi A}$：

$$\mathscr{L}_{\phi A} = -(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi^*(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi - m^2\phi^*\phi,$$

把$\mathscr{L}_{\phi A}$与自由电磁场的Lagrange函数密度$\mathscr{L}_A$相加，就得到相互作用场系统的Lagrange函数密度$\mathscr{L}$：

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = \mathscr{L}_{\phi A} + \mathscr{L}_A = &\underbrace{-\partial_\mu\phi^*\partial_\mu\phi - m^2\phi^*\phi}_{\mathscr{L}_\phi}\underbrace{-\frac{1}{2}\partial_\nu A_\mu\partial_\nu A_\mu}_{\mathscr{L}_A}\\ &\underbrace{+ie[(\partial_\mu\phi^*)\phi - \phi^*(\partial_\mu\phi)]A_\mu - e^2\phi^*\phi A_\mu A_\mu}_{\mathscr{L}_I}.\end{aligned} \tag{8.27}$$

我们看到，两场相互作用项$\mathscr{L}_I$含有对标量场函数的偏导数。所以这里的$\mathscr{L}_I$又称为导数型耦合。

把（8.27）式代入Euler-Lagrange方程式，便得到如下的场方程组：

$$(\partial_\mu - ieA_\mu)^2\phi - m^2\phi = 0, \tag{8.28)a$$

$$(\partial_\mu + ieA_\mu)^2\phi^* - m^2\phi^* = 0, \tag{8.28)b$$

$$\square A_\mu = -ie[(\partial_\mu\phi^*)\phi - \phi^*(\partial_\mu\phi)] + 2e^2\phi^*\phi A_\mu. \tag{8.28)c$$

以$ie\phi^*$左乘（8.28)$a$式，再以$ie\phi$右乘（8.28)$b$式，然后将所得式相减，便得到微分形式的电荷守恒定律

$$\partial_\mu J_\mu(x) = 0. \tag{8.29}$$

其中，$J_\mu$是场系统的守恒流密度矢量：

$$J_\mu(x) = ie[(\partial_\mu\phi^*)\phi - \phi^*(\partial_\mu\phi)] - 2e^2\phi^*\phi A_\mu \tag{8.30}$$

场系统的正则坐标和正则共轭动量分别是：

$$\phi, \quad \pi = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}} = \dot{\phi}^* - e\phi^*A_4, \tag{8.31)a$$

$$\phi^*, \quad \pi^* = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}^*} = \dot{\phi} + e\phi A_4, \tag{8.31)b$$

$$A_\mu, \quad \pi_\mu = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}_\mu} = \dot{A}_\mu. \tag{8.31)c$$

(8.31)$a$、(8.31)$b$与自由场的（3.34)$a$、(3.34)$b$相比，多了一个与$A_4$有关的附加

项。这一差异是由于$\mathscr{L}_I$属导数耦合造成的，场系统的Hamilton函数为

$$\mathrm{H}=\int_V d^3x(\mathscr{H}_\phi+\mathscr{H}_A+\mathscr{H}_I), \tag{8.32}$$

借助于（8.31）式，将式

$$\mathscr{H}(x)=\pi\dot{\phi}+\pi^*\dot{\phi}^*+\pi_\mu\dot{A}_\mu-\mathscr{L} \tag{8.33}$$

中的$\dot{\phi}$、$\dot{\phi}^*$、$\dot{A}_\mu$分别用$\pi^*$、$\pi$、$\pi_\mu$来表示：

$$\mathscr{H}(x)=\pi^*\pi+\nabla\phi^*\cdot\nabla\phi+m^2\phi^*\phi$$

$$+\frac{1}{2}\pi_\mu\pi_\mu+\frac{1}{2}\nabla A_\mu\cdot\nabla A_\mu$$

$$-e^2\phi^*\phi A_0^2-\mathscr{L}_I,$$

与（3.35）和（3.43）$a$比较就得到

$$\mathscr{H}(x)=\mathscr{H}_\phi(x)+\mathscr{H}_A(x)+\mathscr{H}_I(x), \tag{8.34}$$

其中，

$$\mathscr{H}_\phi(x)=\pi^*\pi+\nabla\phi^*\cdot\nabla\phi+m^2\phi^*\phi, \tag{8.35$a$}$$

$$\mathscr{H}_A(x)=\frac{1}{2}(\pi_\mu\pi_\mu+\nabla A_\mu\cdot\nabla A_\mu), \tag{8.35$b$}$$

$$\mathscr{H}_I(x)=-\mathscr{L}_I-e^2\phi^*\phi A_0^2. \tag{8.35$c$}$$

我们看到，由于$\mathscr{L}_I$为导数型耦合，因而与上一小节不同，在这里，$\mathscr{L}_I\neq J_\mu A_\mu$，$\mathscr{H}_I\neq-\mathscr{L}_I$。

场系统的量子化条件为：

$$[\phi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)]=i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{8.36$a$}$$

$$[\phi^+(\mathbf{x},t),\pi^+(\mathbf{y},t)]=i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{8.36$b$}$$

$$[A_\mu(\mathbf{x},t),\pi_\nu(\mathbf{y},t)]=i\delta_{\mu\nu}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{8.36$c$}$$

$$[\phi(\mathbf{x},t),A_\mu(\mathbf{y},t)]=\cdots\cdots=0. \tag{8.36$d$}$$

量子场系统的正则运动方程式为：

$$\dot{\phi}=\frac{1}{i}[\phi,\ \mathrm{H}],\qquad \dot{\phi}^+=\frac{1}{i}[\phi^+,\ \mathrm{H}] \tag{8.37$a$}$$

$$\dot{A}_\mu=\frac{1}{i}[A_\mu,\ \mathrm{H}] \tag{8.37$b$}$$

其中H为

$$\mathrm{H}=\int_V d^3x\{[\pi\pi^++\nabla\phi^+\cdot\nabla\phi+m^2\phi^+\phi]$$

$$+\frac{1}{2}[\pi_\mu\pi_\mu+\nabla A_\mu\cdot\nabla A_\mu]-\mathscr{L}_I-e^2\phi^+\phi A_0^2\} \tag{8.38}$$

将（8.38）代入（8.37），并利用（8.36）式，即可导出量子场的场方程式，它与（8.28）在形式上一致．此外，仍然需要引入条件（8.17）来限制场的态矢量 $|a\rangle$．

与旋量场——电磁场系统的情形类似，可以得到如下的变换关系：

$$\phi(\mathbf{x}, t) = e^{iHt}\phi(\mathbf{x}, 0)e^{-iHt}, \tag{8.39a}$$

$$A_\mu(\mathbf{x}, t) = e^{iHt}A_\mu(\mathbf{x}, 0)e^{-iHt}; \tag{8.39b}$$

$$\phi(\mathbf{x}, t) = e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}}\phi(0, t)e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}}, \tag{8.40a}$$

$$A_\mu(\mathbf{x}, t) = e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}}A_\mu(0, t)e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}}. \tag{8.40b}$$

## §2 强相互作用

QED之所以发展得比较早，而且比较成熟，主要原因之一是：电磁相互作用有经典类比，可以通过这种类比来确定$\mathscr{L}_I$的具体形式．另方面QED是一个Abel规范理论，这一点，使人们对电磁相互作用的认识又前进了一步（见§1，（一））．

但是，强相互作用没有经典类比．因此，只能借助于对称性的考虑（这些对称性与实验上证实了的守恒定律相联系）来确定强相互作用的$\mathscr{L}_I$．

近十余年来，人们把强子结构的夸克模型与非Abel规范场理论相结合，发展了新的强相互作用理论，量子色动力学（简称QCD）．尽管 QCD 还不是一个成熟的理论，因而人们对强相互作用的动力学机制也还不能做出肯定的结论[注1]，但 QCD 已成为粒子理论的一个迅速发展的前沿．它所存在的困难也许是能够克服的．鉴于这种情况，我们这里不去详述早期提出的种种强作用理论，而只略举一二，以资了解一下理论的发展历史．

### （一）中性 π 介子与核子的相互作用

中性π介子，即$\pi^0$介子与核子的相互作用属于强相互作用．这种相互作用通过厄米标量场与旋量场的相互耦合来实现．厄米标量场——旋量场系统的 Lagrange 函数密度为：

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_\phi + \mathscr{L}_\psi + \mathscr{L}_I, \tag{8.41}$$

其中，

$$\mathscr{L}_\phi = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi\phi, \tag{8.42a}$$

$$\mathscr{L}_\psi = -\overline{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu + M)\psi. \tag{8.42b}$$

---

〔注1〕 QCD预言，夸克之间的强作用力是通过交换虚胶子来实现的。但QCD的理论本身还存在许多问题，而且带色的夸克、胶子均未在实验上以游离的形态被发现，这叫做色禁闭。这一点同QED中电荷很容易以显示的形式存在恰成明显的对照。这反映了非Abel规范场论较之Abel规范场论有复杂得多的内容。

这里，$m$和$M$分别是$\pi^0$介子和核子的质量．对于$\mathscr{L}_I$，我们按照下述的考虑来确定它：第一，$\mathscr{L}_I$必须具有空间反演不变性（实验事实表明，在强作用过程中，宇称守恒）和正Lorentz不变性；第二，$\mathscr{L}_I$的形式要尽可能简单．因为$\pi^0$介子的内宇称为奇，故$\phi$是一个赝标量，而由旋量场函数构成的最简单的赝标量是$\bar{\psi}\gamma_5\psi$（见第一章，§5），故可取$\mathscr{L}_I$为

$$\mathscr{L}_I = iG\bar{\psi}\gamma_5\psi\phi. \tag{8.43}$$

其中的虚数$i$是为了保证$\mathscr{L}_I$的厄米性而引入的．$G$是强相互作用的耦合常数，它与(8.8)式中的$e$相当．（8.43）式的$\mathscr{L}_I$称为Yukawa耦合．

我们来比较一下（8.43）式与（8.8）式的异同．首先，它们都包含有由Fermi场算符构成的旋量二次式，并且都线性地依赖于Bose场算符．因此，它们都属于Yukawa型耦合；其次，通过量纲分析，可以证明在$\hbar = c = 1$的单位制里$e$和$G$都是无量纲耦合常数；第三，以（8.8）为基础的电磁作用理论以及以（8.43）为基础的强作用理论都是可重整化的场论．二者的区别主要在于耦合强度相差很大：

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}，\text{而}\frac{G^2}{4\pi} = 1——15.$$

把（8.41）式—（8.43)式所确定的$\mathscr{L}$代入Euler-Lagrane方程，便得到相互作用场系统的场方程组：

$$(\gamma_\mu\partial_\mu + M)\psi = iG\gamma_5\psi\phi, \tag{8.44)a$$

$$\bar{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu - M) = -iG\bar{\psi}\gamma_5\phi. \tag{8.44)b$$

$$(\square - m^2)\phi = -iG\bar{\psi}\gamma_5\psi \tag{8.44)c$$

这些方程式同样是非线性非齐次方程式，要求得它们的精确解是困难的．

场的正则坐标和正则共轭动量分别是：$\phi$，$\pi = \dot{\phi}$和$\psi$，$\pi_\psi = i\psi^+$．Hamilton函数为

$$\mathrm{H} = \int_V d^3x \mathscr{H}(x), \tag{8.45)a$$

其中，

$$\mathscr{H}(x) = \pi\dot{\phi} + \pi_\psi\dot{\psi} - \mathscr{L}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}[\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2]}_{\mathscr{H}_\phi} + \underbrace{\bar{\psi}(\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla + M)\psi}_{\mathscr{H}_\psi}$$

$$+ \underbrace{(-iG\bar{\psi}\gamma_5\psi\phi)}_{\mathscr{H}_I = -\mathscr{L}_I} \tag{8.45)b$$

所论相互作用场系统的量子化可用与§1类似的方法进行．

## （二） π 介子与核子的相互作用

如果我们要把上一小节的理论作如下的推广，使之除$\pi^0$介子外，还包括$\pi^\pm$介子，那么，就需要把三种π介子统一处理，并将质子、中子统一处理。分述如下：

**同位旋与同位旋多重态** 所有强子（包括介子、核子和超子，……）均可按它们的质量和带电状态区分为不同的同位旋多重态。为了便于理解，我们以自旋为例来说明多重态的意义。电子自旋为$\frac{1}{2}$，即

$$|\mathbf{s}|^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right),\quad \hbar=1 \tag{8.46}$$

自旋角动量$\mathbf{s}$在普通空间第三轴上的投影值$+\frac{1}{2}$和$-\frac{1}{2}$分别与电子的两种自旋状态对应。这两种自旋态是同一电子可能具有的两种本征态。由这两种本征态又可线性组合成为许多对两两独立的自旋态。因此，电子具有两种独立的自旋态。可以暂时称之为电子的"自旋二重态"。设想人们至今对电子自旋尚了解甚少，就有可能把处于不同自旋状态的电子看成是两种不同的粒子。

质子与中子质量十分相近，在强相互作用中表现出相同的性质。质子质量$M_p\cong 1836m_e$，中子质量$M_n\cong 1839m_e$（$m_e$是电子质量），二者质量相差约为千分之二（这一质量差是电磁作用的干扰造成的）；实验表明，质子与质子，中子与中子，质子与中子之间的强相互作用力（当不考虑电磁相互作用时）是相同的，这就是强作用力的电荷无关性。因此，如若只考虑强作用，就可把质子与中子视为同一种粒子（核子）的两种不同的带电状态。用波函数$\Psi$来描写核子的状态，并假定核子除自旋角动量$\mathbf{s}$之外，还有另一种抽象的内禀"角动量"$\mathbf{I}$，它不是平常三维欧氏空间的矢量，而是所谓"同位旋空间"的矢量，"同位旋角动量"，简称同位旋。$\hat{\mathbf{I}}^2$的本征值是：

$$|\mathbf{I}|^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right).$$

即核子的同位旋量子数为$\frac{1}{2}$。矢量$\mathbf{I}$在同位旋空间第三轴上的投影值为

$$I_3=\pm\frac{1}{2}.$$

分别对应于质子态和中子态。换言之，质子与中子同属于核子的同位旋二重态。这样，核子波函数$\Psi$应是时空坐标$x$、自旋变数$m_s$以及同位旋变数$I_3$的函数：

$$\Psi=\Psi(x,m_s,I_3)=\begin{cases}\psi_p, & 当I_3=+\frac{1}{2},\\ \psi_n, & 当I_3=-\frac{1}{2},\end{cases} \tag{8.47}$$

核子不但可以处于纯粹的质子态和纯粹的中子态，而且可以处于二者的叠加态（当发生相互作用时，情形就是这样）：

$$\psi_p' = a\psi_p + b\psi_n, \tag{8.48a}$$

$$\psi_n' = c\psi_p + d\psi_n, \tag{8.48b}$$

强相互作用的电荷无关性意味着：把质子与中子对换，强作用理论的形式是不变的，这种对换相当于同位旋矢量$\mathbf{I}$在同位旋空间旋转角度$\pi$. 我们自然还可用任意的核子态$\psi_p'$去代替$\psi_p$，用$\psi_n'$去代替$\psi_n$. 这相当于同位旋矢量$\mathbf{I}$在同位旋空间旋转任意角度. 在由旋量波函数$\psi_p$、$\psi_n$张成的复二维空间，这一转动变换便是线性变换（8.48）. 将它写为矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} \psi_p' \\ \psi_n' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}. \tag{8.49}$$

列矩阵$\begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix} \psi_p' \\ \psi_n' \end{pmatrix}$分别是同位旋空间的基本旋量$\Psi$和$\Psi'$的阵例. 它们的每一分量又都是Minkowski空间的双旋量. 因此，所要建立的强作用理论应当同时对上述两个空间的变换（即Lorentz 变换和三维同位旋空间的正转动变换）具有协变性. 由于在同位旋空间的转动变换下，旋量$\Psi$的模不变：〔注1〕

$$\Psi'^{+}\Psi' = \Psi^{+}\Psi.$$

故（8.49）式的变换矩阵$U$应为$2\times2$幺正矩阵. 一个任意的$2\times2$幺正矩阵可以表示为

$$U = e^{i\varphi}u, \tag{8.50a}$$

$$\det u = 1, \tag{8.50b}$$

变换矩阵（8.50）$a$的全体构成$U(2)$群. 由于常数相位因子$e^{i\varphi}$在我们讨论的问题里不导致任何物理结果，因而可以把对称群缩小，只考虑满足条件(8.50)$b$的子群，即$SU(2)$群. $SU(2)$群的任一变换$u$可表示为

$$u = e^{i\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\tau}} = e^{i\frac{1}{2}(\alpha_1\tau_1 + \alpha_2\tau_2 + \alpha_3\tau_3)} \tag{8.51}$$

其中$\alpha_j(j=1,2,3)$是$SU(2)$群的三个实参数，$\frac{1}{2}\tau_j$是$SU(2)$群的三个生成元. 矩

〔注1〕 到此为止，我们曾把复二维空间的变换（8.49）视为同位旋空间转动变换的映射。但在下面的讨论里，将倒过来：把变换（8.49）的全体构成$SU$（2）群，同位旋空间的转动群$SO(3)$与$SU(2)$同态。我们记得，在量子力学中，当三维空间矢量转$2\pi$角度时，一个旋量只转$\pi$。所以$SU(2)$群是$SO(3)$群的双值复盖群，关于$SU(2)$与$SO(3)$的关系可参见P. 罗曼，《基本粒子理论》，第一章，上海科学技术出版社，1966年；或A. W.约什、《物理学中的群论基础》，pp142——148，科学出版社，1982年。

阵$\tau_j$是熟知的Pauli矩阵，它们的对易关系便是$SU(2)$群的李代数关系。这些代数关系在初等量子力学里已见到过：

$$[\frac{1}{2}\tau_j,\ \frac{1}{2}\tau_l]=i\sum_K \varepsilon_{jlk}\frac{1}{2}\tau_k. \tag{8.52}$$

现在，我们可以把（8.49）式重写为

$$\Psi'=u\Psi. \tag{8.53}$$

由于同位旋空间的转动变换就是变换（8.53）的映射（见p.215脚注），故凡有核子参与的强相互作用理论，在（8.53）式之下应具有不变性，即这一理论应具有$SU(2)$不变性。

我们再来看π介子．$\pi^{\pm}$介子的质量约为$273m_e$，$\pi^0$介子质量约为$264m_e$，它们的质量差约为3%．实验事实证明，当不考虑电磁作用时，三种π介子与核子之间的强作用力是相同的．因此，可以把三种π介子视为同一种“标量介子”的三种不同带电状态，并用一个统一的“同位旋矢量”场的三个分量来描写三种π介子，每个分量又都是Minkowski空间的标量场．具体做法是：对于$\pi^{\pm}$介子，我们用复标量场的两个独立的实分量〔参见（5.34）式〕

$$\phi_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi+\phi^*) \tag{8.54a}$$

$$\phi_2=\frac{i}{\sqrt{2}}(\phi-\phi^*) \tag{8.54b}$$

来描写，再把描写$\pi^0$介子的实标量场记为$\phi_3$，这样，三种π介子就联属于三分量的实标量场$\Phi=(\phi_1,\phi_2,\phi_3)$．从量子力学观点看来，Φ亦即是上述“标量介子”的波函数，因此，与核子的情形类似，假定“标量介子”具有同位旋$\mathbf{I}$，$\hat{\mathbf{I}}^2$的本征值是$|\mathbf{I}|^2=1\ (1+1)$，矢量$\mathbf{I}$在同位旋空间第三轴上的投影值

$$I_3=+1,\ 0,\ -1$$

分别与$\pi^+$、$\pi^0$、$\pi^-$介子对应．换言之，三种π介子构成一个同位旋三重态．强相互作用对于交换三种π介子具有对称性，这就相当于矢量$\mathbf{I}$在同位旋空间旋转任意角度时，强作用力不变．波函数Φ同样可视为同位旋空间的矢量，在同位旋空间的上述转动变换下Φ按$SU(2)$群的三维幺正表示$D^1$变换：

$$\phi_j'=\sum_K^3 b_{jk}\phi_k \qquad j=1,2,3 \tag{8.55}$$

其中，系数$b_{jk}$满足如下行、列正交条件：

$$\left.\begin{aligned}&\sum_j^3 b_{kj}b_{lj}=\delta_{kl},\\&\sum_j^3 b_{jk}b_{jl}=\delta_{kl}.\end{aligned}\right\}\quad k,l=1,2,3 \tag{8.56}$$

除了核子的同位旋二重态，$\pi$ 介子的同位旋三重态以外还有许多强子的同位旋单态和多重态。〔注1〕

**相互作用项$\mathscr{L}_I$**：如上所述，核子与$\pi$介子相互作用的理论应具有$SU(2)$协变性。除此以外，这一理论当然还应具有Lorentz协变性。因此，$\mathscr{L}_I$在$SU(2)$群的变换下和Lorentz变换下都应当是一个不变量。据此，从简单性考虑，可取$\mathscr{L}_I$为如下的形式：

$$\mathscr{L}_I = iG\overline{\Psi}\gamma_5\tau\Psi\cdot\Phi, \tag{8.57}$$

其中，与$\Psi$相乘的$\gamma_\mu$和$\gamma_5$应理解为：

$$\gamma_\mu = \begin{bmatrix}\gamma_\mu & 0\\ 0 & \gamma_\mu\end{bmatrix},\quad \gamma_5 = \begin{bmatrix}\gamma_5 & 0\\ 0 & \gamma_5\end{bmatrix},$$

$$\overline{\Psi} = \Psi^+\gamma_4 = \begin{pmatrix}\psi_p^+\gamma_4 & \psi_n^+\gamma_4\end{pmatrix},$$

$$\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3).$$

相互作用场系统的Lagrange函数密度为

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_N + \mathscr{L}_\pi + \mathscr{L}_I, \tag{8.58a}$$

其中，$\mathscr{L}_N$是自由质子场的$\mathscr{L}_p$与自由中子场的$\mathscr{L}_n$之和：

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_N &= -\overline{\Psi}(\gamma_\mu\partial_\mu + M)\Psi\\ &= -\overline{\psi}_p(\gamma_\mu\partial_\mu + M)\psi_p - \overline{\psi}_n(\gamma_\mu\partial_\mu + M)\psi_n\end{aligned} \tag{8.58b}$$

$\mathscr{L}_\pi$是所有$\mathscr{L}_{\phi_j}$之和：

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_\pi &= -\frac{1}{2}(\partial_\mu\Phi\cdot\partial_\mu\Phi + m^2\Phi\cdot\Phi)\\ &= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}(\partial_\mu\phi_j\partial_\mu\phi_j + m^2\phi_j\phi_j).\end{aligned} \tag{8.58c}$$

利用（8.53）式和（8.55）式不难验证$\mathscr{L}_N$和$\mathscr{L}_\pi$的$SU(2)$不变性。根据第三章的讨论，$\mathscr{L}_N$和$\mathscr{L}_\pi$具有显示的Lorentz不变性。再利用（8.53）和（8.52），可以证明$\overline{\Psi}\tau\Psi$在$SU(2)$变换下像同位旋空间矢量$\Phi$一样地变换（这一工作请读者自己去做）。因此，$\mathscr{L}_I$是两个同位旋空间矢量的标积，因而是一个同位旋空间的标量〔即$SU(2)$变换下的不变量〕；另方面可把$\mathscr{L}_I$写为下式：

---

〔注1〕 有兴趣的读者可参阅YU. V. NOVOZHILOV "Introduction to Elementary Particle Theory", PERGAMON PRESS, 英译本，1975, Chapter, 8；或者参见汉斯·费朗费尔德，欧内斯特·M·亨利，《亚原子物理学》，原子能出版社，1981年中译本pp.131—137的介绍。

$$\mathscr{L}_I = i\sum_{j}^{3} G \begin{pmatrix} \overline{\psi}_p & \overline{\psi}_n \end{pmatrix} \gamma_5 \tau_j \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix} \phi_j \tag{8.59}$$

此式右边是形如下面的一些Yukawa项的和：

$$iG\overline{\psi}_p\gamma_5\psi_p\phi_j$$

$$iG\overline{\psi}_n\gamma_5\psi_n\phi_j$$

$$iG\overline{\psi}_p\gamma_5\psi_n\phi_j$$

$$iG\overline{\psi}_n\gamma_5\psi_p\phi_j$$

由于每一项都是两个Lorentz赝标量的乘积，所以$\mathscr{L}_I$是一个Lorentz标量．综上所述，(8.57) 式的$\mathscr{L}_I$就是所要寻找的相互作用项．从 (8.58) 式的$\mathscr{L}$出发可以建立起一个同时具有以上两种协变性的强作用理论．但是，$\mathscr{L}_I$的正确性最终还要通过实验事实来判断．

**SU(2)不变性与同位旋守恒：** 核子和$\pi$介子的同位旋矢量$\mathbf{I}$在三维同位旋空间的转动，相当于用一种同位旋状态的核子去代替另一种状态的核子（包括质子和中子的相互代替），用一种同位旋状态的$\pi$介子去代替另一种状态的$\pi$介子（包括$\pi^+$、$\pi^0$、$\pi^-$相互交换）．在三维同位旋空间的上述转动变换下，核子与$\pi$介子的强相互作用具有对称性．从群表示论的观点看来，这些对称性都属于在$SU(2)$群变换下的对称性，$SU(2)$对称性是粒子的内部对称性，相应的守恒物理量便是相互作用场系统的总同位旋矢量$\mathbf{I}$〔注1〕．由 (8.57) 和 (8.58) 可得

$$\mathscr{L} = -\overline{\Psi}(\gamma_\mu\partial_\mu + M)\Psi - \frac{1}{2}(\partial_\mu\mathbf{\Phi}\cdot\partial_\mu\mathbf{\Phi} + m^2\mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{\Phi})$$

$$+iG\overline{\Psi}\gamma_5\boldsymbol{\tau}\Psi\cdot\mathbf{\Phi}, \tag{8.60}$$

考虑无穷小的$SU(2)$变换，这时$\Psi$和$\mathbf{\Phi}$分别按以下法则变换：

$$\Psi' = \Psi + \delta\Psi = (1 + \frac{i}{2}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\tau})\Psi, \tag{8.61a}$$

$$\phi'_j = \sum_{l}^{3} b_{jl}\phi_l = \sum_{l}^{3}(\delta_{jl} + \omega_{jl})\phi_l, \tag{8.61b}$$

这里，$\omega_{jl}\to 0$，且由正交条件 (8.56)，应有$\omega_{jl} = -\omega_{lj}$，因此，可通过$SU(2)$群的无穷小实参数$\alpha_k$把$\omega_{jl}$表示如下：

$$\omega_{jl} = \sum_{K}^{3}\alpha_k\varepsilon_{kjl} \equiv \alpha_k\varepsilon_{kjl}, \text{（当 } j\text{、}l \text{ 一定时 } k \text{ 的值已确定）},$$

---

〔注1〕 同位旋$\mathbf{I}$可以像普通角动量那样相加．同位旋量子数是相加性量子数．

这样，

$$\phi_j' = \phi_j + \delta\phi_j = \sum_{lk}^{3}(\delta_{jl} + \alpha_k\varepsilon_{kjl})\phi_l. \qquad (8.61)c$$

$SU(2)$对称性意味着$\mathscr{L}'(x)=\mathscr{L}(x)$，或者〔参见（3.91）式〕：

$$0 = \delta\mathscr{L} = \partial_\mu\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi)}\delta\Psi + \delta\overline{\Psi}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\overline{\Psi})}\right.$$

$$\left. + \sum_j^3 \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_j)}\delta\phi_j\right\}, \qquad (8.62)$$

将（8.60）和（8.61）代入上式，并注意到：

$$\sum_{\kappa=1}^{3}\sum_{j,l=1}^{3}\partial_\mu\phi_j\alpha_k\varepsilon_{kjl}\phi_l = \frac{1}{2}\sum_{\kappa}^{3}\sum_{j,l}^{3}\alpha_k\varepsilon_{kjl}\left[(\partial_\mu\phi_j)\phi_l - (\partial_\mu\phi_l)\phi_j\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\kappa}^{3}\sum_{i,l}^{3}\alpha_k\varepsilon_{kjl}(\partial_\mu\mathbf{\Phi}\times\mathbf{\Phi})_{jl} = \boldsymbol{\alpha}\cdot(\partial_\mu\mathbf{\Phi}\times\mathbf{\Phi}), \qquad (8.63)$$

就可得到：

$$\partial_\mu J_\mu = 0\,. \qquad (8.64)a$$

其中，

$$J_\mu = \frac{i}{2}\overline{\Psi}\gamma_\mu\boldsymbol{\tau}\Psi + (\partial_\mu\mathbf{\Phi})\times\mathbf{\Phi}, \qquad (8.64)b$$

便是相互作用场系统的同位旋流密度矢量，相应的守恒荷即是场系统的总同位旋矢量 $\mathbf{I}$：

$$\mathbf{I} = \int_V d^3x(-iJ_4)$$

$$= \int_V d^3x\left(\frac{1}{2}\Psi^+\boldsymbol{\tau}\Psi - \boldsymbol{\pi}\times\mathbf{\Phi}\right). \qquad (8.65)$$

其中

$$\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3), \qquad \pi_j = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}_j}$$

上述结果与强相互作用过程中同位旋守恒的实验事实一致。

相互作用场系统的量子化条件为：

$$\{\psi_p(\mathbf{x},t),\ \psi_p^+(\mathbf{y},t)\} = \{\psi_n(\mathbf{x},t),\ \psi_n^+(\mathbf{y},t)\}$$

$$= \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \qquad (8.66)a$$

$$[\phi_j(\mathbf{x},t),\ \pi_l(\mathbf{y},t)] = i\delta_{jl}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),$$

$$j,l = 1,2,3 \qquad (8.66)b$$

$$\{\psi_p(x,t),\ \psi_p(y,t\} = \{\psi_p(x,t),\ \psi_n(y,t)\}$$

$$= \cdots\cdots = \{\psi_n(x,t),\ \psi_n(y,t)\} = 0, \qquad (8.66)c$$

$$[\ \psi_p^{\alpha}(x,t), \phi_j(y,t)] = \cdots\cdots =$$

$$= [\ \psi_n^{\beta}(x,t),\ \pi_i(y,t)] = 0.\ \alpha、\beta = 1,2,3,4 \qquad (8.66)d$$

对$\pi$介子——核子相互作用场系统进行量子化的其余工作，可类比于本章§1的方法进行。这里应当提到的是，关于强相互作用的机制，人们在很长一段时期内曾致力于发展汤川提出的介子理论，由于（8.43）、（8.57）与（8.8）在形式上的相似性，人们自然可以把$\pi$介子看成是传递强力的中介粒子。但是，强作用的介子理论，即以（8.43）和（8.57）为基础的理论虽然可以重整化，却由于耦合常数$G>1$，因而使微扰论失效。

## §3 弱相互作用

除光子以外，所有已知的基本粒子都能参与弱相互作用，最早提出的弱作用理论是Fermi的$\beta$衰变理论。Fermi类比于电磁辐射的量子理论，提出用定域四Fermi子耦合来描写$\beta$衰变过程。自Fermi理论提出，直到1957年发现宇称不守恒的二十余年间，这个理论曾经受了一系列有关低能弱作用的实验事实的检验。按照Fermi的思想，弱相互作用的$\mathscr{L}_I$应取流—流耦合的形式。例如，对于中子的$\beta$衰变过程$n\to p+e^-+\tilde{\nu}_e$，$\mathscr{L}_I$为

$$\mathscr{L}_I = \frac{G_F}{\sqrt{2}}(\bar{\psi}_p\gamma_\mu\psi_n)(\bar{\psi}_e\gamma_\mu\psi_\nu) \qquad (8.67)$$

式中，$G_F$是一个普适的耦合常数，$\psi_p$、$\psi_n$、$\psi_e$、$\psi_\nu$分别是质子场、中子场、电子场和中微子场的场函数。上式是两个矢量流的耦合，其中没有出现任何中介粒子的场。因此，四个Fermi子p、n、$e$、$\tilde{\nu}_e$之间的相互作用是直接相互作用，或定域相互作用。

1957年，李政道、杨振宁发现弱作用中宇称不守恒，Fermi理论需要进行修改。1958年Feyman和Gell-Mann在Fermi理论的基础上提出了$V-A$流—流相互作用理论。按照$V-A$理论，弱作用的一般形式是

$$\mathscr{L}_I = \frac{G_F}{\sqrt{2}}J_\mu(x)\bar{J}_\mu(x),\ \bar{J}_\mu = \begin{cases} -J_\mu^+ & 当\mu\neq 4 \\ J_\mu^+ & 当\mu = 4 \end{cases} \qquad (8.68)$$

$J_\mu$是弱流，它是轻子弱流$l_\mu$与强子弱流$h_\mu$的和：

$$J_\mu(x) = l_\mu(x) + h_\mu(x). \qquad (8.69)$$

因此，$\mathscr{L}_I$是三项之和：

$$\mathscr{L}_I = \mathscr{L}_I^{(\text{纯轻})} + \mathscr{L}_I^{(\text{半轻})} + \mathscr{L}_I^{(\text{无轻})}$$

右边第一项描写只有轻子参加的弱过程，第二项描写兼有轻子和强子参加的弱过程，第三项描写强子弱过程：

$$\mathscr{L}_I^{(\text{纯轻})} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} l_\mu(x)\bar{l}_\mu(x), \tag{8.70a}$$

$$\mathscr{L}_I^{(\text{半轻})} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [l_\mu(x)\bar{h}_\mu(x) + h_\mu(x)\bar{l}_\mu(x)] \tag{8.70b}$$

$$\mathscr{L}_I^{(\text{无轻})} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} h_\mu(x)\bar{h}_\mu(x). \tag{8.70c}$$

$l_\mu$和$h_\mu$分别都是一个矢量流和一个轴矢流（即赝矢流）之和．轻子弱流$l_\mu$具有以下形式：

$$l_\lambda(x) = \bar{\psi}_e(x)\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_{\nu_e}(x) + \bar{\psi}_\mu(x)\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_{\nu_\mu}(x), \tag{8.71}$$

强子弱流$h_\mu$为[注1]

$$h_\mu(x) = V_\mu(x) + A_\mu(x) \tag{8.72a}$$

其中，

$$V_\mu(x) = \cos\theta_V V_\mu^{(0)} + \sin\theta_V V_\mu^{(1)} \tag{8.72b}$$

是矢量流，上标（0）和（1）分别表示奇异数$S$不变的弱流和奇异数改变($\Delta S = 1$)的弱流．(8.72)$a$右边的第二项是轴矢流，它同样可表示为：

$$A_\mu(x) = \cos\theta_A A_\mu^{(0)} + \sin\theta_A A_\mu^{(1)} \tag{8.72c}$$

以上诸式里的$\theta_V$和$\theta_A$分别是矢量部分和轴矢部分的 Cabibbo 角，它们的实测值是：$\theta_V = 0.247 \pm 0.008$, $\theta_A = 0.2688 \pm 0.0006$.

将（8.71）代入（8.70)$a$，就可得到纯轻子弱过程的$\mathscr{L}_I$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_I = \frac{G_F}{\sqrt{2}}\Big\{ & \left[\bar{\psi}_e\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_{\nu_e}\right]\left[\bar{\psi}_{\nu_\mu}\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_\mu\right] \\ & + \left[\bar{\psi}_\mu\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_{\nu_\mu}\right]\left[\bar{\psi}_{\nu_e}\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_e\right] \\ & + \left[\bar{\psi}_e\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_{\nu_e}\right]\left[\bar{\psi}_{\nu_e}\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_e\right] \\ & + \left[\bar{\psi}_\mu\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_{\nu_\mu}\right]\left[\bar{\psi}_{\nu_\mu}\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_\mu\right]\Big\}\end{aligned} \tag{8.73}$$

［注1］详见David C. Cheng, Gerard K. O'Neill《Elementary Particle Physics An Introduction》, Addison-Wesley, 1979, Chapter 8．关于弱作用的唯象性理论，也可参阅李政道著《场论与粒子物理学》，第二十二章，科学出版社，1981年．

此式右边前两项可以用来描写μ介子衰变：

$$\mu^- \longrightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu, \tag{8.74}$$

$$\mu^+ \longrightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu. \tag{8.75}$$

或描写中微子——轻子非弹性散射，例如

$$\nu_\mu + e^- \longrightarrow \nu_e + \mu^-, \tag{8.76}$$

（8.73）式右边第三项可用来描写中微子—电子弹性散射，例如：

$$\nu_e + e^\pm \longrightarrow e^\pm + \nu_e, \tag{8.77}$$

$$\bar{\nu}_e + e^\pm \longrightarrow e^\pm + \bar{\nu}_e, \tag{8.78}$$

由于μ介子寿命仅为～2微秒，且$\nu_\mu$束流又要靠μ的衰变得到，不像$\bar{\nu}_e$可以从反应堆得到束流，故(8.73)式右边第四项所描写的μ和$\nu_\mu$的散射过程，虽然在理论分析上和（8.77）过程一样，但在实验上极为困难，至今还没有被观察到。

（8.71）式的轻子弱流$l_\lambda$又称为轻子的带电弱流，这是因为$l_\lambda$所包含的每一个弱流，都使初态粒子和终态粒子在电荷上相差一个单位。因此，（8.73）式的$\mathscr{L}_I$描写轻子的带电流相互作用。同样地，（8.72）式的强子弱流$h_\mu$也是带电流。所以$V$—$A$流—流相互作用理论完全排除了中性流相互作用（使初、终态粒子具有相同电荷的弱流，叫中性弱流）。但是，量子场论的发展预言了中性流相互作用的存在，而且早在1973年，在欧洲核子研究中心，已从实验上发现了中性流相互作用的事例。

在低能弱作用的范围内，$V$—$A$理论与实验事实附合得很好，但在高能区域，理论计算的中微子散射截面将随中微子能量的增加而无限制地增大，这就必然要违反幺正限。为了使中微子散射截面不致违反幺正限，就必须限制入射中微子的能量(在动量中心系里)在300GeV以下〔注1〕.换言之，当散射过程的能量、动量转移很大时，$V$—$A$理论就不正确。为了建立在高能区域也适用的弱作用理论，人们曾试图把定域的普适$V$—$A$流—流相互作用修改为非定域作用，即把弱相互作用不再视为直接作用，而是通过中间矢量Bose子$W^\pm$来传递的间接作用（如同带电粒子之间的电磁作用是通过光子来传递那样）〔注2〕。经过这样修改之后，理论上计算的散射截面不再与过程的幺正性相抵触。不仅如此，$V$—$A$理论只能计算一阶效应的缺点，在进行上述修改之后，看来也应能得到克服。但是，理论无法进行重整化，因而仍然无法考虑高阶效应。

1967年—1968年，S. Weinberg和A. Salam提出了将弱作用与电磁作用统一起来的规范理论〔注3〕。这一理论预言，弱作用是通过带电的中间矢量Bose子$W^\pm$和中性的中间矢量Bose子$Z^0$来传递的。$W^\pm$和$Z^0$与光子是属于同族的粒子。W—S理论预言中间矢量

〔注1〕 见李政道著《场论与粒子物理学》，下册，pp.74—77，科学出版社，1981年；或《基本粒子译文集》，第二集，pp.22—27，科技文献出版社重庆分社，1978年。

〔注2〕 见《基本粒子译文集》，第二集，pp.22—26.

〔注3〕 关于W—S理论，在《基本粒子译文集》第二集pp.27—30有详细叙述。

Bose子的质量分别为：

$$M_W = 37.34/\sin\theta_W(\text{GeV}) > 37.34\text{GeV}$$

$$M_Z = 74.68/\sin 2\theta_W(\text{GeV}) > 74.68\text{GeV}$$

$\theta_W$称为Weinberg角，由实验分析知$\sin^2\theta_W = 0.23 \pm 0.02$〔注1〕. 按照这一理论，弱作用的形式不再是流—流耦合，而是，带电弱流与带电的中间子$W^\pm$耦合，中性弱流与中性的中间子$Z^0$耦合（就像电磁流与光子耦合那样）. 因此，除了带电流相互作用以外尚应存在中性流相互作用. 事实上，自1973年以来，人们已从实验上发现了如下的一些中性流反应：

$$\nu_\mu + e^- \longrightarrow \nu_\mu + e^-, \tag{8.79a}$$

$$\tilde{\nu}_\mu + e^- \longrightarrow \tilde{\nu}_\mu + e^-, \tag{8.79b}$$

$$\nu_\mu + \text{N} \longrightarrow \nu_\mu + \text{强子}, \tag{8.80a}$$

$$\tilde{\nu}_\mu + \text{N} \longrightarrow \tilde{\nu}_\mu + \text{强子}, \tag{8.80b}$$

这里，N代表核子. （8.79）式是纯轻子中性流过程，当能量、动量转移不大时，这些过程的$\mathscr{L}_I$可等效地写为如下的中性流耦合〔注2〕：

$$\mathscr{L}_I = \frac{G_F}{\sqrt{2}}\left\{\left[\bar{\psi}_{\nu_\mu}\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_{\nu_\mu}\right]\left[\bar{\psi}_e\gamma_\lambda(c_V + c_A\gamma_5)\psi_e\right]\right\} \tag{8.81}$$

其中，

$$\left.\begin{aligned} c_V &= \frac{1}{2} - 2\sin^2\theta_W, \\ c_A &= \frac{1}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{8.82}$$

在W—S理论里，（8.74）—（8.78）的轻子弱过程是通过带电轻子弱流（8.71）与$W^\pm$的耦合来实现的；在低能情形下，W—S理论里的$\mathscr{L}_I$同样过渡到$V—A$理论里的（8.73）式右边前三项，由此看到，$V—A$理论作为一个唯象性理论，它是W—S理论在低能区域的一个近似.

在第九章里，我们将会看到，普适的弱耦合常数$G_F$（又常称为普适Fermi耦合常数）可以用质子质量表示为：

$$G_F = 1.03\times 10^{-5} M_p^{-2}, \tag{8.83}$$

此式表明，耦合常数$G_F$具有质量负二次方的量纲(或者说，具有长度正二次方的量纲)；倘若把（8.73）式与（8.8）、（8.43）作一粗略比较就会看到，$G_F$不是弱作用荷，它与

〔注1〕 此数据引自《Quarks and Leptons》, PLENUM, 1980, p.276.

〔注2〕 参见《基本粒子译文集》，第二集，P31,（8.17)式和（8.18）式，科技文献出版社重庆分社，1978年.

(8.8) 式的 $e$、(8.43) 式的$G$并不相当，考虑到 $e$ 和$G$都是无量纲耦合常数，可令弱作用荷为

$$g_F=\frac{G_F}{\sqrt{2}}M_p^2\approx 0.71\times 10^{-5} \tag{8.84}$$

这样，弱作用的强度便是

$$\frac{g_F^2}{4\pi}\approx 4\times 10^{-12}, \tag{8.85}$$

与 $\frac{e^2}{4\pi}=\frac{1}{137}$和$\frac{G^2}{4\pi}=1$—15相比较，可见，弱作用是很弱的. 这一结果是从$V$—$A$理论得到的，它与迄今为止的实验事实符合. 但是，W—S理论预言，当相互作用能量与中间矢量Bose子的质量可以比拟时，弱作用与电磁作用就会具有相同的强度.

1971年，'tHooft 证明了规范理论的可重整性，1973年实验上发现中性流，1982—1983年，实验上发现了$W^{\pm}$和$Z^0$介子，质量分别约为 81GeV 和91GeV，与理论预言附合〔注1〕. 所有这些都是对W—S理论的有力支持. 近十余年来，弱电统一理论与实验符合得很好，并且又有了许多新发展. 因此，弱、电、强大统一已成为基本粒子相互作用理论的发展前沿，但由于规范理论已远远超出本书范围，因此，在第十章里，我们将只限于用$V$—$A$理论来计算几个弱作用过程的一阶效应.

## §4 连续对称性与守恒定律

在自由场情形下，某一物理量的守恒定律，仅仅表明该物理量是一个运动恒量. 而在量子场相互作用的情形下，某一物理量的守恒定律可按下述两种方式之一来理解：第一，该物理量是相互作用场系统的运动恒量；第二，物理量之值在相互作用过程中保持不变. 第二种理解比第一种理解更深入了一步.

按照Noether定理，每一种场物理量的守恒定律都联系于某种连续对称性（见第三章，§4），在时空平移变换下，相互作用场系统的运动规律的不变性，导致能量、动量守恒定律. 例如，在电磁相互作用的情形下，把 (8.7) 式的$\mathscr{L}$代入 (3.71)$b$，得到旋量场—电磁场系统的能量、动量矢量为

$$\begin{aligned}P_\mu(t)=\int d^3x\{&(-i\delta_{4\mu}\mathscr{L}_\psi-i\psi^+\partial_\mu\psi)\\&+(-i\delta_{4\mu}\mathscr{L}_A-\dot{A}_\lambda\partial_\mu A_\lambda)\\&+(-i\delta_{4\mu}\mathscr{L}_I)\},\end{aligned} \tag{8.86}$$

---

〔注1〕 参见Phys. Lett. Vol. 122B (1983) №1, p103; Vol. 122B (1983) №5, 6, p476; Vol. 129 (1983) №1, 2, p130.

积分形式的能量、动量守恒定律便是（3.72）式：

$$P_\mu(t_1)=P_\mu(t_2). \tag{8.87}$$

相互作用场系统的总能量是$H(t)=-iP_4(t)$，由（8.12）式和（8.15）式可知：

$$H(t)=\int_V d^3x(\mathscr{H}_\psi+\mathscr{H}_A+\mathscr{H}_I)$$
$$=H_\psi(t)+H_A(t)+H_I(t). \tag{8.88}$$

$$H(t_1)=H(t_2); \tag{8.89}$$

应当注意，（8.88）式中的$H_\psi(t)=\int_V d^3x\psi^+(\gamma_4\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla+\gamma_4 m)\psi$和$H_A(t)=\frac{1}{2}\int_V d^3x(\pi_\mu\pi_\mu+\nabla A_\mu\cdot\nabla A_\mu)$分别与自由场情形下的（6.5）式和（7.4）式虽然具有形式上的一致性，但并不相等，这是因为在有相互作用的情形下，场函数是非线性非齐次方程组（8.9）的解. 量子场论研究相互作用过程，只是关心相互作用场系统的初态和终态，即发生相互作用以前的状态和发生相互作用以后的状态，这两种状态在时间上与发生相互作用的时刻相隔无限远，即初态是$t=-\infty$时的场态，终态是$t=+\infty$时的场态（见第九章）. 因此，由（8.89）式，我们有

$$H(-\infty)=H(+\infty), \tag{8.90}$$

这里，$H(\pm\infty)=H_\psi(\pm\infty)+H_A(\pm\infty)$. 由于$t=\pm\infty$时，可令

$$H_I(\pm\infty)=-\int d^3x\mathscr{L}_I=0,$$

故$H_\psi(\pm\infty)$和$H_A(\pm\infty)$就分别与（6.5）式和（7.4）式等同.

由（8.86）式得到相互作用场系统的总动量是

$$\mathbf{P}(t)=\mathbf{P}_\psi(t)+\mathbf{P}_A(t). \tag{8.91}$$

$\mathbf{P}_\psi(t)$与$\mathbf{P}_A(t)$的表示式在形式上分别与（6.11）和（7.12）一致，但它们并不分别相等，我们同样有

$$\mathbf{P}_\psi(-\infty)+\mathbf{P}_A(-\infty)=\mathbf{P}_\psi(t)+\mathbf{P}_A(t)$$
$$=\mathbf{P}_\psi(+\infty)+\mathbf{P}_A(+\infty). \tag{8.92}$$

这里$\mathbf{P}_\psi(\pm\infty)$和$\mathbf{P}_A(\pm\infty)$分别与（6.11）式和（7.12）式完全等同. 综合（8.90）与（8.92），我们得到能量、动量守恒定律的有用形式：

$$P_\mu(+\infty)=P_\mu(-\infty). \tag{8.93}$$

此式对任何一种相互作用过程都适用. 类似地，我们可以从场系统的正 Lorentz 不变性出发来讨论角动量守恒定律. 结果是〔参见（3.83）式和（3.86）式〕：

$$M_{jk}(+\infty)=M_{jk}(-\infty), \tag{8.94}$$

下面再来看内部对称性. 在§1里，曾经从场方程出发，推出电荷守恒定律的微分形式（8.10）和（8.29）. 这里，我们以带电旋量场和电磁场的相互作用为例，证明，局域规范不变性导致电荷守恒定律. 在无穷小的$U(1)$规范变换下，我们有：

$$\psi'(x) = \psi(x) + ie\alpha(x)\psi(x), \tag{8.95a}$$

$$\overline{\psi}'(x) = \overline{\psi}(x) - ie\alpha(x)\overline{\psi}(x), \tag{8.95b}$$

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x). \tag{8.95c}$$

这里，$\alpha(x)\to 0$. 利用Euler-Lagrange方程，容易得到：

$$0 = \delta\mathscr{L} = \partial_\mu\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta\psi + \delta\overline{\psi}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\overline{\psi})} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\delta A_\nu\right\},$$

将（8.7）的$\mathscr{L}$代入上式，并注意到$J_\mu = ie\overline{\psi}\gamma_\mu\psi$，可得

$$\partial_\mu\{J_\mu\alpha(x) + \partial_\mu A_\nu\partial_\nu\alpha(x)\} = 0,$$

利用场方程（8.9）$c$，可将上式简化为

$$\alpha(x)\partial_\mu J_\mu + \partial_\mu A_\nu\partial_\mu\partial_\nu\alpha(x) = 0, \tag{8.96}$$

因为$\Box\alpha(x) = 0$，故上式左边第二项成为：

$$\partial_\mu A_\nu\partial_\mu\partial_\nu\alpha(x) = \partial_\mu[A_\nu\partial_\mu\partial_\nu\alpha(x)],$$

这样，（8.96）式又成为

$$\alpha(x)\partial_\mu J_\mu + \partial_\mu[A_\nu\partial_\mu\partial_\nu\alpha(x)] = 0.$$

此式左方前一项只与旋量场有关，后一项只与电磁场有关，因而要使它在整个时空区域$\Omega$上的每点均成立，此两项必须分别为零：

$$\alpha(x)\partial_\mu J_\mu(x) = 0, \tag{8.97a}$$

$$\partial_\mu[A_\nu\partial_\mu\partial_\nu\alpha(x)] = 0. \tag{8.97b}$$

（8.97）$a$式再次给出微分形式的电荷守恒定律（8.10）；至于（8.97）$b$式，它给出矢量流

$$a_\mu = A_\nu\partial_\mu\partial_\nu\alpha(x)$$

的守恒定律. 由于$a_\mu$不是一个物理的矢量流，故它的守恒定律没有物理意义.

$\pi$介子、核子相互作用场系统的电荷守恒定律，与$\mathscr{L}$在整体规范变换$\phi'_A = e^{i\chi}\phi_A$下的不变性相关，$c$量相角$\chi$与相应场量子的电荷成正比，即$\chi = e\alpha$，因此，中性场被排除在这一电荷规范变换之外. 我们有：

$$\psi'_p = e^{ie\alpha}\psi_p, \quad \psi'_n = \psi_n, \tag{8.98a}$$

$$\phi' = e^{ie\alpha}\phi, \quad \phi^{*\prime} = e^{-ie\alpha}\phi^*, \quad \phi'_3 = \phi_3. \tag{8.98b}$$

考虑无穷小变换，并注意到$\Psi = \begin{pmatrix}\psi_p\\ \psi_n\end{pmatrix}$以及（8.54）式，可分别把以上二式写为：

$$\Psi' = \begin{pmatrix} e^{ie\delta\alpha} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Psi = \Psi + \begin{pmatrix} ie\delta\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Psi, \tag{8.99a}$$

$$\overline{\Psi}' = \overline{\Psi} - \overline{\Psi} \begin{pmatrix} ie\delta\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{8.99b}$$

$$\phi_1' = \phi_1 + e\delta\alpha\phi_2, \tag{8.100a}$$

$$\phi_2' = \phi_2 - e\delta\alpha\phi_1, \tag{8.100b}$$

$$\phi_3' = \phi_3. \tag{8.100c}$$

利用Euler-Lagrange方程，可从（8.60）式得到：

$$0 = \delta\mathscr{L} = \partial_\mu\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi)}\delta\Psi + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_j)}\delta\phi_j\right\}$$

$$= \partial_\mu\left\{-\overline{\Psi}\begin{pmatrix} \gamma_\mu & 0 \\ 0 & \gamma_\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ie\delta\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Psi - \sum_{j=1}^{3}(\partial_\mu\phi_j)\delta\phi_j\right\}.$$

因此，我们有微分形式的电荷守恒定律

$$\partial_\mu J_\mu = 0. \tag{8.101a}$$

其中，

$$J_\mu = ie\overline{\psi}_p\gamma_\mu\psi_p + e(\partial_\mu\phi_1)\phi_2 - e(\partial_\mu\phi_2)\phi_1. \tag{8.101b}$$

相应的守恒荷即是相互作用场系统的总电荷$eQ$：

$$eQ = \int_V d^3x(-iJ_4)$$

$$= e\int_V d^3x\ (\psi_p^+\psi_p + \pi_2\phi_1 - \pi_1\phi_2) \tag{8.102}$$

我们指出，由于对易关系（8.66）$b$，因而（8.102）式的厄米性已得到保证。

电荷守恒定律是普遍成立的。在本书所述及的知识范围以内除电磁相互作用以外，其余的每种相互作用理论都是非规范理论，相应的电荷守恒定律都由整体规范对称性导出。只须注意，应将中性粒子的场排除在电荷规范变换之外。

除了电荷守恒以外，重子数守恒和轻子数守恒在一切相互作用过程里也是普遍成立的。所有的重子，包括核子和超子，其重子数均为＋1，所有反重子的重子数均为－1，轻子有两类[注1]，电子及其中微子$\nu_e$为一类；$\mu$子及其中微子$\nu_\mu$为另一类。$e^-$、$\nu_e$具有电子轻子数各为＋1，$e^+$、$\tilde{\nu}_e$具有电子轻子数各为－1；$\mu^-$、$\nu_\mu$具有$\mu$轻子数各为＋1，$\mu^+$、$\tilde{\nu}_\mu$具有$\mu$轻子数各为－1。

---

〔注1〕 详见《基本粒子译文集》，第二集，pp. 17—18，和李政道《场论与粒子物理学》，上册，p138；1975年，实验上已发现$\tau$轻子和$\tau$中微子存在的实验证据，并且有迹象表明$\tau$轻子数是单独守恒的。

**重子数守恒定律与$\mathscr{L}$在重子规范变换**

$$\phi_A' = e^{i\chi}\phi_A \tag{8.103}$$

下的不变性对应，这里的$c$量相角$\chi$与场量子的重子数成正比。对于无穷小的规范变换，$\chi=B\delta\alpha$，$B$是粒子的重子数，由于轻子和介子的重子数均为零，故$\mathscr{L}$里包含的轻子场和介子场将不受到重子规范变换（8.103）的影响。例如，对于$\pi$介子、核子相互作用系统，我们有

$$0=\delta\mathscr{L}=\partial_\mu\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi)}\delta\Psi+\delta\overline{\Psi}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\overline{\Psi})}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_j)}\delta\phi_j\right\}.$$

因为$\delta\phi_j=0$，$\delta\Psi=iB\delta\alpha\Psi$，故将（8.60）式代入上式后，得到重子数守恒定律的微分形式如下：

$$\partial_\mu J_\mu=0. \tag{8.104a}$$

$$J_\mu=iB\overline{\Psi}\gamma_\mu\Psi. \tag{8.104b}$$

相应的守恒荷便是场系统的总重子数：

$$N=\int_V d^3x\,(-iJ_4)=B\int d^3x\,(\psi_p^+\psi_p+\psi_n^+\psi_n)$$

因为粒子（重子）的重子数为$B=+1$，故

$$N=\int_V d^3x\,(\psi_p^+\psi_p+\psi_n^+\psi_n) \tag{8.105}$$

综合（8.102）、（8.65）和（8.105），就得到著名的Gell-Mann—Nishijima关系式：

$$Q=I_3+\frac{N}{2} \tag{8.106}$$

因为电荷数$Q$，重子数$N$以及同位旋第三分量量子数都是可加性量子数，所以对于场的单粒子态，同样地有：

$$q=I_3+\frac{B}{2}. \tag{8.107}$$

此式里的$q$、$I_3$、$B$分别是单个粒子的电荷数（以基本电荷$e$为单位）、同位旋第三分量量子数和重子数。

K介子和超子又都是所谓奇异粒子，K介子具有奇异数$S=+1$，反K介子奇异数$S=-1$，超子的奇异数是负整数，反超子的奇异数是正整数，自1974年以来，人们又发现了一类带有粲数$C$的新粒子，即粲粒子。重子数、奇异数和粲数的如下组合，称为超荷数，记为$Y$：

$$Y=B+S-C \tag{8.108}$$

到计入粲粒子为止，（8.107）式已被扩充为下式：

$$q=I_3+\frac{Y}{2}+C=I_3+\frac{B+S+C}{2}. \tag{8.109}$$

在强作用过程里，$B$、$S$、$C$都是守恒的，相互作用越弱，对称性越少，相应地，守恒量的数目也越少。在弱作用过程里，$S$和$C$均不守恒。

超荷守恒和轻子数守恒均可由相应的规范对称性导出，这一工作请读者自己去做。

## §5 分立对称性与TCP定理

在自由场情形下，除二分量中微子理论之外均分别具有空间反演对称性（P对称性）、时间反演对称性（T对称性）和电荷共轭对称性（C对称性）。但对相互作用的场系统，则不一定分别具有这三种对称性。在弱相互作用里，P对称性和C对称性均受到破坏，但P与C联合变换下的对称性一般还是成立的，由于下面将要述及的TCP定理，因而在弱作用过程里，T反演对称性一般也是成立的。不过，如第五章所述，中性长寿命K介子的衰变过程是一个仅有的例外。在这一过程里，T反演对称性受到破坏。

在强作用和电磁作用过程里，上述三种对称性均分别成立，据此，可以找出相互作用场的T、C、P变换法则。作为强相互作用的例子，我们来看中性$\pi$介子与核子的相互作用。由于相互作用场方程的解与自由场方程的解具有相同的Lorentz变换性质，因而同样可以假定：在相互作用情形下，场算符的T、C、P变换法则与自由场的变换法则也是相同的。这样Lagrange函数密度（8.41）的自由部分和等时对易关系就都具有T、C、P不变性，剩下要讨论的是$\mathscr{L}_I$的不变性。按照上述假定，旋量场的P变换法则便是（6.32）式，由于$\pi^0$介子内禀宇称为奇，故标量场应按（5.81）$b$式变换，由此不难推得

$$\begin{aligned}\mathscr{P}\mathscr{L}_I(\mathbf{x},t)\mathscr{P}^{-1}&=\mathscr{P}iG\bar{\psi}(\mathbf{x},t)\gamma_5\psi(\mathbf{x},t)\phi(\mathbf{x},t)\mathscr{P}^{-1}\\&=iG\bar{\psi}(-\mathbf{x},t)\gamma_5\psi(-\mathbf{x},t)\phi(-\mathbf{x},t)=\mathscr{L}_I(-\mathbf{x},t).\end{aligned} \tag{8.110}$$

在推导过程中，曾使用了$\mathscr{P}$与$\gamma_\mu$、$\gamma_5$的可对易性质，并且在相互作用情形下，已把(6.32)和（5.81）$b$中的反演算符视为同一。（8.110）式尚可写为

$$\mathscr{L}'_I(\mathbf{x},t)=\mathscr{P}\mathscr{L}_I(\mathbf{x},t)\mathscr{P}^{-1}=\mathscr{L}_I(-\mathbf{x},t).$$

在此式左、右两端以$-\mathbf{x}$代替$\mathbf{x}$，就得到

$$\mathscr{L}'_I(x')=\mathscr{L}_I(x). \tag{8.111}$$

因此，（6.32）式和（5.81）$b$式的确是相互作用场系统的对称变换。假定旋量场的时间反演变换法则是（6.70）式，则

$$\begin{aligned}&\mathscr{T}iG\bar{\psi}(\mathbf{x},t)\gamma_5\psi(\mathbf{x},t)\mathscr{T}^{-1}\\&=-iG\bar{\psi}(\mathbf{x},-t)\gamma_5\psi(\mathbf{x},-t),\end{aligned} \tag{8.112}$$

这里曾使用了（6.72）式和$\mathscr{T}\gamma_\mu\mathscr{T}^{-1}=\gamma_\mu^*$。由于时间反演不变性成立，我们应当有：

$$\mathscr{T}\mathscr{L}_I(\mathbf{x},t)\mathscr{T}^{-1}=\mathscr{L}_I(\mathbf{x},-t),$$

故对于$\phi(\mathbf{x},t)$的T反演变换，应当在（5.119）右方取负号：

$$\mathscr{T}\phi(\mathbf{x},t)\mathscr{T}^{-1}=-\phi(\mathbf{x},-t). \tag{8.113}$$

相互作用场的电荷共轭变换就是（5.107）和（6.44）、（6.45）。只需注意，对于厄米标量场，$\phi^+=\phi$。为了证明这些变换确实是相互作用场系统的对称变换，我们来把(8.43)式写成具有显示的电荷共轭对称性的形式。在（6.61）式里以$\gamma_5$代替$\gamma_\mu$得：

$$:\overline{\psi}\gamma_5\psi:=\frac{1}{2}[\overline{\psi},\gamma_5\psi] \tag{8.114}$$

此式左边的正规乘积符号可以去掉（请读者自己证明这一点。提示：假定自由场的不等时反对易关系在相互作用情形下仍适用），因此，

$$\mathscr{L}_I=iG\frac{1}{2}[\overline{\psi},\gamma_5\psi]\phi=\frac{i}{2}G(\overline{\psi}\gamma_5\psi+\overline{\psi}^C\gamma_5\psi^C)\phi \tag{8.115}$$

这里使用了等式

$$(\gamma_5\psi)^T\overline{\psi}^T=-\overline{\psi}^C\gamma_5\psi^C. \tag{8.116}$$

（8.115）式具有显示的C对称性。因而（5.107）、（6.44）、（6.45）确实是相互作用场的对称变换。

作为电磁相互作用的例子，我们来看带电旋量场与电磁场的相互作用。在P反演变换下，我们有

$$\mathscr{P}\overline{\psi}(\mathbf{x},t)\gamma_\mu\psi(\mathbf{x},t)\mathscr{P}^{-1}=\overline{\psi}(-\mathbf{x},t)\gamma_4\gamma_\mu\gamma_4\psi(-\mathbf{x},t).$$

这里，旋量场的P变换法则仍是（6.32）式，因此，电磁场应按下式变换：

$$\mathscr{P}\mathbf{A}(\mathbf{x},t)\mathscr{P}^{-1}=-\mathbf{A}(-\mathbf{x},t). \tag{8.117a}$$

$$\mathscr{P}A_4(\mathbf{x},t)\mathscr{P}^{-1}=A_4(-\mathbf{x},t). \tag{8.117b}$$

这样，才能保证使下式成立：

$$\mathscr{P}\mathscr{L}_I(\mathbf{x},t)\mathscr{P}^{-1}=\mathscr{P}ie\overline{\psi}(\mathbf{x},t)\gamma_\mu\psi(\mathbf{x},t)A_\mu(\mathbf{x},t)\mathscr{P}^{-1}$$

$$=ie\overline{\psi}(-\mathbf{x},t)\gamma_\mu\psi(-\mathbf{x},t)A_\mu(-\mathbf{x},t)=\mathscr{L}_I(-\mathbf{x},t).$$

使用旋量场的T变换法则（6.70），可得：

$$\mathscr{T}ie\overline{\psi}(\mathbf{x},t)\gamma_\mu\psi(\mathbf{x},t)\mathscr{T}^{-1}$$

$$=-i\overline{\psi}(\mathbf{x},-t)\,T_\gamma\gamma_\mu^*T_\gamma^{-1}\psi(\mathbf{x},-t)$$

$$=-i\overline{\psi}(\mathbf{x},-t)\gamma_\mu\psi(\mathbf{x},-t)$$

$$\mathscr{T}\mathscr{L}_I(\mathbf{x},t)\mathscr{T}^{-1}=\mathscr{L}_I(\mathbf{x},-t),$$

必须假定电磁场的T变换法则如下：

$$\mathscr{T}A_\mu(\mathbf{x},t)\mathscr{T}^{-1}=-A_\mu(\mathbf{x},-t). \tag{8.118}$$

因为

$$\mathscr{L}_I=J_\mu A_\mu,$$

所以为了保证电荷共轭对称性，按照第六章，§3(二)的讨论，必须把$\mathscr{L}_I$修改为

$$\mathscr{L}_I=J_\mu A_\mu=\frac{ie}{2}(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi-\bar{\psi}^C\gamma_\mu\psi^C)A_\mu$$

$$=:ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi:A_\mu(x) \tag{8.119}$$

注意到(6.54)式，立刻由上式看出，$A_\mu(x)$的C变换法则是：

$$\mathscr{C}A_\mu(x)\mathscr{C}^{-1}=-A_\mu(x). \tag{8.120}$$

尽管三种分立对称性都不是普遍成立的对称性，但是，如下的TCP定理表明，在三者的联合作用下，所有的相互作用理论都具有不变性。

**定理：** 如果相互作用场系统的Lagrange函数密度具有 Lorentz 不变性和厄米性，场算符都是定域算符（即场算符是时，空坐标的连续可微函数，一点的场的变化由无限接近的点的场决定），量子化方法符合自旋与统计的关系，那么，相互作用理论就具有在T、C、P联合变换下的对称性，而且与T、C、P变换的先后顺序无关。

关于定理的证明，读者可参阅李政道著《场论与粒子物理学》上册pp.182—184。如前所述，对于电磁作用和强作用，三种分立对称性均单独成立，因而TCP定理显然成立。在弱作用过程里，C、P对称性均不成立，但一般地，C与P联合变换下的对称性仍成立（中性长寿命K介子的衰变除外），因而，按TCP定理，T对称性也成立。

作为一个例子，我们来验证(8.73)式右边前两项满足TCP定理。利用(6.32)式可得：

$$\mathscr{P}\mathscr{L}_I\mathscr{P}^{-1}=\mathscr{P}\frac{G_F}{\sqrt{2}}\Big\{\underbrace{\left[\bar{\psi}_e\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_{\nu_e}\right]\left[\bar{\psi}_{\nu_\mu}\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_\mu\right]}_{\text{场算符的}}$$

$$+\underbrace{\left[\bar{\psi}_\mu\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_{\nu_\mu}\right]\left[\bar{\psi}_{\nu_e}\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_e\right]}_{\text{变数均为}(+\mathbf{x},t)}\Big\}\mathscr{P}^{-1}$$

$$=\frac{G_F}{\sqrt{2}}\Big\{\underbrace{\left[\bar{\psi}_e\gamma_4\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\gamma_4\psi_{\nu_e}\right]\left[\bar{\psi}_{\nu_\mu}\gamma_4\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\gamma_4\psi_\mu\right]}_{\text{变数均}}$$

$$+\underbrace{\left[\bar{\psi}_\mu\gamma_4\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\gamma_4\psi_{\nu_\mu}\right]\left[\bar{\psi}_{\nu_e}\gamma_4\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\gamma_4\psi_e\right]}_{\text{为}(-\mathbf{x},t)}\Big\}$$

$$
= \frac{G_F}{\sqrt{2}}\Big\{ \underbrace{\left[\bar{\psi}_e \gamma_\lambda (1-\gamma_5)\psi_{\nu_e}\right]\left[\bar{\psi}_{\nu_\mu}\gamma_\lambda(1-\gamma_5)\psi_\mu\right] + \left[\bar{\psi}_\mu\gamma_\lambda(1-\gamma_5)\psi_{\nu_\mu}\right]\left[\bar{\psi}_{\nu_e}\gamma_\lambda(1-\gamma_5)\psi_e\right]}_{\text{变数均为}(-x,\,t)}\Big\}, \tag{8.121}
$$

由此可见，$\mathscr{P}\mathscr{L}_I(x,t)\mathscr{P}^{-1}\neq\mathscr{L}_I(-x,t)$，即P对称性受到破坏，这是弱作用过程里宇称不守恒的一个例证，对（8.121）再作C变换，利用（6.44）和（6.45）可得

$$
\left.\begin{aligned}
&\mathscr{C}\mathscr{P}\mathscr{L}_I(x,t)\mathscr{P}^{-1}\mathscr{C}^{-1}\\
&= \frac{G_F}{\sqrt{2}}\Big\{\left[-\psi_e^T C^{-1}\gamma_\lambda(1-\gamma_5)C\bar{\psi}^T_{\nu_e}\right]\\
&\times\left[-\psi^T_{\nu_\mu}C^{-1}\gamma_\lambda(1-\gamma_5)C\bar{\psi}^T_\mu\right]\\
&+\left[-\psi^T_\mu C^{-1}\gamma_\lambda(1-\gamma_5)C\bar{\psi}^T_{\nu_\mu}\right]\\
&\times\left[-\psi^T_{\nu_e}C^{-1}\gamma_\lambda(1-\gamma_5)C\bar{\psi}^T_e\right]\Big\}\\
&= \frac{G_F}{\sqrt{2}}\Big\{\left[\bar{\psi}_e\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_{\nu_e}\right]\left[\bar{\psi}_{\nu_\mu}\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_\mu\right]\\
&+\left[\bar{\psi}_\mu\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_{\nu_\mu}\right]\left[\bar{\psi}_{\nu_e}\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_e\right]\Big\}\\
&= \mathscr{L}_I(-x,t).
\end{aligned}\right\}\ \text{场算符的变数均为}(-x,t) \tag{8.122}
$$

这就表明，CP对称性仍成立．在上式的推导里，曾用了（6.57）式，以及

$$
\gamma_5 C = C\gamma_5, \tag{8.123}
$$

$$
\left[\bar{\psi}\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi\right]^T = \left[\bar{\psi}\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi\right]. \tag{8.124}
$$

对（8.122）再做T变换，利用（6.72）、（6.70）以及$\mathscr{T}\gamma_\mu\mathscr{T}^{-1}=\gamma_\mu^*$，可得：

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{T}\mathscr{C}\mathscr{P}\mathscr{L}_I(x,t)\mathscr{P}^{-1}\mathscr{C}^{-1}\mathscr{T}^{-1} = \mathscr{T}\mathscr{L}_I(-x,t)\mathscr{T}^{-1}\\
&= \frac{G_F}{\sqrt{2}}\mathscr{T}\Big\{\underbrace{\left[\bar{\psi}_e\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_{\nu_e}\right]\left[\bar{\psi}_{\nu_\mu}\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_\mu\right] + \left[\bar{\psi}_\mu\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_{\nu_\mu}\right]\left[\bar{\psi}_{\nu_e}\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_e\right]}_{\text{场算符变数均为}(-x,\,t)}\Big\}\mathscr{T}^{-1}\\
&= \mathscr{L}_I(-x,-t).
\end{aligned}
$$

因此，

$$\mathscr{T}\mathscr{C}\mathscr{P}\mathscr{L}_I(x)\mathscr{P}^{-1}\mathscr{C}^{-1}\mathscr{T}^{-1}=\mathscr{L}_I(-x), \tag{8.125}$$

或者，

$$\mathscr{L}_I'(x')=\mathscr{L}_I(x). \tag{8.126}$$

我们由此看到，在弱相互作用过程里，虽然C、P对称性均不成立，但C、P、T联合变换下的对称性严格成立。

TCP定理是基本粒子理论里的一条重要定理，它是构造各种相互作用Lagrange函数密度$\mathscr{L}_I$以及选择量子场传播函数的重要指南；由TCP定理可以推出如下结论：粒子的质量和寿命与其反粒子的质量、寿命相同，但二者电荷等大反号。[注1]

## 习　　题

（1）如下的Lagrange函数密度破坏了局域$U(1)$规范对称性，试通过推算找出它破坏这种对称性的原因：

$$\mathscr{L}=-\overline{\psi}(x)(\gamma_\mu D_\mu+m)\psi(x)-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\mu^2A_\nu(x)A_\nu(x).$$

其中，$A_\mu(x)$是矢量场的场函数，$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu(x)-\partial_\nu A_\mu(x)$，$\mu$是矢量场$A_\mu(x)$的质量，$D_\mu\psi(x)=[\partial_\mu-ieA_\mu(x)]\psi(x)$是协变导数。

（2）从局域$U(1)$规范不变性出发，导出流守恒定律（8.29）。

（3）证明$\overline{\Psi}\tau\Psi$〔见（8.57）式〕是同位旋空间的矢量。

（4）证明

$$\overline{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)\equiv:\overline{\psi}(x)\gamma_5\psi(x):$$

（5）验证弱作用的中性流耦合(8.81)满足TCP定理。

（6）导出相互作用场方程（8.9）。

---

〔注1〕详见李政道《场论与粒子物理学》，上册，pp.186—189。

# 第九章　相互作用场方程的微扰解

如第八章开始所述，量子场的相互作用（或相互耦合）将导致原有场的退激和新场的激发．这一过程便是相应的粒子相互作用和相互转化的过程．要对基本粒子相互作用和转化的过程进行定量讨论，就必须求解相互作用场的场方程式，但由于这些方程式的非线性非齐次性质，致使求解十分困难．在这一章里，我们就来研究如何求解基本粒子的相互作用问题．

## §1　相互作用图景

在初等量子力学里，我们已熟悉态和力学量的两种图景，$h$ 图景(Heisenberg图景)和 $s$ 图景(Schrödinger图景)．在 $h$ 图景里，态矢量不随时间变化，而算符与时间有关；在 $s$ 图景里，情况恰好与 $h$ 图景相反．到第八章为止，我们对量子场的全部讨论都是在 $h$ 图景中进行的．从第五章到第七章的讨论看到，在自由场情形下，采用 $h$ 图景是完全适当的．首先，理论具有自始至终的明显协变性；其次，由于场方程是线性齐次方程式，因而很容易求得精确解．但当有相互作用时（见第八章），场方程是非线性非齐次方程式，无法求得精确的平面波解，因而也无法建立不等时的对易和反对易关系．这样，理论就不再具有明显的 Lorentz 协变性．以上情况表明，当从自由场理论过渡到相互作用场论时，描述方式也要作相应的过渡．即要从 $h$ 图景过渡到一个新的图景．

量子场的相互作用，一方面导致原有场的退激和新场的激发，另方面，整个相互作用场系统的状态也将相应地发生变化（跃迁），从具有某些粒子的场态跃迁到具有另一些粒子的场态．因此，在新的图景里，量子场系统在时间中的运动应当同时用场算符和态矢量随时间的变化来描写．这个新的图景就是所谓相互作用图景（$i$ 图景）．下面用上指标 $s$、$i$、$h$ 分别标志三个图景中的算符和态矢量．

按照量子力学，$h$、$s$ 两图景之间的转换关系如下：

$$\phi_A^s(\mathrm{x}) = e^{-i\mathrm{H}^h t}\phi_A^h(\mathrm{x},\ t)\, e^{+i\mathrm{H}^h t}, \tag{9.1)a}$$

$$\pi_A^s(\mathrm{x}) = e^{-i\mathrm{H}^h t}\pi_A^h(\mathrm{x},\ t)\, e^{+i\mathrm{H}^h t}, \tag{9.1)b}$$

$$|\,a;\,t\rangle^s = e^{-i\mathrm{H}^h t}|a\rangle^h. \tag{9.1)c}$$

将 (9.1)$c$式对 $t$ 求导并利用 (9.1)$a$式，就得到 $s$ 图景里的态矢量所满足的方程式：

$$i\frac{\partial}{\partial t}|a;\,t\rangle^s = \mathrm{H}^s|\,a;\,t\rangle^s. \tag{9.1)d}$$

此外，由（9.1）$a$式不难看出：

$$H^s = H^h \equiv H \text{（统一记为H）}. \tag{9.1e}$$

以上转换关系表明：$\phi_A^s(x) = \phi_A^h(x, 0)$，因此，（9.1）$a$式、（9.1）$b$式与（8.25）式、（8.39）式是完全一样的，而后者是由场论本身得到的，这就表明，（9.1）$a$、$b$、$c$三式是一个合理的转换关系。

如前所述，$i$图景里的算符和态矢量均与时间有关，换言之，$i$图景居于$h$、$s$两图景之间。因为图景变换不改变场态矢量的模，即

$${}^i\langle a;\ t|\ a;\ t\rangle^i = {}^s\langle a;\ t|\ a;\ t\rangle^s = {}^h\langle a|\ a\rangle^h,$$

故$i$图景与$h$、$s$两图景之间均应通过幺正变换而相互联系。首先来确定自$s$图景到$i$图景的转换关系。假定这种关系由下式给出：

$$\phi_A^i(x, t) = e^{iQt}\phi_A^s(x)\,e^{-iQt} \tag{9.2a}$$

则因$\phi_A^i(x, t)$与时间有关，它同样应满足量子场正则运动方程式，所以上式右边的厄米算符Q必须是场系统的Hamilton算符。但由（9.1）式看到，倘若取$Q = H$，则由上式又回到了$h$图景。如上所述，我们的目的是要从$s$图景转换到一个居于$s$、$h$两图景之间的$i$图景。为此，可在$s$图景里把H分为自由部分$H_0^s$和相互作用部分$H_I^s$：

$$H = H^s = H_0^s + H_I^s, \tag{9.2b}$$

并取其中一部分作为厄米算符Q。如果取$H_I^s = Q$，则由（9.2）$a$式就有$H_I^i = H_I^s$。但是，$H_I^s$与时间无关，而$H_I^i$则应与时间有关。因此，我们应当取$H_0^s = Q$。这样就得到$i$、$s$两图景之间的如下转换关系：

$$\phi_A^i(x, t) = e^{iH_0^s t}\phi_A^s(x)\,e^{-iH_0^s t}, \tag{9.2c}$$

$$\pi_A^i(x, t) = e^{iH_0^s t}\pi_A^s(x)\,e^{-iH_0^s t}, \tag{9.2d}$$

$$|\ a;\ t\rangle^i = e^{iH_0^s t}|\ a;\ t\rangle^s. \tag{9.2e}$$

由（9.2）$c$显然有

$$H_0^s = H_0^i, \tag{9.3a}$$

结合（9.1）$a$式又有

$$H_0^s = H_0^i = H_0^h(t = 0). \tag{9.3b}$$

现在，把（9.2）$c$、$d$、$e$三式分别与（9.1）$a$、$b$、$c$三式结合，就得到$i$图景与$h$图景之间的转换关系：

$$\phi_A^i(x, t) = e^{iH_0^s t}e^{-iHt}\phi_A^h(x, t)\,e^{iHt}e^{-iH_0^s t}, \tag{9.4a}$$

$$\pi_A^i(x, t) = e^{iH_0^s t}e^{-iHt}\pi_A^h(x, t)\,e^{iHt}e^{-iH_0^s t}. \tag{9.4b}$$

$$|a;\ t\rangle^i = e^{iH_0^s t}e^{-iHt}|a\rangle^h. \tag{9.4c}$$

从（9.1）、（9.2）和（9.4）容易看出，当$t=0$时，$i$、$h$、$s$三个图景趋于一致。

在$i$图景里，相互作用场系统的场方程式是与自由场方程一样的线性齐次方程式。把（9.2）$c$、$d$对$t$求导并注意（9.3）$a$式，分别得到：

$$\dot{\phi}_A^i(\mathbf{x},t)=\frac{1}{i}[\phi_A^i(\mathbf{x},t),\mathrm{H}_0^i], \tag{9.5a}$$

$$\dot{\pi}_A^i(\mathbf{x},t)=\frac{1}{i}[\pi_A^i(\mathbf{x},t),\mathrm{H}_0^i], \tag{9.5b}$$

（9.5）$a$、$b$即是在$i$图景里，相互作用的量子场系统的正则运动方程式。因为一方面，$\phi_A^i(\mathbf{x},t)$、$\pi_A^i(\mathbf{x},t)$与$\phi_A^h(\mathbf{x},t)$、$\pi_A^h(\mathbf{x},t)$只相差两次幺正变换〔见（9.4）式〕，故它们满足同样的等时对易（或反对易）关系〔如第八章所述，这些关系与自由场的等时对易（或反对易）关系一致〕，另方面$\mathrm{H}_0^i$与自由场的Hamilton算符具有形式相同的坐标空间表示式，不同之点仅在于：前者的表示式包含场算符$\phi_A^i$、$\pi_A^i$，而后者的表示式包含场算符$\phi_A^h$、$\pi_A^h$，由以上两方面容易看出：（9.5）$a$、$b$的确能够导致与自由场方程一样的线性齐次方程式。

为了推出$i$图景里的态矢量$|a;t\rangle^i$所满足的方程式，现将（9.4）$c$对$t$求导：

$$\frac{\partial}{\partial t}|a;t\rangle^i=i\mathrm{H}_0^s e^{i\mathrm{H}_0^s t}e^{-i\mathrm{H}t}|a\rangle^h+e^{i\mathrm{H}_0^s t}(-i\mathrm{H})e^{-i\mathrm{H}t}|a\rangle^h$$

$$\boxed{\text{由(9.2)}b}\rightarrow=-ie^{i\mathrm{H}_0^s t}\mathrm{H}_I^s e^{-i\mathrm{H}_0^s t}e^{i\mathrm{H}_0^s t}e^{-i\mathrm{H}t}|a\rangle^h$$

$$\boxed{\text{由(9.2)}c}\rightarrow=-i\mathrm{H}_I^i|a;t\rangle^i,$$

上式即是$|a;t\rangle^i$满足的微分方程式：

$$i\frac{\partial}{\partial t}|a;t\rangle^i=\mathrm{H}_I^i|a;t\rangle^i. \tag{9.5c}$$

在$i$图景里，理论具有明显的Lorentz协变性。由于场方程是线性齐次方程式，因而可以像自由场情形一样把场算符$\phi_A^i(\mathbf{x},t)$表示为平面波解的线性组合，这样，就可把等时对易（或反对易）关系和$\mathrm{H}_0^i$的坐标空间表示式一起转到动量空间，从而显示场的粒子性。相应的产生．湮灭算符和粒子数算符由场算符平面波展式中的系数定义（与自由场情形一样），这些算符满足和自由场情形下一样的代数关系。这样，只要重复自由场情形下建立不等时对易（或反对易）关系的步骤，就可建立相互作用场系统的相应关系。因此，场方程和对易关系均具有显示的协变性。此外，Schrödinger形式的运动方程式(9.5)$c$也可扩充为具有显示不变性的形式〔注1〕

$i$图景的引入，除了以上所述优点之外，还有如下显著的优点：在$i$图景里，求解相互作用场方程的任务被分成了独立的两部分，其一是求解场算符所满足的线性齐次方

---

〔注1〕 具体做法详见朱洪元著《量子场论》，pp.165—169，科学出版社，1960年。

程式 (9.5) $a$、$b$，由此得到$H_0^i$的本征值和本征态矢量，显示相互作用场系统的粒子性，这类工作在第五章到第七章已详细做过；其二是求解态矢量所满足的运动方程(9.5) $c$，当相互作用不强时，这在数学方法上是一个量子力学微扰论的问题，因而没有任何困难。由 (9.5) $c$ 看到，$|a;t\rangle^i$的时间依赖关系决定于算符$H_I^i(t)$。$H_I^i(t)$ 的物理作用是使场系统由原来具有某些粒子的状态跃迁到具有另一些粒子的新的状态。因而可以预料，(9.5) $c$ 式的解将能对基本粒子的相互作用和相互转化给出一个适当的描写。从下一节开始，我们就来求解 (9.5) $c$ 式。

## §2 $U$矩阵与$S$矩阵

### U矩阵

采用完全类似于求解量子力学里的Schrödinger波动方程的做法，把求解方程(9.5)$c$的问题等效为要寻找一个幺正算符$U(t,t_0)$，它把初刻$t=t_0$的场态 $|a;t_0\rangle$[注1] 变换到任意 $t$ 时刻的态 $|a;t\rangle$：

$$|a;t\rangle=U(t,t_0)|a;t_0\rangle. \tag{9.6}$$

把 (9.6) 代入 (9.5) $c$ 便得到$U(t,t_0)$所满足的微分方程式：

$$i\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0)=H_I(t)U(t,t_0). \tag{9.7}$$

由方程式 (9.7) 极易证明这个演化算符$U(t,t_0)$的幺正性（请读者自己去做），对于任意给定的初始时刻$t_0$，所有不同时刻 $t$ 的幺正算符$U(t,t_0)$ 组成一维幺正群。首先，由 (9.6) 式容易看出：

$$U(t_0,t_0)=1, \qquad (9.8)a$$

其次，把变换

$$|a;t_2\rangle=U(t_2,t_1)|a;t_1\rangle \quad \text{（对于任意的}t_1\text{、}t_2\text{）}$$

和变换

$$|a;t_1\rangle=U(t_1,t_0)|a;t_0\rangle$$

组合起来，便得到：

$$U(t_2,t_1)U(t_1,t_0)=U(t_2,t_0) \qquad (9.8)b$$

在此式中令$t_2=t_0$，又得到

$$U(t_0,t_1)=U^{-1}(t_1,t_0), \quad \text{对于任意的时刻}t_1 \qquad (9.8)c$$

---

〔注1〕 自此以后，我们把算符和态矢量的上标省去，但应记住，自此以后的讨论都是在 $i$ 图景里进行的。

因此，对于任意给定的初刻$t_0$，所有$U(t,t_0)$的全体的确满足群的条件。演化算符$U(t,t_0)$可在场态矢量空间映射为矩阵。因此，我们有一个作用于量子场态矢量空间的幺正矩阵群。

**U 矩阵的微扰展式**

只要找到$U$矩阵的显示表达式，就可由给定的初态$|a;t_0\rangle$经由(9.6)式求得相互作用以后的场态$|a;t\rangle$。为此就必须在初始条件(9.8)$a$之下求解方程式(9.7)。在相互作用很弱的条件下（即耦合常数≪1），可以把$H_I(t)$视为微扰，由此便可求(9.7)式的微扰近似解。

首先，对(9.7)式做积分，把它转变为一个积分方程：

$$U(t,t_0)=-i\int H_I(t)U(t,t_0)dt,$$

把上式右边的不定积分表示为以常数$t_0$为下限，积分变数为上限的定积分：

$$U(t,t_0)=C(t_0)-i\int_{t_0}^{t} H_I(t_1)U(t_1,t_0)dt_1,$$

由初始条件(9.8)$a$可得$C(t_0)=1$，因此，$U(t,t_0)$满足如下的积分方程式：

$$U(t,t_0)=1-i\int_{t_0}^{t} H_I(t_1)U(t_1,t_0)dt_1,$$
$$t_1<t, \tag{9.9}$$

我们用迭代法来解这个方程式。把

$$U(t_1,t_0)=1-i\int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_2)U(t_2,t_0),\quad t_2<t_1$$

代入(9.9)式得

$$U(t,t_0)=1-i\int_{t_0}^{t} dt_1 H_I(t_1)$$
$$+(-i)^2\int_{t_0}^{t} dt_1\int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1)H_I(t_2)U(t_2,t_0)$$
$$t_2<t_1<t, \tag{9.10}$$

再把

$$U(t_2,t_0)=1-i\int_{t_0}^{t_2} dt_3 H_I(t_3)U(t_3,t_0)\quad t_3<t_2$$

代入(9.10)，又得

$$U(t,t_0)=1-i\int_{t_0}^{t} dt_1 H_I(t_1)$$
$$+(-i)^2\int_{t_0}^{t} dt_1\int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1)H_I(t_2)$$

$$+(-i)^3\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2\int_{t_0}^{t_2}dt_3 H_I(t_1)H_I(t_2)H_I(t_3)U(t_3,t_0)$$

$$t_3<t_2<t_1<t, \tag{9.11}$$

对$U(t_3, t_0)$仍可进行同样的迭代。把此种迭代手续进行无限多次，就相当于把时间间隔$(t-t_0)$分成无限多的小间隔：

$$\left.\begin{array}{l} t-t_1, t_1-t_2, t_2-t_3, \cdots\cdots, t_{n-1}-t_n (t_n=t_0) \\ t>t_1>t_2>t_3>\cdots\cdots>t_n=t_0 \end{array}\right\} n\to\infty$$

由于间隔数目无限多，且令每个小间隔趋于零，特别地，

$$t_{n-1}\longrightarrow t_n(=t_0), \text{当} n\to\infty,$$

由此就有

$$U(t_{n-1}, t_0)=1, \quad \text{当} n\to\infty.$$

因此，我们得到方程（9.9）的如下迭代解：

$$\begin{aligned} U(t,t_0) &= 1-i\int_{t_0}^{t}dt_1 H_I(t_1) \\ &+(-i)^2\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2 H_I(t_1)H_I(t_2) \\ &+(-i)^3\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2\int_{t_0}^{t_2}dt_3 H_I(t_1)H_I(t_2)H_I(t_3) \\ &+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+ \\ &+(-i)^n\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2\cdots\cdots\int_{t_0}^{t_{n-1}}dt_n H_I(t_1)\cdots\cdots H_I(t_n) \\ &+\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{9.12}$$

这便是$U$矩阵的微扰展开式。为了使微扰论具有明显的 Lorentz 协变性，需要把右边各项的形式作一些变化。首先看 $n=2$ 的项：

$$\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2 H_I(t_1)H_I(t_2)=\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t}dt_2\theta(t_1-t_2)H_I(t_1)H_I(t_2), \tag{9.13a}$$

另方面，上式右边对于变数记号$t_1$、$t_2$的置换是不变的，所以

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2 H_I(t_1)H_I(t_2) &= \int_{t_0}^{t}dt_2\int_{t_0}^{t}dt_1\theta(t_2-t_1)H_I(t_2)H_I(t_1) \\ &= \int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t}dt_2\theta(t_2-t_1)H_I(t_2)H_I(t_1), \end{aligned} \tag{9.13b}$$

将(9.13)$a$与(9.13)$b$相加得到：

$$\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2 H_I(t_1)H_I(t_2)$$

$$=\frac{1}{2!}\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t}dt_2 T[H_I(t_1)H_I(t_2)]. \tag{9.14}$$

再来看 $n=3$ 的项：

$$\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2\int_{t_0}^{t_2}dt_3 H_I(t_1)H_I(t_2)H_I(t_3)$$

$$=\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t}dt_2\int_{t_0}^{t}dt_3\theta(t_1-t_2)\theta(t_2-t_3)H_I(t_1)H_I(t_2)H_I(t_3), \tag{9.15)a$$

此式右边对变数记号的所有置换是不变的，所以我们有：

$$\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2\int_{t_0}^{t_2}dt_3 H_I(t_1)H_I(t_2)H_I(t_3)$$

$$=\int_{t_0}^{t}dt_2\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t}dt_3\theta(t_2-t_1)\theta(t_1-t_3)H_I(t_2)H_I(t_1)H_I(t_3)$$

$$=\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t}dt_2\int_{t_0}^{t}dt_3\theta(t_2-t_1)\theta(t_1-t_3)H_I(t_2)H_I(t_1)H_I(t_3). \tag{9.15)b$$

$$\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2\int_{t_0}^{t_2}dt_3 H_I(t_1)H_I(t_2)H_I(t_3)$$

$$=\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t}dt_2\int_{t_0}^{t}dt_3\theta(t_1-t_3)\theta(t_3-t_2)H_I(t_1)H_I(t_3)H_I(t_2), \tag{9.15)c$$

$$\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2\int_{t_0}^{t_2}dt_3 H_I(t_1)H_I(t_2)H_I(t_3)$$

$$=\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t}dt_2\int_{t_0}^{t}dt_3\theta(t_2-t_3)\theta(t_3-t_1)H_I(t_2)H_I(t_3)H_I(t_1), \tag{9.15)d$$

$$\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2\int_{t_0}^{t_2}dt_3 H_I(t_1)H_I(t_2)H_I(t_3)$$

$$=\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t}dt_2\int_{t_0}^{t}dt_3\theta(t_3-t_1)\theta(t_1-t_2)H_I(t_3)H_I(t_1)H_I(t_2), \tag{9.15)e$$

$$\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2\int_{t_0}^{t_2}dt_3 H_I(t_1)H_I(t_2)H_I(t_3)$$

$$=\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t}dt_2\int_{t_0}^{t}dt_3\theta(t_3-t_2)\theta(_2-t_1)H_I(t_3)H_I(t_2)H_I(t_1), \tag{9.15)f$$

将(9.15)$a$—(9.15)$f$的六个等式相加，得到

$$\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \mathrm{H}_I(t_1)\mathrm{H}_I(t_2)\mathrm{H}_I(t_3).$$

$$= \frac{1}{3!}\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 \int_{t_0}^{t} dt_3 T[\mathrm{H}_I(t_1)\mathrm{H}_I(t_2)\mathrm{H}_I(t_3)] \tag{9.16}$$

在上面的推算里曾使用了以下诸等式：

$$T[\mathrm{H}_I(t_1)\mathrm{H}_I(t_2)] = \theta(t_1 - t_2)\mathrm{H}_I(t_1)\mathrm{H}_I(t_2) + \theta(t_2 - t_1)\mathrm{H}_I(t_2)\mathrm{H}_I(t_1), \tag{9.17a}$$

$$\begin{aligned} T[\mathrm{H}_I(t_1)\mathrm{H}_I(t_2)\mathrm{H}_I(t_3)] &= \theta(t_1 - t_2)\theta(t_2 - t_3)\mathrm{H}_I(t_1)\mathrm{H}_I(t_2)\mathrm{H}_I(t_3) \\ &+ \theta(t_2 - t_1)\theta(t_1 - t_3)\mathrm{H}_I(t_2)\mathrm{H}_I(t_1)\mathrm{H}_I(t_3) + \cdots\cdots + \\ &+ \theta(t_3 - t_2)\theta(t_2 - t_1)\mathrm{H}_I(t_3)\mathrm{H}_I(t_2)\mathrm{H}_I(t_1), \end{aligned} \tag{9.17b}$$

这些等式很容易从时序乘积的定义得到验证。

此外，我们显然有

$$\int_{t_0}^{t} dt_1 \mathrm{H}_I(t_1) = \frac{1}{1!}\int_{t_0}^{t} dt_1 T[\mathrm{H}_I(t_1)]. \tag{9.18}$$

从(918)、(9.14)和(9.16)，可以初步看出如下的规律性：

$$\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots\cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \mathrm{H}_I(t_1)\mathrm{H}_I(t_2)\cdots\cdots\mathrm{H}_I(t_n)$$

$$= \frac{1}{n!}\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 \cdots\cdots \int_{t_0}^{t} dt_n T[\mathrm{H}_I(t_1)\mathrm{H}_I(t_2)\cdots\cdots\mathrm{H}_I(t_n)]. \tag{9.19}$$

现在，假定对于某个给定的正整数 $n$，(9.19) 式是成立的，那么，就可以推出：对于 $n' = n + 1$ 该式也成立：

$$\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots\cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \int_{t_0}^{t_n} dt_{n+1} \mathrm{H}_I(t_1)\mathrm{H}_I(t_2)\cdots\cdots\mathrm{H}_I(t_n)\mathrm{H}_I(t_{n+1})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n!}\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 \cdots\cdots \int_{t_0}^{t} dt_n \int_{t_0}^{t} dt_{n+1} \theta(t_1 - t_{n+1})\theta(t_2 - t_{n+1})\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\theta(t_n - t_{n+1}) T[\mathrm{H}_I(t_1)\cdots\cdots\mathrm{H}_I(t_n)]\mathrm{H}_I(t_{n+1}). \end{aligned} \tag{9.20}$$

变数 $t_{n+1}$ 与变数 $t_1\cdots\cdots t_n$ 存在 $n$ 种对换，因此，类似前述的做法，我们尚可写出 $n$ 个等式，这些等式左边与 (9.20) 式左边相同，而其右边与 (9.20) 式右边分别只相差积分变数的一次对换。把包括 (9.20) 在内的 $n + 1$ 个等式加起来，就得到：

$$\int_{t_0}^{t} dt_1 \cdots\cdots \int_{t_0}^{t_n} dt_{n+1} \mathrm{H}_I(t_1)\cdots\cdots\mathrm{H}_I(t_{n+1})$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 \cdots\cdots \int_{t_0}^{t} dt_{n+1} T[\mathrm{H}_I(t_1)\mathrm{H}_I(t_2)\cdots\cdots\mathrm{H}_I(t_{n+1})]. \tag{9.21}$$

通过以上的归纳，我们确信（9.19）式对于任意的正整数 $n$ 都是成立的。因此，可把 $U$ 矩阵的微扰展式（9.12）重写为：

$$
\begin{aligned}
U(t,t_0) = & 1+\frac{(-i)}{1!}\int_{t_0}^{t} dt_1 T[\mathrm{H}_I(t_1)] \\
& +\frac{(-i)^2}{2!}\int_{t_0}^{t} dt_1\int_{t_0}^{t} dt_2 T[\mathrm{H}_I(t_1)\mathrm{H}_I(t_2)] \\
& +\frac{(-i)^3}{3!}\int_{t_0}^{t} dt_1\int_{t_0}^{t} dt_2\int_{t_0}^{t} dt_3 T[\mathrm{H}_I(t_1)\mathrm{H}_I(t_2)\mathrm{H}_I(t_3)] \\
& +\cdots\cdots\cdots\cdots+ \\
& +\frac{(-i)^n}{n!}\int_{t_0}^{t} dt_1\int_{t_0}^{t} dt_2\cdots\cdots\int_{t_0}^{t} dt_n T[\mathrm{H}_I(t_1)\mathrm{H}_I(t_2)\cdots\cdots\mathrm{H}_I(t_n)] \\
& +\cdots = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int_{t_0}^{t} dt_1\cdots\cdots\int_{t_0}^{t} dt_n T[\mathrm{H}_I(t_1)\cdots\cdots\mathrm{H}_I(t_n)].
\end{aligned}
\tag{9.22}
$$

式中的 $\mathrm{H}_I(t)$ 等于相互作用Hamilton密度 $\mathscr{H}_I(x)$ 的体积积分：

$$
\mathrm{H}_I(t) = \int_V d^3x\mathscr{H}_I(x). \tag{9.23a}
$$

我们可令归一化体积 $V$ 为任意大的空间体积，也可令 $V$ 穷尽整个的三维空间，这样做并不改变理论的物理结果。因此(9.23)$a$式可重写为

$$
\mathrm{H}_I(t) = \int d^3x\mathscr{H}_I(x). \tag{9.23b}
$$

与此相应，（1.184）式也可重写为

$$
\int e^{\pm i(\mathbf{k}\pm\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}}d^3x = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{k}\pm\mathbf{k}'). \tag{9.24}
$$

在实际计算里，可视方便采用（1.184）式或（9.24）式.现在，把(9.23)$b$代入（9.22）得到：

$$
\begin{aligned}
U(t,t_0) = & 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int_{t_0}^{t} d^4x_1\int_{t_0}^{t} d^4x_2\cdots\cdots\int_{t_0}^{t} d^4x_n T[\mathscr{H}_I(x_1)\cdots\cdots \\
& \cdots\cdots\mathscr{H}_I(x_n)].\quad (d^4x = d^3x\,dt)
\end{aligned}
\tag{9.25}
$$

或者形式地表示为

$$
U(t,t_0) = T\exp\left\{-i\int_{t_0}^{t} d^4x\mathscr{H}_I(x)\right\}. \tag{9.26}
$$

以下将会看到，$U$ 矩阵的上述微扰展式能够保证使微扰论具有Lorentz协变性。

**S 矩阵**

归一化体积$V$的引入，相当于把场在整个三维空间里进行周期性延拓，这相当于在整个三维空间里整齐排列着无数的立方区域$V$，在每个区域里都进行着相同的量子场运动过程。因此，无论是否引入归一化体积$V$，平面波总是充满无限空间，并在无限空间传播．然而，实验上观测到的自由粒子（自由量子场的激发态）均不是绝对自由的粒子．相应的自由场也不是平面波，而是波包．在实际的散射过程里，初态粒子自远方相向运动（或者靶粒子静止不动），直至相互碰撞、相互作用并产生终态粒子，这些终态粒子又沿不同方向飞向远方，它们之间不再有相互作用．粒子之间发生相互作用的时间间隔$\Delta t$是十分短暂的（大约为$10^{-23}$秒——$10^{-10}$秒），而对初态粒子和终态粒子进行实验观测的时刻与发生相互作用的短暂时刻之间的时间间隔则远远大于$\Delta t$．换言之，相互作用场系统的初态和终态，从时间上来说是与发生相互作用的时刻相距物理无限远的状态．据此，我们应当在（9.6）式里令$t_0=-\infty$、$t=+\infty$，并把该式改写为：

$$|a;+\infty\rangle=U(\infty,-\infty)|a,-\infty\rangle. \tag{9.27}$$

如果用波包来描写自由场的初态和终态，在数学上将会遇到困难，因此在场论里仍假定处于初态和终态的场都是单色平面波．但是，既然平面波充满无限空间，并在无限的时间中传播，那么，作为场与场相互耦合的Hamilton 密度$\mathscr{H}_I(x)$将在整个四维时空的所有点均不为零．换言之，量子场相互作用将在三维空间的所有点发生，并将在整个时间轴上持续进行．但是，“相互作用在无限时间中持续进行”的理论模型与实验观测不符，并会导致跃迁几率成为无限大（见第十章），幸而，这一困难，通过考虑单位时间的跃迁几率就可得到克服．因此，从场论的平面波假定出发仍然可以得到能与实验观测进行比较的物理结果．

根据上述的分析，我们似乎可以定义相互作用场系统的初态和终态分别是$|a;-\infty\rangle$和$|a;+\infty\rangle$．但是在通常情况下，场系统的初态是用实验仪器产生的、具有确定能量、动量和极化的粒子，而终态粒子的能量、动量和极化则以不同的几率取不同的值．因此，相互作用场系统的初态和终态都是Hamilton算符的自由部分$H_0$的本征态[注1]．我们用$|\,)$来表示这些本征态．初态$|i)$是已知的，而终态$|f)$则以某个一定的权重出现在$t=+\infty$时的场态$|a;+\infty\rangle$中．至此，应将（9.27）式重写为

$$\begin{aligned}|a;+\infty\rangle&=U(\infty,-\infty)|a;-\infty\rangle\\&=U(\infty,-\infty)|i).\end{aligned} \tag{9.28}$$

其中$|a;+\infty\rangle$是所有不同的本征态$|f)$的叠加态：

$$|a;+\infty\rangle=\sum_{f'}|f')(f'|a;+\infty\rangle. \tag{9.29}$$

$|(f'|a,+\infty\rangle|^2$是终态$|f')$在态$|a;+\infty\rangle$中实现的几率，也即是相互作用的量子场系统

---

〔注1〕 在这里，还必须假定当$t=\pm\infty$时，相互作用$H_I(t)$绝热地成为零，这样，初态和终态才可以表示为$H_0$的本征态。详见D. LURIE,《Particles and Fields》, pp. 212—214.

自$t=-\infty$时的已知初态$|i)$跃迁到$t=+\infty$时的终态$|f')$的跃迁几率：

$U(\infty,-\infty)$是当$t_0\to-\infty$，$t\to+\infty$时$U$矩阵的极限，称为$S$矩阵：

$$S=U(\infty,-\infty)=1+\sum_{n=1}^{\infty}S_n$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int d^4x_1\cdots\cdots\int d^4x_nT[\mathscr{H}_I(x_1)\cdots\cdots\mathscr{H}_I(x_n)] \qquad (9.30)$$

现在，跃迁几率幅$(f|a;+\infty)$可以通过$S$矩阵元来定义．由（9.28）和（9.29），我们有

$$\sum_{f'}|f')(f'|a;+\infty)=S|i),$$

以$(f|$左乘此式两边，并利用未微扰本征态的正交归一条件$(a|b)=\delta_{ab}$，就得到：

$$S_{fi}\equiv(f|S|i)=(f|a;+\infty). \qquad (9.31)$$

一个相互作用过程的跃迁几率幅又称为散射振幅或$S$矩阵元．

在（9.30）式里的积分是对整个四维时、空进行的，$\mathscr{H}_I(x)$一般都是Lorentz标量〔或者，总可以把$\mathscr{H}_I(x)$表示为Lorentz标量〕，并且时序乘积$T[\mathscr{H}_I(x_1)\cdots\mathscr{H}_I(x_n)]$具有Lorentz协变性，因此，（9.30）式具有Lorentz协变性．这就保证了微扰论的明显协变性．

原则上，我们可以计算一个过程的$S$矩阵元，并达到微扰级数（9.30）的任何一阶．但实际上，高阶项的计算工作量太大，只能计算领头的几项．由于（9.30）式右边的每一项都含有耦合常数$G$的幂，其中第$n$项含有$G^n$，因而当相互作用不强时，只要计算领头的几项就可以得到与实验数据相当符合的结果．例如，电磁作用便是如此．但对于强作用，微扰论就不能应用〔注1〕．

## §3 Wick定理

从（9.30）式看到，$S$矩阵的每一项$S_n$都是场算符时序乘积的积分，因而每一项都是粒子产生、湮灭算符的连乘积．每一项$S_n$对$S$矩阵元$S_{fi}=(f|S|i)$的贡献在于：它能湮灭初态$|i)$中的全部粒子，并产生终态$|f)$中的全部粒子．但在（9.30)式中，所有场算符都置于时序算符$T$之下，我们无法直观地看出$S_n$的上述物理作用，因而也不便于把$S$矩阵应用于具体的物理过程．本节的目的就是要把时序乘积分解为许多项正规乘积之和．这样，$S_n$也就被分解为许多项之和，在每一项里，产生算符总是置于湮灭算符之左边，因此，$S_n$的每一项的物理作用就都一目了然．Wick定理就提供了完成上述分解的具体方法．

---

〔注1〕 迄今为止，较有希望的强作用理论是QCD，由于QCD具有所谓"渐近自由"的性质，故在QCD里微扰论是有效的．

在讨论Wick定理之前，首先引入场算符的收缩这一概念。两个场算符$\phi_A(x)$、$\phi_B(y)$的收缩便是此二算符的时序乘积减去其正规乘积所得的差，记为$\overbrace{\phi_A(x)\phi_B}(y)$：

$$\overbrace{\phi_A(x)\phi_B}(y)=T[\phi_A(x)\phi_B(y)]-:\phi_A(x)\phi_B(y): \tag{9.32}$$

假定$t_x>t_y$（不失普遍性），则$T(\phi_A\phi_B)=\phi_A\phi_B$，我们有：

$$\overbrace{\phi_A\phi_B}=\phi_A^{(+)}\phi_B^{(-)}\pm\phi_B^{(-)}\phi_A^{(+)}, \tag{9.33}$$

此式右边第二项当$\phi_A$和$\phi_B$均为Fermi场算符时取正号，否则取负号。为方便起见，暂时把不等时反对易括号记为$[\quad]_+$，而对易括号记为$[\quad]_-$。于是，（9.33）式可重写为

$$\overbrace{\phi_A\phi_B}=[\phi_A^{(+)},\ \phi_B^{(-)}]_\pm, \tag{9.34}$$

因为场算符的不等时对易和反对易括号都是一些奇异的$c$函数，所以应用归一化条件$(0|0)=1$，可得

$$\overbrace{\phi_A\phi_B}=(0|[\phi_A^{(+)},\ \phi_B^{(-)}]_\pm|0), \tag{9.35}$$

考虑到$\phi_A^{(+)}|0)=\phi_B^{(+)}|0)=0$，以及原设$t_x>t_y$，上式又可写为：

$$\overbrace{\phi_A(x)\phi_B}(y)=(0|T[\phi_A(x)\phi_B(y)]|0). \tag{9.36}$$

不难证明，当$t_x<t_y$时，在（9.35）和（9.36）式里$\phi_A$与$\phi_B$的位置互换。从（9.36）式看到，两个场算符的收缩是一个两点Green函数。

下面讨论Wick的两条定理：

**Wick第一定理**　场算符的时序乘积等于它们的许多项正规乘积之和，在这些正规乘积里，以一切可能的方式包含着场算符的收缩，即有以下等式成立：

$$\begin{aligned}&T[\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\cdots\cdots\phi_N(x_N)]\\&=:\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\cdots\cdots\phi_N(x_N):\\&+\text{所有包含一个收缩的正规乘积}\ +\\&+\text{所有包含两个收缩的正规乘积}\ +\\&+\text{所有包含三个收缩的正规乘积}\ +\\&+\cdots\cdots.\end{aligned} \tag{9.37}$$

对于定理的严格证明有兴趣的读者，可参看朱洪元著《量子场论》，pp.190—195. 我们这里，利用（9.32）式进行一个粗略的论证。按照（9.32）式，对于一个场算符的情形显然应有

$$T\phi_1(x_1)=:\phi_1(x_1):\ ; \tag{9.38}$$

对于两个场算符$\phi_1(x_1)$、$\phi_2(x_2)$的情形，我们有（9.32）式：

$$T[\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)] = :\phi_1(x_1)\phi_2(x_2):$$
$$+ :\overbrace{\phi_1(x_1)\phi_2}(x_2): ; \tag{9.39}$$

再来看三个场算符$\phi_1(x_1)$、$\phi_2(x_2)$、$\phi_3(x_3)$的情形，为确定起见，假定$t_1>t_2>t_3$：

$$T[\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3)] \equiv T[\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)]\phi_3(x_3)$$
$$= :\phi_1(x_1)\phi_2(x_2):\phi_3(x_3) + \overbrace{\phi_1(x_1)\phi_2}(x_2)\phi_3(x_3) \tag{9.40}$$

此式右边第二项已等同于正规乘积，而第一项可分解为两项：$:\phi_1(x_1)\phi_2(x_2):\phi_3^{(+)}(x_3)$和$:\phi_1(x_1)\phi_2(x_2):\phi_3^{(-)}(x_3)$，其中前一项可直接写为正规乘积：$:\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3^{(+)}(x_3):$，而后一项与正规乘积之差为：

$$:\phi_1(x_1)\phi_2(x_2):\phi_3^{(-)}(x_3) - :\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3^{(-)}(x_3):$$
$$= \phi_1(x_1)\overbrace{\phi_2(x_2)\phi_3}(x_3) \pm \phi_2(x_2)\overbrace{\phi_1(x_1)\phi_3}(x_3), \tag{9.41}$$

其中，右边第二项当$\phi_1$、$\phi_2$、$\phi_3$均系Fermi场时取负号，均系Bose场时取正号．在推导(9.41)式时曾使用了(9.35)式和(6.3)式．把(9.41)代入(9.40)，并注意Fermi场算符在算符$T$和::之下的反对易性，即得：

$$T[\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3)] = :\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3):$$
$$+ :\phi_1(x_1)\overbrace{\phi_2(x_2)\phi_3}(x_3):$$
$$+ :\overbrace{\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3}(x_3):$$
$$+ :\overbrace{\phi_1(x_1)\phi_2}(x_2)\phi_3(x_3): \tag{9.42}$$

此式虽然是在$t_1>t_2>t_3$的假设下得到的，但当这三个时刻的迟早关系为任意时也同样成立，这是因为在算符$T$和::之下，Fermi场算符相互反对易，而Bose场算符与任何算符相互对易，所以无论对此式两边的场算符同时进行任何置换，两边或者同时变号，或者均不变号．以上，我们从(9.39)式出发推出了(9.42)式，用同样的方法，也可以从(9.38)式推出(9.39)式．因而可以确信：倘若(9.37)式对某个给定的正整数$N$成立，那么，它对正整数$N'=N+1$也同样成立．这样，就证明了Wick第一定理．

由于许多种相互作用的$\mathscr{H}_I(x)$均可表为正规乘积的形式，因而$S$矩阵里的时序乘积就是一些混合乘积，在每一项混合的时序乘积内又包含许多项正规乘积，而且每项正规乘积内的各个因子是属于同一时刻的场算符．对于$S$矩阵里的时序乘积又有以下分解定理：

**Wick第二定理**：一个上述的混合时序乘积，仍可按(9.37)式进行分解，但是在分解后的每一项正规乘积里均不包含如下场算符的收缩：这些算符处于原来时序乘积中的同一项正规乘积之内．

第二定理的证明是显然的．因为在上述的同一项正规乘积内的场算符无论怎样排列都满足时序的要求，所以按照(9.32)式，这些算符的收缩为零，在(9.37)式里，包含

这些算符的收缩的所有正规乘积均不出现。

Wick定理所提供的分解方法，事实上是把描写相互作用过程的因果性的一种方式转变为另一种方式。由（9.31）式知，$S$矩阵元是由给定的初态 $|i\rangle$ 跃迁到某一终态 $|f\rangle$ 的跃迁几率幅。当$S$矩阵里的算符乘积是时序乘积时〔见（9.30）式〕，在空间每点，较早时刻的Hamilton密度算符$\mathscr{H}_I$将对上述的跃迁过程较先做出贡献，这反映了量子场相互作用过程的因果性；另方面，当按Wick定理把$S$矩阵里的时序乘积分解为正规乘积时，可以明显看出：$S$矩阵的作用是先消失初态粒子而后产生终态粒子，从而实现由初态到终态的跃迁，这同样反映了相互作用过程的因果性，而且更为直观。除此以外，我们后面将会看到，由Wick分解所出现的收缩便是量子场的传播子，这些传播子的出现大大丰富了微扰论的内容。

## §4 $S$矩阵的正规乘积表示

在这一节里，我们把Wick第二定理具体应用于$S$矩阵。对于电磁相互作用的情形，以旋量场和电磁场的相互作用为例。由(8.12)$c$式和（8.119）式得到

$$\mathscr{H}_I(x) = -J_\mu(x)A_\mu(x) = -ie:\overline{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x):A_\mu(x) \tag{9.43}$$

因此，（9.30）式成为

$$S = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-e)^n}{n!}\int d^4x_1\cdots\cdots\int d^4x_n T\Big([:\overline{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1):A_\mu(x_1)]$$

$$\times[:\overline{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2):A_\nu(x_2)]\cdots\cdots[:\overline{\psi}(x_n)\gamma_\tau\psi(x_n):A_\tau(x_n)]\Big) \tag{9.44}$$

按照（9.35）或（9.36）式，应有：

$$\overbrace{\psi(x_k)A_\alpha}(x_m) = \overbrace{\overline{\psi}(x_k)A_\alpha}(x_m) = 0 \tag{9.45}$$

此式无论$x_k=x_m$或$x_k\neq x_m$均成立。这样，就可把(9.44)式的时序乘积做如下的Wick分解：

$$T\Big([:\overline{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1):A_\mu(x_1)]\cdots\cdots[:\overline{\psi}(x_n)\gamma_\tau\psi(x_n):A_\tau(x_n)]\Big)$$

$$=:\overline{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)\cdots\cdots\overline{\psi}(x_n)\gamma_\tau\psi(x_n)A_\mu(x_1)\cdots\cdots A_\tau(x_n):$$

＋所有包含一个收缩的正规乘积〔但其中没有包含$\overbrace{\psi(x_k)\overline{\psi}}(x_k)$和$\overbrace{\psi(x_k)A_\alpha}(x_m)$、$\overbrace{\overline{\psi}(x_k)A_\alpha}(x_m)$的正规乘积〕＋

＋所有包含两个收缩的正规乘积〔但其中没有包含$\overbrace{\psi(x_k)\overline{\psi}}(x_k)$和$\overbrace{\psi(x_k)A_\alpha}(x_m)$、$\overbrace{\overline{\psi}(x_k)A_\alpha}(x_m)$的正规乘积〕＋……　(9.46)

把（9.46）代入（9.44），对于 $n=1$，2的项，分别有：

$$S_1=-e\int d^4x_1:\overline{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)A_\mu(x_1): \tag{9.47}$$

以及

$$\begin{aligned}
S_2=\frac{(-e)^2}{2!}\int d^4x_1\int d^4x_2\Big\{&:\overline{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)A_\mu(x_1)A_\nu(x_2):\\
&+:\overline{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)\overbrace{A_\mu(x_1)A_\nu}(x_2):\\
&+:\overline{\psi}(x_1)\gamma_\mu\overbrace{\psi(x_1)\overline{\psi}}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)A_\mu(x_1)A_\nu(x_2):\\
&+:\overbrace{\overline{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi}(x_2)A_\mu(x_1)A_\nu(x_2):\\
&+:\overline{\psi}(x_1)\gamma_\mu\overbrace{\psi(x_1)\overline{\psi}}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)\overbrace{A_\mu(x_1)A_\nu}(x_2):\\
&+:\overbrace{\overline{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi}(x_2)\overbrace{A_\mu(x_1)A_\nu}(x_2):\\
&+:\overbrace{\overline{\psi}(x_1)\gamma_\mu\underbrace{\psi(x_1)\overline{\psi}}(x_2)\gamma_\nu\psi}(x_2)A_\mu(x_1)A_\nu(x_2):\\
&+:\overbrace{\overline{\psi}(x_1)\gamma_\mu\underbrace{\psi(x_1)\overline{\psi}}(x_2)\gamma_\nu\psi}(x_2)\overbrace{A_\mu(x_1)A_\nu}(x_2):\Big\}
\end{aligned} \tag{9.48}$$

此式中出现的收缩分别是电磁场和旋量场的传播子：

$$\begin{aligned}
\overbrace{A_\mu(x_1)A_\nu}(x_2)&=(0|T[A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)]|0)\\
&=\delta_{\mu\nu}D_F(x_1-x_2),\ \text{〔参见（7.97）}a\text{式〕}
\end{aligned} \tag{9.49}$$

$$\begin{aligned}
\overbrace{\psi(x_1)\overline{\psi}}(x_2)&=(0|T[\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)]|0)\\
&=S_F(x_1-x_2).\ \text{〔参见（6.89）}a\text{式〕}
\end{aligned} \tag{9.50}$$

对于强相互作用的情形，以中性赝标介子与核子的相互作用为例．由（8.45）$b$式和（8.114）式及其后面的叙述，我们有

$$\mathscr{H}_I(x)=-iG:\overline{\psi}(x)\gamma_5\psi(x):\phi(x), \tag{9.51}$$

因此，（9.30）式成为：

$$S=1+\sum_{n=1}^{\infty}S_n, \tag{9.52$a$}$$

其中，

$$\begin{aligned}
S_n=\frac{(-G)^n}{n!}\int d^4x_1\cdots\cdots\int d^4x_n\,T\Big\{&[:\overline{\psi}(x_1)\gamma_5\psi(x_1):\phi(x_1)]\\
\times[:\overline{\psi}(x_2)\gamma_5\psi(x_2):\phi(x_2)]&\cdots\cdots[:\overline{\psi}(x_n)\gamma_5\psi(x_n):\phi(x_n)]\Big\}.
\end{aligned} \tag{9.52$b$}$$

(9.52) 式与 (9.44) 式不同之处仅在于：后者的$\gamma_\mu$、$A_\mu$在前者则换成了$\gamma_5$、$\phi$，后者的$e$换成了前者的$G$．因而，类比于(9.47)和 (9.48)，可直接写出：

$$S_1=-G\int d^4x_1:\overline{\psi}(x_1)\gamma_5\psi(x_1)\phi(x_1): \tag{9.53}$$

$$\begin{aligned}S_2=\frac{(-G)^2}{2!}\int d^4x_1\int d^4x_2\Big\{&:\overline{\psi}(x_1)\gamma_5\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)\gamma_5\psi(x_2)\phi(x_1)\phi(x_2):\\
&+:\overline{\psi}(x_1)\gamma_5\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)\gamma_5\psi(x_2)\overbrace{\phi(x_1)\phi}(x_2):\\
&+:\overline{\psi}(x_1)\gamma_5\overbrace{\psi(x_1)\overline{\psi}}(x_2)\gamma_5\psi(x_2)\phi(x_1)\phi(x_2):\\
&+:\overbrace{\overline{\psi}(x_1)\gamma_5\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)\gamma_5\psi}(x_2)\phi(x_1)\phi(x_2):\\
&+:\overline{\psi}(x_1)\gamma_5\overbrace{\psi(x_1)\overline{\psi}}(x_2)\psi_5\psi(x_2)\overbrace{\phi(x_1)\phi}(x_2):\\
&+:\overbrace{\overline{\psi}(x_1)\gamma_5\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)\gamma_5\psi}(x_2)\overbrace{\phi(x_1)\phi}(x_2):\\
&+:\overbrace{\overline{\psi}(x_1)\gamma_5\underbrace{\psi(x_1)\overline{\psi}}(x_2)\gamma_5\psi}(x_2)\phi(x_1)\phi(x_2):\\
&+:\overbrace{\overline{\psi}(x_1)\gamma_5\underbrace{\psi(x_1)\overline{\psi}}(x_2)\gamma_5\psi}(x_2)\overbrace{\phi(x_1)\phi}(x_2):\Big\}\end{aligned} \tag{9.54}$$

式中的收缩$\overbrace{\psi(x_1)\overline{\psi}}(x_2)$便是 (9.50) 式给出的旋量粒子传播子，而收缩$\overbrace{\phi(x_1)\phi}(x_2)$则是中性赝标介子传播子：

$$\begin{aligned}\overbrace{\phi(x_1)\phi}(x_2)&=(0|T[\phi(x_1)\phi(x_2)]|0)\\
&=\Delta_F(x_1-x_2).\qquad \text{〔参见 (5.167) 式〕}\end{aligned} \tag{9.55}$$

对于弱相互作用，在$V-A$理论的范围内$S$矩阵的高阶项贡献为零（详见第十章），因而只要考虑一阶效应．我们有：

$$S_1=-i\int d^4x:\mathscr{H}_I(x): \tag{9.56}$$

## §5 Feynman图与Feynman规则

在上一节，我们借助Wick定理把$S$矩阵展式中的时序乘积分解为一系列正规乘积之和．在这一节里，要把这些正规乘积用适当的图形来表示．这样做不仅能使正规乘积的物理意义变得明显直观，而且可以在动量空间建立起图形与$S$矩阵元之间的对应关系．由此，就可按照给定的图形直接写出$S$矩阵元．这种用图形表示正规乘积的方法是R．P．Feynman在1949年提出来的，所以这些图形就称为Feynman图，而在动量空间按图形写出$S$矩阵元的法则就称为Feynman规则．

## （一）正规乘积的图表示

如第五章所述，QED是量子场论里发展得最早，而且与实验事实符合得最好的分支。由于这样，QED也是发展量子场论其它分支时可以借鉴的典范。所以我们这里从QED开始，再推广到其它。在QED里，用Feynman图来表示正规乘积的基本规则是：

（1）$S$矩阵展式中的积分变数 $x_k$（$k=1,2,\cdots n\cdots$）分别用平面图形上的一点来表示，这一点称为Feynman图的顶点。因为在每一项正规乘积内，具有相同变数$x_k$的每一组场算符都带有一个$\gamma$矩阵，故图中每一顶点均有一个$\gamma$矩阵。例如图9—1的顶点就有矩阵$\gamma_\alpha$（对$\alpha$求和）；另方面，由（9.44）和（9.46）式看出，具有$k$个积分变数的正规乘积，带有一个因子$(-e)^k$，因而图中每一顶点应有一个因子$(-e)$。

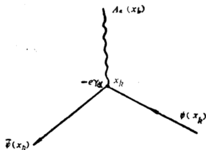



图9—1 正规乘积 $:\bar{\psi}(x_k)\gamma_\alpha\psi(x_k)A_\alpha(x_k):$的Fenman图

（2）在每一项正规乘积内，未被收缩的场算符称为自由算符。自由算符用图中的外线来表示，具体说来，自由的电磁场算符$A_\alpha(x_k)$用一条自顶点$x_k$延伸向无限远（或者自无限远延伸到顶点）的波线来表示；旋量场算符$\bar{\psi}(x_k)$用一条自顶点$x_k$指向无限远的有向线段来表示，而$\psi(x_k)$则用来自无限远，终于顶点$x_k$的有向线段来表示。这样，正规乘积$:\bar{\psi}(x_k)\gamma_\alpha\psi(x_k)A_\alpha(x_k):$所对应的Feynman图便是图9—1，它是一个三线顶角（一阶顶角），为了与别种相互作用的三线顶角相区别，又常称它为一阶光子顶角。

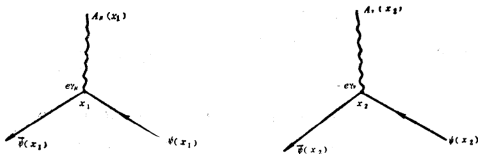
（3）在每一项正规乘积里所包含的收缩（即传播子），用一条连接两个顶点的内线来表示。其中，$\overbrace{A_\alpha(x_k)A_\lambda(x_m)}$用连接顶点$x_k$、$x_m$的波线来表示（见图9—2$a$）；$\overbrace{\psi(x_k)\bar{\psi}(x_m)}$用始于$x_m$点终于$x_k$点的有向线段表示（见图9—2$b$）。

$x_k$ $\overbrace{A_\alpha(x_k)A_\lambda(x_m)}$ $x_m$ （$a$）

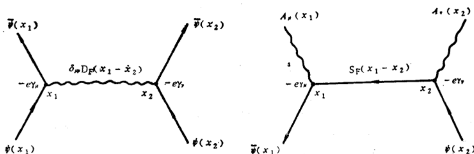
$x_k$ $\overbrace{\psi(x_k)\bar{\psi}(x_m)}$ $x_m$ （$b$）

图9—2

根据这些规则，（9.47）式右边积分号下的正规乘积所对应的图形便是图9—1，而（9.48）式右边积分号下的第一、二、三、五、七、八项正规乘积，其Feynman图分别是图9—3 $a$、$b$、$c$、$d$、$e$、$f$：

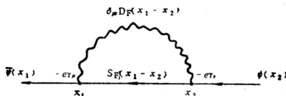



(a) 正规乘积：$:\bar\psi(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)\bar\psi(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)A_\mu(x_1)A_\nu(x_2):$ 的Feynman图

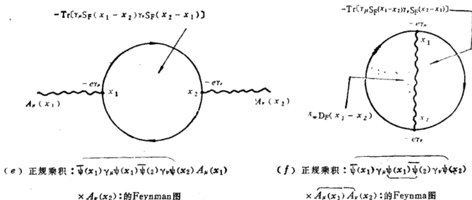



(b) 正规乘积：$:\bar\psi(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)\bar\psi(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)\overbrace{A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)}:$ 的Feynman图

(c) 正规乘积：$:\bar\psi(x_1)\gamma_\mu\overbrace{\psi(x_1)\bar\psi(x_2)}\gamma_\nu\psi(x_2)A_\mu(x_1)\times A_\nu(x_2):$ 的Feynman图




(d) 正规积乘：$:\bar\psi(x_1)\gamma_\mu\overbrace{\psi(x_1)\bar\psi(x_2)}\gamma_\nu\psi(x_2)\overbrace{A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)}:$ 的Feynman图




(*e*) 正规乘积：$\overline{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)A_\mu(x_1)$ $\times A_\nu(x_2)$：的Feynman图

(*f*) 正规乘积：$\overline{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)$ $\times A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)$：的Feynma图

图9—3　(9.48) 式右边第一、二、三、五、七、八项正规乘积的Feynman图

(9.48) 式右边第四、六两项正规乘积分别与第三、五两项正规乘积等效。现在来证明第四项与第三项的等效性．根据 (9.42) 式后面的叙述，我们有：

$$:\overline{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)A_\mu(x_1)A_\nu(x_2):$$

$$=:\overline{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)\overline{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)A_\mu(x_1)A_\nu(x_2):$$

$x_1$、$x_2$是(9.48)式里的积分变数

$$=:\overline{\psi}(x_1)\gamma_\nu\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)\gamma_\mu\psi(x_2)A_\mu(x_2)A_\nu(x_1):$$

$$=:\overline{\psi}(x_1)\gamma_\nu\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)\gamma_\mu\psi(x_2)A_\nu(x_1)A_\mu(x_2):$$

$$=:\overline{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)A_\mu(x_1)A_\nu(x_2):$$

由此可见，(9.48) 式的第四项正规乘积的确与其第三项正规乘积等效．因此，第四项正规乘积的Feynman图便是图 9 — 3 *c*．请读者自己证明 (9.48) 式右边第六项正规乘积与其第五项正规乘积等效，它的Feynman图便是图 9 — 3 *d*．

为了弄清Feynman图的物理意义，首先来谈谈图中不同内线和外线的物理意义．因为我们是在 *i* 图景中工作，场算符有精确的平面波展开式，因而利用自由场的已知结果可得：

$$\psi(x)=\psi^{(+)}(x)+\psi^{(-)}(x), \tag{9.57a}$$

$$\overline{\psi}(x)=\overline{\psi}^{(+)}(x)+\overline{\psi}^{(-)}(x), \tag{9.57b}$$

$$A_\mu(x)=A_\mu^{(+)}(x)+A_\mu^{(-)}(x). \tag{9.57c}$$

其中，

$$\psi^{(+)}(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{s=1}^{2}\sqrt{\frac{m}{E_k}}c_{\mathbf{k}s}u_{\mathbf{k}s}e^{ik\cdot x}, \tag{9.58a}$$

$$\psi^{(-)}(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{s=1}^{2}\sqrt{\frac{m}{E_k}}d_{\mathbf{k}s}^{+}v_{\mathbf{k}s}e^{-ik\cdot x}, \tag{9.58b}$$

$$\overline{\psi}^{(+)}(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{s=1}^{2}\sqrt{\frac{m}{E_k}}d_{\mathbf{k}s}\overline{v}_{\mathbf{k}s}e^{ik\cdot x},\tag{9.58c}$$

$$\overline{\psi}^{(-)}(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{s=1}^{2}\sqrt{\frac{m}{E_k}}c_{\mathbf{k}s}^{+}\overline{u}_{\mathbf{k}s}e^{-ik\cdot x},\tag{9.58d}$$

$$A_{\mu}^{(+)}(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}}\sum_{\lambda=1}^{4}e_{\mathbf{k}\lambda}^{\mu}a_{\mathbf{k}\lambda}e^{ik\cdot x},\tag{9.58e}$$

$$A_{\mu}^{(-)}(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}}\sum_{\lambda=1}^{4}e_{\mathbf{k}\lambda}^{\mu}\overline{a}_{\mathbf{k}\lambda}e^{-ik\cdot x}.\tag{9.58f}$$

由此看到，场算符的正频率部分的作用是湮灭粒子或反粒子，而负频率部分是产生粒子或反粒子。所以我们又把正频率部分称为场算符的湮灭部分，而负频率部分称为产生部分。这样，在Feynman图里，来自无限远并终于顶点$x$的外线$\psi(x)$便代表反应过程之前存在旋量粒子，或反应过程终了产生反旋量粒子；而自顶点指向无限远的外线$\overline{\psi}(x)$代表反应前存在反旋量粒子，或反应后产生旋量粒子；同样地，自顶点延伸向无限远的波线$A_\mu(x)$代表反应前存在光子或反应后产生光子。Feynman 图里的内线则表示虚粒子的传播过程。例如，旋量粒子传播子表示旋量粒子或反粒子的虚传播过程。正如第五章所述，这些虚过程是观察不到的，它们与真空物质的运动有关。

现在，我们可以对图 9—1 和 9—3 进行适当的解释了。$S$矩阵展式中的第 $n$ 项$S_n$对粒子相互作用过程的贡献称为所论过程的 $n$ 阶效应，习惯上又常常把 $n$ 阶效应所导致的反应过程称为 $n$ 阶过程。图 9—1 代表一阶电磁过程。可把它解释为正、负电子对相互碰撞而湮灭为一个光子。或一个光子产生正、负电子对等等。但读者可以自行证明，这种一阶电磁过程是不能实现的，因为这些过程不能同时满足能量守恒定律和动量守恒定律，以致相应的$S$矩阵元为零。图 9—3 是一些二阶电磁过程。但图 9—3 $a$ 是两个一阶电磁过程的简单组合，因而同样是一个在客观上不能实现的过程。图 9—3 $b$ 可解释为电子—电子散射（或正电子--正电子散射、正电子—电子散射等等）。两个电子$\psi(x_1)$和$\psi(x_2)$相互碰撞，$\psi(x_1)$自顶点$x_1$放射虚光子〔由内线$\delta_{\mu\nu}D_F(x_1-x_2)$代表〕，而$\psi(x_2)$在顶点$x_2$处吸收了这个虚光子；反之，$\psi(x_2)$也放射虚光子被$\psi(x_1)$吸收。两个电子之间的电磁力就是通过交换虚光子来传递的。传递虚光子的过程也就是两个电子$\psi(x_1)$和$\psi(x_2)$相互作用的过程。经过相互作用，它们转化为具有新的能量、动量和极化的终态电子，分别由图中的$\overline{\psi}(x_1)$和$\overline{\psi}(x_2)$两条外线代表。图 9—3 $c$可解释为Compton散射（或电子—正电子对湮灭为两个光子，等等），即光子被电子散射，初态电子$\psi(x_2)$在$x_2$点吸收了初态光子$A_\nu(x_2)$，然后虚拟地传播到顶点$x_1$并放出终态光子$A_\mu(x_1)$，生成终态电子$\overline{\psi}(x_1)$。图 9—3 $d$、$e$、$f$分别是电子自能、光子自能（又称真空极化）以及真空涨落过程的Feynman图。详细情况将在下一小节讨论。应当说明，我们这里的解释是不完全的，其中的旋量场算符也并非只代表电子—正电子场，它可以代表任何一种带电的旋量粒子—反粒子的场。

弄清了Feynman图的物理意义，也就同时知道相应正规乘积对那些相互作用过程有贡献，这对于计算$S$矩阵无是必须的。

### （二）$S$矩阵元与Feynman图的对应关系

在这一小节里将计算几个二阶电磁过程的$S$矩阵元，并建立起这些$S$矩阵元与Feynman图的对应关系。

**$e^-e^- \longrightarrow e^-e^-$散射（Møller散射）**

反应前有两个初态电子，反应后产生两个终态电子．因此，相互作用场系统的初态和终态分别是：

$$c^+_{\mathbf{p}s_1}\, c^+_{\mathbf{q}s_2}|\,0\,) = |i),$$

$$c^+_{\mathbf{p}'s'_1}\, c^+_{\mathbf{q}'s'_2}|\,0\,) = |f).$$

其中，$\mathbf{p}$、$s_1$和$\mathbf{q}$、$s_2$分别是两个初态电子的动量和极化，而$\mathbf{p}'$、$s'_1$和$\mathbf{q}'$、$s'_2$分别是两个终态电子的动量和极化．因为我们只考虑二阶近似，故过程的$S$矩阵元为

$$S_{fi} \cong (f|S_2|i). \tag{9.59}$$

$S_2$由（9.48）式给出．经过简单推算即可看出：（9.48）式右边积分号下的第二项正规乘积恰能湮灭两个初态电子并产生两个终态电子，而其余正规乘积对电子—电子散射过程贡献为零．第二项正规乘积的Feynman图便是图 9 — 3 $b$．该项正规乘积及其图表示并不仅仅描写电子—电子散射．事实上，利用（9.57）式又可把正规乘积

$$:\overline{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)\overbrace{A_\mu(x_1)A_\nu}(x_2):$$

展开为十六项正规乘积之和，其中对电子—电子散射过程有非零贡献的正规乘积又只有如下的一项：

$$:\overline{\psi}^{(-)}(x_1)\gamma_\mu\psi^{(+)}(x_1)\overline{\psi}^{(-)}(x_2)\gamma_\nu\psi^{(+)}(x_2)\overbrace{A_\mu(x_1)A_\nu}(x_2): \tag{9.60}$$

我们首先来计算此项正规乘积的矩阵元，利用（9.58）式得

$$(\,0|\,c_{\mathbf{q}'s'_2}c_{\mathbf{p}'s'_1}:\overline{\psi}^{(-)}(x_1)\gamma_\mu\psi^{(+)}(x_1)\overline{\psi}^{(-)}(x_2)\gamma_\nu\psi^{(+)}(x_2)\overbrace{A_\mu(x_1)A_\nu}(x_2):c^+_{\mathbf{p}s_1}c^+_{\mathbf{q}s_2}|0\,)$$

$$= (\,0|\,c_{\mathbf{q}'s'_2}c_{\mathbf{p}'s'_1}:\Big\{\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}s}\sqrt{\frac{m}{E_k}}c^+_{\mathbf{k}s}\,\overline{u}_{\mathbf{k}s}\,e^{-ik\cdot x_1}\Big\}\gamma_\mu\Big\{\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}s}\sqrt{\frac{m}{E_k}}c_{\mathbf{k}s}u_{\mathbf{k}s}e^{ik\cdot x_1}\Big\}$$

$$\times\Big\{\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}s}\sqrt{\frac{m}{E_k}}c^+_{\mathbf{k}s}\,\overline{u}_{\mathbf{k}s}e^{-ik.x_2}\Big\}\gamma_\nu\Big\{\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}s}\sqrt{\frac{m}{E_k}}c_{\mathbf{k}s}u_{\mathbf{k}s}e^{ik\cdot x_2}\Big\}:c^+_{\mathbf{p}s_1}\,c^+_{\mathbf{q}s_2}|\,0\,)$$

$$\times\overbrace{A_\mu(x_1)A_\nu}(x_2) = \frac{1}{V^2}(\,0|\,c_{\mathbf{q}'s'_2}c_{\mathbf{p}'s'_1}$$

$$\times:\Big\{\Big[\sqrt{\frac{m}{E_{p'}}}c^+_{\mathbf{p}'s'_1}\,\overline{u}_{\mathbf{p}'s'_1}e^{-ip'\cdot x_1} + \sqrt{\frac{m}{E_{q'}}}c^+_{\mathbf{q}'s'_2}\,\overline{u}_{\mathbf{q}'s'_2}e^{-iq'\cdot x_1}\Big]\gamma_\mu$$

$$\times\left(\sqrt{\frac{m}{E_p}}c_{ps_1}u_{ps_1}e^{ip\cdot x_1}+\sqrt{\frac{m}{E_q}}c_{qs_2}u_{qs_2}e^{iq\cdot x_1}\right)$$

$$+\left(\sqrt{\frac{m}{E_{p'}}}c^+_{p's'_1}\overline{u}_{p's'_1}e^{-ip'\cdot x_2}+\sqrt{\frac{m}{E_{q'}}}c^+_{q's'_2}\overline{u}_{q's'_2}e^{-iq'\cdot x_2}\right)\gamma_\nu$$

$$\times\left(\sqrt{\frac{m}{E_p}}c_{ps_1}u_{ps_1}e^{ip\cdot x_2}+\sqrt{\frac{m}{E_q}}c_{qs_2}u_{qs_2}e^{iq\cdot x_2}\right)\Big\}:c^+_{ps_1}c^+_{qs_2}|0)$$

$$\times\overline{A_\mu(x_1)A}_\nu(x_2). \tag{9.61}$$

此式右边的正规乘积:{……}:可以表示为由$c$、$c^+$组成的十六项正规乘积的组合，其中，有十二项正规乘积里包含有相同的算符．例如，

$$:c^+_{p's'_1}c_{ps_1}c^+_{p's'_1}c_{ps_1}:,$$

这样的正规乘积其矩阵元皆为零：

$$(0|c_{q's'_2}c_{p's'_1}:c^+_{p's'_1}c_{ps_1}c^+_{p's'_1}c_{ps_1}:c^+_{ps_1}c^+_{qs_2}|0)$$

$$=-(0|c_{q's'_2}c_{p's'_1}c^+_{p's'_1}c^+_{p's'_1}c_{ps_1}c_{ps_1}c^+_{ps_1}c^+_{qs_2}|0)=0. \tag{9.62}$$

这里曾使用了Fermi场正规乘积的定义（6.20）和反对易关系（6.8）．另外的四项正规乘积不包含相同的算符，它们的矩阵元或者为＋1，或者为－1：

$$(0|c_{q's'_2}c_{p's'_1}:c^+_{p's'_1}c_{ps_1}c^+_{q's'_2}c_{qs_2}:c^+_{ps_1}c^+_{qs_2}|0)$$

$$=(0|c_{q's'_2}c^+_{q's'_2}c_{p's'_1}c^+_{p's'_1}c_{ps_1}c^+_{ps_1}c_{qs_2}c^+_{qs_2}c|0)=+1 \tag{9.63a}$$

同样可得：

$$(0|c_{q's'_2}c_{p's'_1}:c^+_{p's'_1}c_{qs_2}c^+_{q's'_2}c_{ps_1}:c^+_{ps_1}c^+_{qs_2}|0)=-1, \tag{9.63b}$$

$$(0|c_{q's'_2}c_{p's'_1}:c^+_{q's'_2}c_{ps_1}c^+_{p's'_1}c_{qs_2}:c^+_{ps_1}c^+_{qs_2}|0)$$

$$=-1, \tag{9.63c}$$

$$(0|c_{q's'_2}c_{p's'_1}:c^+_{q's'_2}c_{qs_2}c^+_{p's'_1}c_{ps_1}:c^+_{ps_1}c^+_{qs_2}|0)$$

$$=+1. \tag{9.63d}$$

因此，在（9.61）式右边共有四个非零项．在每一个非零项里，归一化因子、旋量振幅等等是依照与之相关的算符$c$和$c^+$在正规乘积符号：：下的排列顺序出现的，因而利用（9.63）式可把（9.61）式简化为：

$$(0|c_{q's'_2}c_{p's'_1}:\overline{\psi}^{(-)}(x_1)\gamma_\mu\psi^{(+)}(x_1)\overline{\psi}^{(-)}(x_2)\gamma_\nu\psi^{(+)}(x_2):c^+_{ps_1}c^+_{qs_2}|0)$$

$$\times\overline{A_\mu(x_1)A}_\nu(x_2)=\frac{1}{V^2}\left(\frac{m^4}{E_{p'}E_pE_{q'}E_q}\right)^{1/2}$$

$$\times\Big\{\overline{u}_{p's'_1}\gamma_\mu u_{ps_1}\overline{u}_{q's'_2}\gamma_\nu u_{qs_2}e^{-ip'\cdot x_1+ip\cdot x_1}e^{-iq'\cdot x_2+iq\cdot x_2}$$

$$+\overline{u}_{q's_2'}\gamma_\mu u_{qs_2}\overline{u}_{p's_1'}\gamma_\nu u_{ps_1}e^{-iq'\cdot x_1+iq\cdot x_1}e^{-ip'\cdot x_2+ip\cdot x_2}$$

$$-\overline{u}_{p's_1'}\gamma_\mu u_{qs_2}\overline{u}_{q's_2'}\gamma_\nu u_{ps_1}e^{-ip'\cdot x_1+iq\cdot x_1}e^{-iq'\cdot x_2+ip\cdot x_2}$$

$$-\overline{u}_{q's_2'}\gamma_\mu u_{ps_1}\overline{u}_{p's_1'}\gamma_\nu u_{qs_2}e^{-iq'\cdot x_1+ip\cdot x_1}e^{-ip'\cdot x_2+iq\cdot x_2}\Big\}$$

$$\times\overbrace{A_\mu(x_1)A_\nu}(x_2). \tag{9.64}$$

现在，把（9.48）右边第二项积分代入（9.59），并利用（9.64）式得

$$S_{fi}\cong(0|c_{q's_2'}c_{p's_1'}S_2\,c^+_{ps_1}c^+_{qs_2}|0)$$

$$=\frac{1}{V^2}\left(\frac{m^4}{E_{p'}E_pE_{q'}E_q}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{e^2}{2!}\int d^4x_1\int d^4x_2\Big\{\cdots\cdots\Big\}\overbrace{A_\mu(x_1)A_\nu}(x_2). \tag{9.65}$$

此式右边的花括号与（9.64）式右边的花括号全同．可以证明，右边第一、二项积分相互等效，第三、四项积分相互等效，这样，就可将它们两两相加并消去（9.65）式右边积分号前的因子$\frac{1}{2!}$：

$$S_{fi}\cong(0|c_{q's_2'}c_{p's_1'}\,S_2c^+_{ps_1}c^+_{qs_2}|0)$$

$$=e^2\frac{1}{V^2}\left(\frac{m^4}{E_{p'}E_pE_{q'}E_q}\right)^{\frac{1}{2}}\int d^4x_1\int d^4x_2\Big\{\overline{u}_{p's_1'}\gamma_\mu u_{ps_1}\overline{u}_{q's_2'}\gamma_\nu u_{qs_2}$$

$$\times e^{-ip'\cdot x_1+ip\cdot x_1}e^{-iq'\cdot x_2+iq\cdot x_2}$$

$$-\overline{u}_{q's_2'}\gamma_\mu u_{ps_1}\overline{u}_{p's_1'}\gamma_\nu u_{qs_2}e^{-iq'\cdot x_1+ip\cdot x_1}e^{-ip'\cdot x_2+iq\cdot x_2}\Big\}$$

$$\times\overbrace{A_\mu(x_1)A_\nu}(x_2). \tag{9.66}$$

把$\overbrace{A_\mu(x_1)A_\nu}(x_2)=D_{F\mu\nu}(x_1-x_2)$之表示式（7.97）代入上式并完成对时空坐标的积分，就得到

$$S_{fi}\cong(0|c_{q's_2'}c_{p's_1'}\,S_2c^+_{ps_1}c^+_{qs_2}|0)=\mathrm{A}+\mathrm{B}, \tag{9.67}$$

其中，

$$\mathrm{A}=e^2\frac{1}{V^2}\left(\frac{m^4}{E_{p'}E_pE_{q'}E_q}\right)^{\frac{1}{2}}\int d^4k(2\pi)^4\delta^{(4)}(p'-p-k)$$

$$\times(2\pi)^4\delta^{(4)}(q'-q+k)\overline{u}_{p's_1'}\gamma_\mu u_{ps_1}\left[\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{-i\delta_{\mu\nu}}{k^2}\right]\overline{u}_{q's_2'}\gamma_\nu u_{qs_2}, \tag{9.68a}$$

$$\mathrm{B}=-e^2\frac{1}{V^2}\left(\frac{m^4}{E_{p'}E_pE_{q'}E_q}\right)^{\frac{1}{2}}\int d^4k(2\pi)^4\delta^{(4)}(q'-p-k)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p'-q+k)$$

$$\times\overline{u}_{q's_2'}\gamma_\mu u_{ps_1}\left[\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{-i\delta_{\mu\nu}}{k^2}\right]\overline{u}_{p's_1'}\gamma_\nu u_{qs_2} \tag{9.68b}$$

如前所述，对所论过程的二阶近似$S$矩阵元（9.67）有贡献的正规乘积是（9.60）

式的正规乘积，该项正规乘积的 Feynman 图便是图 9—3$b$。现在就来建立（9.67）右边的A、B两项与图 9—3$b$的对应关系。在图 9—3$b$中的顶点坐标 $x_1$、$x_2$ 是$S$矩阵元里的积分变数，在完成（9.66）式的积分之后，分别得到（9.68)$a$中的因子 $(2\pi)^4 \times \delta^{(4)}(p'-p-k)$和$(2\pi)^4\delta^{(4)}(q'-q+k)$以及(9.68)$b$中的因子$(2\pi)^4\delta^{(4)}(q'-p-k)$和$(2\pi)\delta^{(4)}(p'-q+k)$，因此，这些因子应属于Feynman图的顶点。结合第（一）小节所叙述的Feynman图规则，不难看到，在（9.68)$a$所对应的Feynman图里，与两个顶点相关的因子分别是：

$$-e\gamma_\mu(2\pi)^4\delta^{(4)}(p'-p-k),$$
$$-e\gamma_\nu(2\pi)^4\delta^{(4)}(q'-q+k),$$

而在（9.68)$b$所对应的Feynman图里，与两个顶点相关的因子分别是：

$$-e\gamma_\mu(2\pi)^4\delta^{(4)}(q'-p-k),$$
$$-e\gamma_\nu(2\pi)^4\delta^{(4)}(p'-q+k).$$

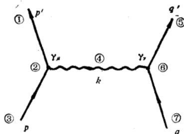
正规乘积（9.60）中的自由算符，在计算矩阵元$(f|S_2|i)$之值并进行积分$\int d^4x_1\int d^4x_2$之后，还剩下归一化因子和旋量振幅：

$$\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{E_p}}u_{ps_1}、\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{E_q}}u_{qs_2}、\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{E_{p'}}}\bar{u}_{p's'_1}、\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{E_{q'}}}\bar{u}_{q's'_2},$$

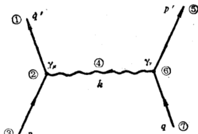
故这些因子就与Feynman图里的外线对应。（9.60）式里的传播子$\overline{A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)}$在对时、空坐标积分后，还剩下$\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\cdots\cdots\frac{-i\delta_{\mu\nu}}{k^2}\cdots\cdots$，因此，在$S$矩阵元所对应的Feynman图里，内线代表动量空间的传播子$\frac{-i\delta_{\mu\nu}}{k^2}$，并表示要对矩阵元进行积分$\frac{1}{(2\pi)^4}\times\int d^4k$。综上所述，$S$矩阵元（9.67）与Feynman图的对应关系可以直观地表示如下：

$$\begin{aligned}A=&\underbrace{\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k}_{④}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{E_{p'}}}\bar{u}_{p's'_1}}_{①}\underbrace{\left\{-e\gamma_\mu(2\pi)^4\delta^{(4)}(p'-p-k)\right\}}_{②}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{E_p}}u_{ps_1}}_{③}\\&\times\underbrace{\left(\frac{-i\delta_{\mu\nu}}{k^2}\right)}_{④}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{E_{q'}}}\bar{u}_{q's'_2}}_{⑤}\underbrace{\left\{-e\gamma_\nu(2\pi)^4\delta^{(4)}(q'-q+k)\right\}}_{⑥}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{E_q}}u_{qs_2}}_{⑦},\end{aligned}\tag{9.69a}$$

$$\begin{aligned}B=&\underbrace{-\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k}_{④}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{E_{q'}}}\bar{u}_{q's'_2}}_{①}\underbrace{\left\{-e\gamma_\mu(2\pi)^4\delta^{(4)}(q'-p-k)\right\}}_{②}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{E_p}}u_{ps_1}}_{③}\\&\times\underbrace{\left(\frac{-i\delta_{\mu\nu}}{k^2}\right)}_{④}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{E_{p'}}}\bar{u}_{p's'_1}}_{⑤}\underbrace{\left\{-e\gamma_\nu(2\pi)^4\delta^{(4)}(p'-q+k)\right\}}_{⑥}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{E_q}}u_{qs_2}}_{⑦}.\end{aligned}\tag{9.69b}$$



（a）矩阵元A的图对应



（b）矩阵元B的图对应

图9—4

在图9—4里，旋量振幅（外线）和传播子（内线）均分别用相应的四维动量来标记，而顶角则用相应的γ矩阵来标记．以后也将采用这种简单记法．

最后要谈谈在MØller散射中由于两个终态电子的全同性所产生的效应（两个初态电子也具有全同性，但因在实验上入射粒子的动量已事先确定，所以两个初态电子是可以区分的），这一效应就是使得散射过程的二阶$S$矩阵元包括两项：直接散射项A和交换散射项B．把（9.69）$a$与（9.69）$b$比较可知，只要在A的表示式（9.69）$a$里把两个终态电子的旋量振幅、相应的动量、极化和归一化因子一起交换，并改变全式的符号，就得到B的表示式（9.69）$b$．符号的改变是由Fermi统计规律决定的．与此相应，与$S$矩阵元对应的Feynman图也有两个，即图9—4 $a$、$b$，只要在图$a$里把两个终态电子的动量、极化一起交换，就得到图$b$．

**$e^+e^-$——$e^+e^-$散射（Bhabha散射）：**

反应前存在一个初态电子和一个初态正电子，反应后，产生一个终态电子和一个终态正电子．相互作用场系统的初态和终态分别是

$$c^+_{ps_1}\,d^+_{qs_2}\,|0\rangle=|i\rangle,$$

和

$$c^+_{p's'_1}\,d^+_{q's'_2}\,|0\rangle=|f\rangle.$$

（这里$c^+$、$c$是电子产生、湮灭算符，$d^+$、$d$是正电子产生、湮灭算符）

过程的$S$矩阵元为

$$S_{fi}\cong\langle f|S_2|i\rangle. \tag{9.70}$$

对这一过程有贡献的正规乘积仍然是（9.48）式右边积分号下的第二项．如前所述，这一项正规乘积又可展开为十六项正规乘积，其中对$e^+e^-$散射有贡献的是以下四项：

$$:\overline{\psi}^{(-)}(x_1)\gamma_\mu\psi^{(+)}(x_1)\overline{\psi}^{(+)}(x_2)\gamma_\nu\psi^{(-)}(x_2)\overbrace{A_\mu(x_1)A_\nu}(x_2):$$

$$:\overline{\psi}^{(+)}(x_1)\gamma_\mu\psi^{(-)}(x_1)\overline{\psi}^{(-)}(x_2)\gamma_\nu\psi^{(+)}(x_2)\overbrace{A_\mu(x_1)A_\nu}(x_2):$$

$$:\overline{\psi}^{(+)}(x_1)\gamma_\mu\psi^{(+)}(x_1)\overline{\psi}^{(-)}(x_2)\gamma_\nu\psi^{(-)}(x_2)\overbrace{A_\mu(x_1)A_\nu}(x_2):$$

$$:\overline{\psi}^{(-)}(x_1)\gamma_\mu\psi^{(-)}(x_1)\overline{\psi}^{(+)}(x_2)\gamma_\nu\psi^{(+)}(x_2)\overbrace{A_\mu(x_1)A_\nu}(x_2):$$

这四项正规乘积中的第一、二两项等效，第三、四两项等效，因此，只须计算其中的两项（例如第一、四两项）并将（9.48）式右边第二项积分号前的因子$\frac{1}{2}$消去：

$$(f|S_2|i)=(f|e^2\int d^4x_1\int d^4x_2\Big\{:\overline{\psi}^{(-)}(x_1)\gamma_\mu\psi^{(+)}(x_1)\overline{\psi}^{(+)}(x_2)\gamma_\nu\psi^{(-)}(x_2)$$

$$\times\overbrace{A_\mu(x_1)A_\nu}(x_2):+:\overline{\psi}^{(-)}(x_1)\gamma_\mu\psi^{(-)}(x_1)\overline{\psi}^{(+)}(x_2)\gamma_\nu\psi^{(+)}(x_2)\overbrace{A_\mu(x_1)A_\nu}(x_2):\Big\}|i)$$

$$=e^2\int d^4x_1\int d^4x_2(f|:\overline{\psi}^{(-)}(x_1)\gamma_\mu\psi^{(+)}(x_1)\overline{\psi}^{(+)}(x_2)\gamma_\nu\psi^{(-)}(x_2)\overbrace{A_\mu(x_1)A_\nu}(x_2):$$

$$+:\overline{\psi}^{(-)}(x_1)\gamma_\mu\psi^{(-)}(x_1)\overline{\psi}^{(+)}(x_2)\gamma_\nu\psi^{(+)}(x_2)\overbrace{A_\mu(x_1)A_\nu}(x_2):|i),$$

或者将上式写为：

$$S_{fi}\triangleq(f|S_2|i)=\mathrm{A}+\mathrm{B}\tag{9.71}$$

其中，

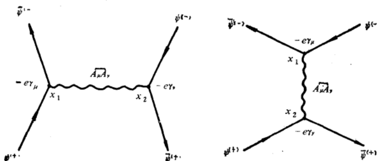
$$\mathrm{A}=e^2\int d^4x_1\int d^4x_2(f|:\overline{\psi}^{(-)}(x_1)\gamma_\mu\psi^{(+)}(x_1)\overline{\psi}^{(+)}(x_2)\gamma_\nu\psi^{(-)}(x_2):|i)$$

$$\times\overbrace{A_\mu(x_1)A_\nu}(x_2),\tag{9.72a}$$

$$\mathrm{B}=e^2\int d^4x_1\int d^4x_2(f|:\overline{\psi}^{(-)}(x_1)\gamma_\mu\psi^{(-)}(x_1)\overline{\psi}^{(+)}(x_2)\gamma_\nu\psi^{(+)}(x_2):|i)$$

$$\times\overbrace{A_\mu(x_1)A_\nu}(x_2).\tag{9.72b}$$

以上两式右边积分号下的两项正规乘积的Feynman图分别是图 9 — 5 $a$、$b$。




（$a$）正规乘积：$\overline{\psi}^{(-)}(x_1)\gamma_\mu\psi^{(+)}(x_1)\times\overline{\psi}^{(+)}(x_2)\gamma_\nu\psi^{(-)}(x_2):\overbrace{A_\mu(x_1)A_\nu}(x_2)$的Feynman图

（$b$）正规乘积：$\overline{\psi}^{(-)}(x_1)\gamma_\mu\psi^{(-)}(x_1)\times\overline{\psi}^{(+)}(x_2)\gamma_\nu\psi^{(+)}(x_2):\overbrace{A_\mu(x_1)A_\nu}(x_2)$的Feynman图

图 9 — 5

大体重复自（9.61）式到（9.69）式的推算和讨论就得到（9.71）式右边的两项分别与图 9 — 5 $a$、$b$的对应关系如下：

$$A = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{E_{p'}}}\bar{u}_{p's'_1}\left\{-e\gamma_\mu(2\pi)^4\delta^{(4)}(p'-p-k)\right\}\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{E_p}}u_{ps_1}$$

④ ① ② ③

$$\times\left(\frac{-i\delta_{\mu\nu}}{k^2}\right)\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{E_q}}\bar{v}_{qs_2}\left\{-e\gamma_\nu(2\pi)^4\delta^{(4)}(q'-q+k)\right\}\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{E_{q'}}}v_{q's'_2}$$

④ ⑤ ⑥ ⑦

$$(9.73)a$$

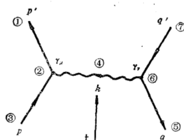
$$B = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{E_{p'}}}\bar{u}_{p's'_1}\left\{-e\gamma_\mu(2\pi)^4\delta^{(4)}(p'+q'-k)\right\}\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{E_{q'}}}v_{q's'_2}$$

④ ① ② ③

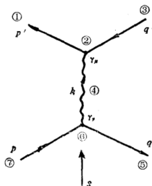
$$\times\left(\frac{-i\delta_{\mu\nu}}{k^2}\right)\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{E_q}}\bar{v}_{qs_2}\left\{-e\gamma_\nu(2\pi)^4\delta^{(4)}(p+q-k)\right\}\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{E_p}}u_{ps_1}$$

④ ⑤ ⑥ ⑦

$$(9.73)b$$




（a）矩阵元A的图对应




（b）矩阵元B的图对应

图 9—6

由此可见，$e^+e^-\longrightarrow e^+e^-$散射过程是通过两种类型的反应来实现的：矩阵元A及其对应的Feynman图 9—6 $a$所描写的反应是散射型反应，称为$e^+e^-\longrightarrow e^+e^-$过程的散射道，在这种反应过程里，初态电子$(p, s_1)$和初态正电子$(q, s_2)$相互交换虚光子，而后转变为终态电子$(p', s'_1)$和终态正电子$(q', s'_2)$；矩阵元B及其对应的Feynman图 9—6 $b$所描写的反应是湮灭型反应，称为$e^+e^-\longrightarrow e^+e^-$过程的湮灭道，在这种反应过程里，初态电子$(p, s_1)$和初态正电子$(q, s_2)$虚拟地湮灭为光子$(k, \lambda)$，然后这个虚光子又转化为终态电子$(p', s'_1)$和终态正电子$(q', s'_2)$。因为在(9.73)$a$式里的光子传播子$\sim\frac{1}{t}$，这里，

$$t = -(p'-p)^2 = -(q'-q)^2, \qquad (9.74)a$$

而在 (9.73)$b$式里，光子传播子$\sim\frac{1}{s}$

$$s=-(p+q)^2=-(p'+q')^2, \tag{9.74}b$$

故散射道又简称“t 道”，湮灭道又简称“s 道”．可以证明（作为练习），从适当的参考系里看来，在 t 道的反应过程里，虚光子传递动量，因而两个初态粒子在相互碰撞时彼此之间有电磁力作用；而在 s 道的反应里，虚光子携带能量，因而两个初态粒子碰撞的结果是发生物质和能量的虚转化。

**eγ⟶eγ散射（Compton散射）**

反应前存在初态电子(p,s)和初态光子(k,λ)，反应后产生终态电子 (p′,s′) 和终态光子(k′,λ′)．相互作用场的初态和终态分别为：

$$\left.\begin{array}{l} c_{ps}^{+}\,a_{k\lambda}^{+}|0\rangle=|i\rangle, \\ c_{p's'}^{+}\,a_{k'\lambda'}^{+}|0\rangle=|f\rangle. \end{array}\right\} \quad \lambda、\lambda'=1 \text{ 或 } 2$$

在 (9.48) 式里对此过程有贡献的正规乘积是第三、四项．但如同我们在第(一) 小节已证明的，这两项正规乘积等效，因而可以只考虑其中一项，例如第三项，并将 (9.48) 右边第三项积分号前的因子$\frac{1}{2}$消去：

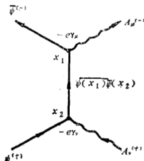
$$S_{fi}\cong(f|S_2|i)=$$
$$=e^2\int d^4x_1\int d^4x_2\,(f|:\overline{\psi}(x_1)\gamma_\mu\overbrace{\psi(x_1)\overline{\psi}}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)A_\mu(x_1)A_\nu(x_2):|i). \tag{9.75}$$

此式右边的正规乘积又可分解为十六项正规乘积之和，其中只有如下两项对Compton散射过程有贡献：

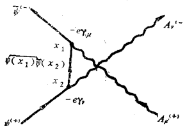
$$:\overline{\psi}^{(-)}(x_1)\gamma_\mu\overbrace{\psi(x_1)\overline{\psi}}(x_2)\gamma_\nu\psi^{(+)}(x_2)\,A_\mu^{(-)}(x_1)A_\nu^{(+)}(x_2): \tag{9.76}a$$

$$:\overline{\psi}^{(-)}(x_1)\gamma_\mu\overbrace{\psi(x_1)\overline{\psi}}(x_2)\gamma_\nu\psi^{(+)}(x_2)\,A_\mu^{(+)}(x_1)A_\nu^{(-)}(x_2): \tag{9.76}b$$

此两项正规乘积的Feynman图分别是图 9 — 7 $a$、$b$．用这两项正规乘积去代替(9.75)




（$a$）正规乘积 (9.76)$a$ 的Feynman图




（$b$）正规乘积 (9.76)$b$ 的Feynman图

图 9 — 7

式右边积分号下的正规乘积，并采用类似于MØller散射里使用过的方法，不难得到$S$矩阵元与Feynman图9—7的如下对应关系：

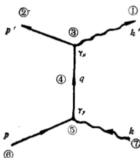
$$S_{fi}\cong(f|S_2|i)=\mathrm{A}+\mathrm{B}, \tag{9.77}$$

$$\mathrm{A}=\underbrace{\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4q}_{④}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}'|}}e^{\mu}_{\mathbf{k}'\lambda'}}_{①}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{E_{p'}}}\bar{u}_{\mathbf{p}'s'}}_{②}\underbrace{\left\{-e\gamma_\mu(2\pi)^4\delta^{(4)}(q-p'-k')\right\}}_{③}$$

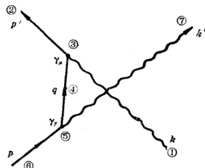
$$\times\underbrace{\left[\frac{-1}{\gamma\cdot q-im}\right]}_{④}\underbrace{\left\{-e\gamma_\nu(2\pi)^4\delta^{(4)}(p+k-q)\right\}}_{⑤}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{E_p}}u_{\mathbf{p}s}}_{⑥}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}}e^{\nu}_{\mathbf{k}\lambda}}_{⑦} \tag{9.78a}$$

$$\mathrm{B}=\underbrace{\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4q}_{④}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}}e^{\mu}_{\mathbf{k}\lambda}}_{①}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{E_{p'}}}\bar{u}_{\mathbf{p}'s'}}_{②}\underbrace{\left\{-e\gamma_\mu(2\pi)^4\delta^{(4)}(k+q-p')\right\}}_{③}$$

$$\times\underbrace{\left[\frac{-1}{\gamma q-im}\right]}_{④}\underbrace{\left\{-e\gamma_\nu(2\pi)^4\delta^{(4)}(p-q-k')\right\}}_{⑤}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{E_p}}u_{\mathbf{p}s}}_{⑥}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}'|}}e^{\nu}_{\mathbf{k}'\lambda'}}_{⑦}, \tag{9.78b}$$




（a）矩阵元A的图对应




（b）矩阵元B的图对应

图9—8

矩阵元A及其对应的图形9—8$a$表示初态电子（p,$s$）在顶点$\gamma_\nu$吸收了初态光子（k,$\lambda$），然后虚拟地传播到顶点$\gamma_\mu$并放出终态光子（k′,$\lambda'$），与此同时，虚电子转化为真实的终态电子（p′,$s'$）；矩阵元B及其对应的图形9—8$b$表示初态电子（p,$s$）首先在顶点$\gamma_\nu$放出终态光子（k′,$\lambda'$），接着虚拟地传播到顶点$\gamma_\mu$，并在该顶点吸收初态光子（k,$\lambda$），转化为真实的终态电子（p′,$s'$）。

容易看出，$S$矩阵元（9.77）具有如下的对称性：即在（9.77）式里做代换

$$k\rightleftarrows -k' \qquad e_{\mathbf{k}\lambda}\rightleftarrows e_{\mathbf{k}'\lambda'}$$

则A与B互换，而$S_{fi}$不变．这种对称性称为交叉对称性．在（9.77）式右边的第二项B就称为交叉项。

## （三）QED Feynman规则

在上一小节里讨论了三个电磁相互作用的实例，在粒子的四维动量空间里建立了$S$矩阵元与Feynman图的对应关系。现在，可以从上一小节的结果归纳出QED里的Feynman规则，即在QED里Feynman图的各个部分与$S$矩阵元各因子之间的一一对应规则（表〔9.1〕）．根据这些规则，就可以按照一个反应过程的Feynman图直接写出该过程的$S$矩阵元。

表〔9.1〕　　**QED Feynman规则**

| $S$矩阵元里的因子 | Feynman图里的组成部分 |
|---|---|
| $\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{E_p}}u_{ps}$ | 自无限远指向顶点的旋量粒子线代表初态旋量粒子（$p$） |
| $\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{E_{p'}}}\bar{u}_{p's'}$ | 自顶点指向无限远的旋量粒子线代表终态旋量粒子（$p'$） |
| $\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{E_q}}\bar{v}_{qs}$ | 自顶点指向无限远的反旋量粒子线代表初态反旋量粒子（$q$） |
| $\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{E_{q'}}}v_{q's'}$ | 自无限远指向顶点的反旋量粒子线代表终态反旋量粒子（$q'$） |
| $\frac{1}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2\lvert\mathbf{k}\rvert}}e^{\mu}_{\mathbf{k}\lambda}$ | 初态光子线，自无限远延伸到顶点，箭头仅表示光子动量进入顶点（$k$） |

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{1}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2\lvert\mathbf{k}'\rvert}}e^{\mu}_{\mathbf{k}'\lambda'}$ | $k'$ | 终态光子线，自顶点延伸到无限远，箭头仅表示光子动量离开顶点 |
| $\left\{-e\gamma_{\mu}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p'-p-k)\right\}$ | $p'$ $\gamma_{\mu}$ $k$ $p$ | 一阶光子顶角，若箭头指向顶点时动量取负号，则箭头离开顶点时动量取正号．反之亦然．对反粒子，这规则恰相反． |
| $\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4q\cdots\cdots\left(\frac{-1}{\gamma\cdot q-im}\right)$ | $q$ | 旋量粒子传播子，箭头与旋量粒子传播方向相同，而与反旋量粒子传播方向相反．动量 $q$ 在两个顶点处取相反符号． |
| $\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\cdots\cdots\left(\frac{-i\delta_{\mu\nu}}{k^2}\right)$ | $\mu$ $k$ $\nu$ | 光子传播子．箭头方向仅仅表示动量 $k$ 在两个顶点处取相反符号． |

在表〔9.1〕中只列出带电旋量粒子与光子相互作用的Feynman规则（关于带电标量粒子与光子相互作用的规则，可参阅CLAUDE ITZYKSON和JEAN-BERNARD ZUBER(1980)《Quantum Field Theory》, McGraw-Hill, p.285表6—2），这些规则还不完全，下面还要补充．但我们可由此得到在动量空间写出 $S$ 矩阵元的步骤如下：

1）首先确定要研究过程的那一阶近似．例如要研究 $n$ 阶近似，则在 $S_n$ 的表示式中找到对所论过程有贡献的所有正规乘积，并将彼此等效的正规乘积加起来，得到一项或几项互不等效的正规乘积．

2）把所有不等效的正规乘积均展开为许多项正规乘积之和，其中每一项都是场算符的正、负频率部分的乘积．再从这些由正、负频率部分组成的正规乘积里找出对所论过程有贡献的乘积，并按其等效性加以合并（在这样做以后，一般都能把 $S$ 矩阵展式中的因子 $\frac{1}{n!}$ 消去）．作出最后所得到的正规乘积的Feynman图．对于终态粒子是全同粒子的散射过程，应将各个Feynman图的终态粒子线相互交换，作出相应的交换散射图．这样，就得到能够导致所论物理过程的全部（$n$ 阶）Feynman图．

3）按照表〔9.1〕的对应规则，沿着与旋量粒子线方向相反的先后顺序写出与每个图形对应的各项 $S$ 矩阵元．

4）每一项矩阵元里的旋量粒子外线动量按其在该项矩阵元里出现的先后顺序构成某一排列．凡旋量粒子外线动量的排列相差偶数次对换的矩阵元均具有相同的符号，而任意两项矩阵元若其旋量粒子外线动量的排列相差奇数次对换，二者便具有相反的符号．这样就确定了各项矩阵元的相对符号（对于微扰论的计算来说，只需要确定上述各

项矩阵元的相对符号）．

下面我们举几个实例来说明上述Feynman规则的应用，并通过这些简单应用进一步完备QED Feynman规则．

$e^+e^-\longrightarrow\mu^+\mu^-$散射过程（二阶近似）：

初态有正、负电子： $|i\rangle=c^+_{p_1s_1}d^+_{p_2s_2}|0\rangle$，

终态有正、负μ轻子： $|f\rangle=c^+_{q_1'\sigma_1'}d^+_{q_2'\sigma_2'}|0\rangle$．

有贡献的正规乘积是（9.48）式右边的第二项．把它分解为十六项由场算符正、负频率部分组成的正规乘积，其中只有如下两项对$e^+e^-\longrightarrow\mu^+\mu^-$有贡献：

$$:\overline{\psi}^{(-)}(x_1)\gamma_\mu\psi^{(-)}(x_1)\overline{\psi}^{(+)}(x_2)\gamma_\nu\psi^{(+)}(x_2)\overline{A_\mu(x_1)A_\nu}(x_2):$$

$$:\overline{\psi}^{(+)}(x_1)\gamma_\mu\psi^{(+)}(x_1)\overline{\psi}^{(-)}(x_2)\gamma_\nu\psi^{(-)}(x_2)\overline{A_\mu(x_1)A_\nu}(x_2):$$

此两项正规乘积等效，故（9.48）式右边积分号前的因子$\frac{1}{2}$被消去．作出上述任一项，例如第二项正规乘积的Feynman图，并将它转到动量空间：

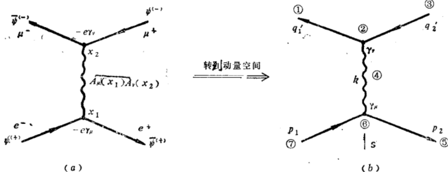



图9—9

按图中所标顺序写出矩阵元：

$$S_{fi}\cong\langle f|S_2|i\rangle$$

$$=\underbrace{\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\frac{1}{\sqrt{V}}}_{④}\underbrace{\sqrt{\frac{m_\mu}{E_{q_1'}}}\overline{u}_{q_1'\sigma_1'}}_{①}\underbrace{\left\{-e\gamma_\nu(2\pi)^4\delta^{(4)}(q_1'+q_2'-k)\right\}}_{②}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m_\mu}{E_{q_2'}}}v_{q_2'\sigma_2'}}_{③}$$

$$\times\underbrace{\left(\frac{-i\delta_{\mu\nu}}{k^2}\right)}_{④}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m_e}{E_{p_2}}}\overline{v}_{p_2s_2}}_{⑤}\underbrace{\left\{-e\gamma_\mu(2\pi)^4\delta^{(4)}(k-p_1-p_2)\right\}}_{⑥}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m_e}{E_{p_1}}}u_{p_1s_1}}_{⑦}\tag{9.79}$$

完成对内线动量$k$的积分，适当整理后得：

$$S_{fi}\cong e^2\frac{(2\pi)^4}{V^2}\left(\frac{m_e^2m_\mu^2}{E_{q_1'}E_{q_2'}E_{p_1}E_{p_2}}\right)^{1/2}\delta^{(4)}(p_1+p_2-q_1'-q_2')\frac{i\delta_{\mu\nu}}{s}$$

$$\times\overline{u}_{q_1'\sigma_1'}\gamma_\nu v_{q_2'\sigma_2'}\overline{v}_{p_2s_2}\gamma_\mu u_{p_1s_1}.\tag{9.80}$$

其中，$m_e$、$m_\mu$分别是电子质量和μ轻子质量. s的定义便是(9.74)$b$式：

$$s=-(p_1+p_2)^2=-(q_1'+q_2')^2=-k^2 \tag{9.81}$$

因此$e^+e^-\longrightarrow\mu^+\mu^-$过程是经由s道反应实现的.

**电子自能跃迁（二阶）**：

当只考虑$S$矩阵的零阶效应时，一个自由电子将是稳定的. 但当考虑二阶效应时，按照正统的解释，电子并非是真正自由的，它处于不断的自作用之中. 即不断地放出虚光子和吸收它所放出的虚光子，相应地，电子的状态也将不断发生变化. 在（9.48）式里对这一过程有贡献的正规乘积是第五、六两项. 因为这两项正规乘积等效，故只考虑第五项，并消去（9.48）右边的因子$\frac{1}{2}$：

$$S_{fi}\cong(f|S_2|i)=e^2\int d^4x_1\int d^4x_2(f|:\overline{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)$$

$$\times A_\mu(x_1)A_\nu(x_2):|i)$$

$$=e^2\int d^4x_1\int d^4x_2(f|:\overline{\psi}^{(-)}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi^{(+)}(x_2)A_\mu(x_1)A_\nu(x_2):|i)$$

其中 $$|i)=c^+_{ps}|0),$$

$$|f)=c^+_{p's'}|0).$$

上式积分号下的正规乘积所对应的Feynman图便是图9—3$d$.现在把该图转到动量空间（见图9—10），并标明写矩阵元的顺序，由此即得：

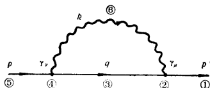



图9—10 电子自能图

$$S_{fi}\cong(f|S_2|i)$$

$$\underset{③}{\underline{\frac{1}{(2\pi)^4}}}\ \underset{⑥}{\underline{\frac{1}{(2\pi)^4}}}$$

$$\times\underset{③}{\underline{\int d^4q}}\underset{⑥}{\underline{\int d^4k}}\underset{①}{\underline{\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{E_{p'}}}\overline{u}_{p's'}}}\underset{②}{\underline{\left\{-e\gamma_\mu(2\pi)^4\delta^{(4)}(p'-q-k)\right\}}}\underset{③}{\underline{\left(\frac{-1}{\gamma\cdot q-im}\right)}}$$

$$\times\underset{④}{\underline{\left\{-e\gamma_\nu(2\pi)^4\delta^{(4)}(q+k-p)\right\}}}\underset{⑤}{\underline{\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{E_p}}u_{ps}}}\underset{⑥}{\underline{\left(\frac{-i\delta_{\mu\nu}}{k^2}\right)}}, \tag{9.82}$$

完成对$q$的积分，并注意$E_{p'}=E_p$（能量守恒），适当整理后得：

$$S_{fi}\cong-e^2\frac{1}{V}\frac{m}{E_p}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p'-p)\overline{u}_{p's'}\Sigma(p)u_{ps}, \tag{9.83}$$

这里$\Sigma(p)$是一个对数发散的积分：

$$\Sigma(p)=\frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4k\gamma_\mu\frac{-1}{\gamma\cdot(p-k)-im}\gamma_\mu\frac{-i}{k^2}. \tag{9.84}$$

电子自能跃迁是导致量子场论里的发散困难的重要来源之一。解决这种发散困难需要用到重整化方法（见第十一章）。

**真空极化：**

(9.48) 式右边第七项正规乘积及其对应的 Feynman 图 9—3 $e$ 表明：一个光子可以虚拟地转化为电子—正电子偶，后者重又湮灭为原来的光子。由于光子存在上述的虚转化，原来不带电的电子—正电子场真空产生了所谓的"真空极化电荷"。因此，光子的上述虚转化过程就称为真空极化。(9.48) 式右边的第七项正规乘积可分解为两项由场算符产生、湮灭部分组成的正规乘积，由于这两项正规乘积等效，因而有：

$$S_{fi}\cong(f|S_2|i)$$

$$=e^2\int d^4x_1\int d^4x_2(f|:\overline{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)A_\mu^{(-)}(x_1)A_\nu^{(+)}(x_2):|i) \tag{9.85}$$

其中，

$$|i)=a^+_{k\lambda}|0) \qquad \lambda,\lambda'=1\text{ 或 }2 \qquad |f)=a^+_{k'\lambda'}|0)$$

(9.85) 中的正规乘积，其收缩部分可作如下变化：

$$\overline{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)=\overline{\psi}_\alpha(x_1)\gamma_\mu^{\alpha\beta}\psi_\beta(x_1)\overline{\psi}_\delta(x_2)\gamma_\nu^{\delta\rho}\psi_\rho(x_2)$$

在正规乘积下旋量算符反对易 ↘

$$=-\gamma_\mu^{\alpha\beta}\psi_\beta(x_1)\overline{\psi}_\delta(x_2)\gamma_\nu^{\delta\rho}\psi_\rho(x_2)\overline{\psi}_\alpha(x_1)$$

$$=-\gamma_\mu^{\alpha\beta}S_{F\beta\delta}(x_1-x_2)\gamma_\nu^{\delta\rho}S_{F\rho\alpha}(x_2-x_1)$$

$$=-\mathrm{Tr}[\gamma_\mu S_F(x_1-x_2)\gamma_\nu S_F(x_2-x_1)]. \tag{9.86}$$

现在我们把图 9—3 $e$ 转到动量空间，并在图中标明写矩阵元的顺序，即得

$$S_{fi}\cong\underbrace{\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\int d^4q}_{③}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}'|}}e^\mu_{k'\lambda'}}_{①}$$

$$\times\underbrace{\left\{-e(2\pi)^4\delta^{(4)}(k'-p+q)\right\}}_{②}$$

$$\times\underbrace{\left\{-\mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu\frac{-1}{\gamma\cdot p-im}\gamma_\nu\frac{-1}{\gamma\cdot q-im}\right]\right\}}_{③}$$

$$\times\underbrace{\left\{-e(2\pi)^4\delta^{(4)}(k-p+q)\right\}}_{④}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}}e^\nu_{k\lambda}}_{⑤}, \tag{9.87}$$

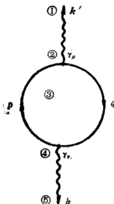



图 9—11 真空极化图

完成上式右边对 $q$ 的积分并稍加整理得

$$S_{fi} \cong ie^2 \frac{1}{V}\frac{1}{2|\mathbf{k}|}(2\pi)^4\delta^{(4)}(k'-k)\, e^{\mu}_{\mathbf{k}'\lambda'}\,\Pi_{\mu\nu}(k)\, e^{\nu}_{\mathbf{k}\lambda} \tag{9.88}$$

**其中$\Pi_{\mu\nu}$是真空极化张量的分量，它是一个平方发散的积分：**

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = \frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu \frac{1}{\gamma\cdot p - im}\gamma_\nu \frac{1}{\gamma\cdot(p-k) - im}\right] \tag{9.89}$$

**处理这个积分要借助于重整化方法.**

**通过这个例子，我们看到，还需要对Feynman规则作如表〔9.2〕的补充.**

**表**〔9.2〕QED Feynman规则（续）

| $S$矩阵元里的因子 | Feynman图的组成部分 |
|---|---|
| $\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\int d^4q\cdots\cdots$ $\cdots\cdots\left\{-\mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu\frac{1}{\gamma\cdot p - im}\times\gamma_\nu\frac{1}{\gamma\cdot q - im}\right]\right\}$ | 由两条旋量粒子内线构成的闭合圈，表示旋量粒子和反粒子的虚产生和虚湮灭. |
| $\left\{-e(2\pi)^4\delta^{(4)}(k'+q-p)\right\}$ $\left\{-e(2\pi)^4\delta^{(4)}(p-k-q)\right\}$ | 闭合圈里包含的三线顶角. 其中，$\gamma_\mu$、$\gamma_\nu$已包含在闭合圈的因子里 |

〔注〕闭合圈里的顶角具有两条内线，内线动量之符号按其箭头方向统一确定（不分正、反粒子），同一条内线之动量在两个顶点处反号

表〔9.1〕和〔9.2〕的规则对$S$矩阵微扰展开式的任何一阶近似均适用.

**真空涨落：**

在自由场的量子理论里，量子场真空态（基态）不但是没有物理粒子的态，而且其中也没有任何相互作用和相互转化；但是，从相互作用的观点看来，即使在真空态下，量子场仍处于不断的相互作用和相互转化之中。由于这种转化是从没有任何物理粒子的态转化为没有任何物理粒子的态，所以在实验上观察不到. 例如一个虚光子转化为虚的电子—正电子偶，而后者又湮灭为一个虚光子. 在$S$矩阵的微扰展式里自动地包含着对这种虚转化过程的各阶贡献. 在二阶近似下，对这一过程有贡献的正规乘积是（9.48）式右边最后一项：

$$S_{fi}\cong(f|S_2|i)=(0|S_2|0)$$

$$=\frac{e^2}{2!}\int d^4x_1\int d^4x_2(0|:\overline{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)A_\mu(x_1)A_\nu(x_2):|0)$$

$$=\frac{e^2}{2!}\int d^4x_1\int d^4x_2:\overline{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)A_\mu(x_1)A_\nu(x_2):$$

(9.90)

此项正规乘积对应的Feynman图便是图 9—3$f$. 现将它转到动量空间，并标明写矩阵元的先后顺序，由此得：

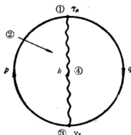


图 9—12 真空涨落图

$$S_{fi}\cong(0|S_2|0)$$

$$=\frac{1}{2!}\underbrace{\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{(2\pi)^4}}_{②}\underbrace{\frac{1}{(2\pi)^4}}_{④},$$

$$\times\underbrace{\int d^4p\int d^4q}_{②}\underbrace{\int d^4k}_{④}\underbrace{\left\{-e(2\pi)^4\delta^{(4)}(q-p-k)\right\}}_{①}$$

$$\times\underbrace{\left\{-\mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu\frac{-1}{\gamma\cdot p-im}\gamma_\nu\frac{-1}{\gamma\cdot q-im}\right]\right\}}_{②}\underbrace{\left\{-e(2\pi)^4\delta^{(4)}(p+k-q)\right\}}_{③}\underbrace{\frac{-i\delta_{\mu\nu}}{k^2}}_{④},$$

(9.91)

完成对$k$的积分并消去$\delta_{\mu\nu}$又可将上式简化为：

$$S_{fi}\cong\frac{ie^2}{2!}\delta^{(4)}(0)\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\int d^4q\,\mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu\frac{1}{\gamma\cdot p-im}\gamma_\mu\frac{1}{\gamma\cdot q-im}\right]\frac{1}{(q-p)^2}.$$

(9.92)

此式右边的积分是发散的，而且由于因子$\delta^{(4)}(0)$已使$S_{fi}$失去意义. 这种真空涨落效应对实际物理过程的各阶近似都有贡献，但读者可自行证明（参见DAVID LURIE《Particles and Fields》pp. 234—236.），这种贡献只是对$S$矩阵元乘上一个纯虚的相位因子，故可以不必考虑.

### （四）中性赝标介子与核子的强相互作用

Feynman规则的具体内容将因相互作用的不同而有不同. 这主要是顶角对应的矩阵元因子不相同. 但同一种粒子的外线和内线（传播子）在不同的相互作用里是一致的. 它们对应的矩阵元因子也是一致的. 采用类似（一）、（二）、（三）的讨论可以得到中性赝标介子与核子相互作用的Feynman规则如下表.

**表〔9.3〕 中性赝标介子与核子相互作用的Feynman规则**

| S矩阵元里的因子 | Feynman图的组成部分 | |
|---|---|---|
| $\frac{1}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}$ | k | 初态赝标介子线，自无限远连至顶点的虚线。箭头表示动量进入顶点。 |
| $\frac{1}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{k'}}}$ | k′ | 终态赝标介子线，自顶点延伸至无限远的虚线，箭头表示动量离开顶点。 |
| $\left\{-G\gamma_5(2\pi)^4\delta^{(4)}(p'-p-k)\right\}$ | p′ p k | 介子、核子顶角。若箭头指向顶点时动量取负号，则箭头离开顶点时取正号，反之亦可。对反粒子，这规则相反。 |
| $\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4q\cdots\cdots\left(\frac{-1}{\gamma\cdot q-iM}\right)$ | q | 核子传播子，其意义见表〔9—1〕的旋量粒子传播子一栏。不同点是：这里的$M$代表核子质量。 |
| $\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\cdots\cdots\left(\frac{-i}{k^2+m^2}\right)$ | k | 介子传播子。动量$k$在两个顶点处取相反符号。 |

〔注〕核子反核子外线与表〔9—1〕的旋量粒子线相同(仅须把$m$代以$M$)。由两条核子线构成的闭合圈，以及闭合圈里包含的顶角，其规则见表〔9.2〕。仅须以$\gamma_5$代替$\gamma_\mu$。写出矩阵元的步骤见表〔9.1〕后面的叙述。

## 习　题

(1) 引入相互作用图景的必要性何在?

(2) 将如下的$T$乘积进行Wick分解：

$$T[\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3)\phi_4(x_4)];$$

$$T[\overline{\psi}(x)\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi(x)\overline{\psi}(y)\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi(y)].$$

其中，$\phi_a(x_a)(a=1,2,3,4)$是一些Bose场算符；$\psi(x)$是Fermi场算符。

(3) 试试看，能否从$h$图景直接过渡到$i$图景？若不能，说明困难何在?

(4) 以下二图对Møller散射的四阶效应有贡献。试写出与这两个图对应的$S$矩阵元：

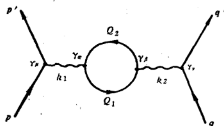



图 9—13

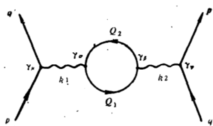



图 9—14

（5）证明一阶电磁过程所对应的$S$矩阵元为零。

（6）证明，存在这样一个参考系，在此参考系里看来，图 9—6$a$的反应是通过虚光子传递动量来实现的，而图 9—6$b$的反应是通过虚光子传递能量来实现的。

# 第十章　微扰论的应用

在这一章里我们要计算一些物理过程的最低阶微扰近似，通过这些计算来说明怎样把量子场论的理论结果与实验事实进行初步比较。从第二章到第七章，曾根据量子场论的第一、二、三点基本假设揭示了量子场的波、粒二重性；在第八章里又从第四点基本假设出发，借助于适当的对称性讨论了量子场的相互作用，给出了相互作用场系统的Lagrange函数密度和 Hamilton 函数密度；第九章则通过微扰计算求得相互作用场方程的微扰近似解，并将$S$矩阵微扰展开式中的每一项按照 Wick 定理进行分解。在此基础上，通过若干实例归纳出一套直接由Feynman图写出$S$矩阵元的规则，即Feynman规则。但在实验上，无法测定一个过程的$S$矩阵元（即跃迁几率幅），而只能测定它的几率（截面、寿命）。应当指出，第八、九两章的讨论比较偏重于量子场的波动性方面，但是，在量子场相互作用过程里，场的粒子性一面表现比较突出。这时，从实验上能够观察到的是初态粒子的消失和终态粒子的产生。因此，为了将理论结果与实验事实进行比较，就需要把讨论的侧重点转向量子场的粒子性方面。读者在学习这一章时应注意场量子与经典粒子的质的区别，同时也应注意场量子与量子力学里的微观粒子的区别，而不要发生不应有的混淆。

## §1　散射截面与衰变寿命

为了给出截面与寿命的定义，我们分三个小节来进行讨论。

### （一）单位时间的跃迁几率

假定某一反应过程，其初态$|i)$有$n_i$个粒子，终态$|f)$有$n_f$个粒子。

$$A_1+A_2+\cdots+A_{n_i}\longrightarrow B_1+B_2+\cdots+B_{n_f} \tag{10.1}$$

这个过程的$S$矩阵元是$S_{fi}=(f|S|i)$。根据（9.30）式，可把$S$矩阵一般地写为：

$$S=1+iR \tag{10.2}$$

因此，除了从$|i)$到$|i)$的跃迁（即不跃迁）以外，一个过程的$S$矩阵元可重写为

$$R_{fi}=(f|R|i), \tag{10.3}$$

通观上一章的实例，不难看到，在$S$矩阵元的表示式里完成对内线动量的积分并整理之后，$R_{fi}$的一般形式如下：

$$R_{fi}=\frac{1}{V^{(n_i+n_f)/2}}\frac{1}{\prod_i N_i\prod_f N_f}(2\pi)^4\delta^{(4)}(\sum_f p'_f-\sum_i p_i)\mathrm{M}_{fi} \qquad (10.4)$$

其中$p_i$、$p'_f$分别是个别初态粒子四维动量和个别终态粒子四维动量；$N_i$和$N_f$分别是Feynman图里初态粒子线和终态粒子线所对应的归一化因子，对Bose子，

$$N_i=\sqrt{2\omega_{k_i}},\quad N_f=\sqrt{2\omega_{k'_f}}, \qquad (10.5)a$$

对Fermi子，

$$N_i=\sqrt{\frac{\mathrm{E}_{p_i}}{m_i}},\quad N_f=\sqrt{\frac{\mathrm{E}_{p'_f}}{m_f}}, \qquad (10.5)b$$

$\mathrm{M}_{fi}$是一个Lorentz 不变的矩阵元，它即是$S$矩阵元里的动力学因子，相互作用过程的动力学内容就包含在这个因子里；$(2\pi)^4\delta^{(4)}(\sum_f p'_f-\sum_i p_i)$ 是相互作用过程的能量、动量守恒因子。自初态$|i\rangle$经由过程（10.1）跃迁到终态$|f\rangle$的跃迁几率$W$便是$R_{fi}$的模平方：

$$W=|R_{fi}|^2=(2\pi)^4\delta^{(4)}(\sum_f p'_f-\sum_i p_i)(2\pi)^4\delta^{(4)}(\sum_f p'_f-\sum_i p_i)$$

$$\times\frac{1}{V^{n_i+n_f}}\frac{1}{\prod_i N_i^2\prod_f N_f^2}|\mathrm{M}_{fi}|^2. \qquad (10.6)$$

此式右边的两个$(2\pi)^4\delta^{(4)}(\sum p'_f-\sum p_i)$只有一个是能量、动量守恒因子，多出的另一个因子，由于能量、动量守恒的要求，可将它写为：

$$(2\pi)^4\delta^{(4)}(\sum_f p'_f-\sum_i p_i)=(2\pi)^4\delta^{(4)}(0)=(2\pi)\delta(0)(2\pi)^3\delta^{(3)}(0) \qquad (10.7)$$

其中，时间部分$(2\pi)\delta(0)$就是一段无限长的时间间隔：

$$(2\pi)\delta(0)=\lim_{\substack{T\to\infty\\ \Sigma E'_f\to\Sigma E_i}}\int_{-T/2}^{+T/2}e^{i(\sum_f E'_f-\sum_i E_i)t}dt=\lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{+T/2}dt=\lim_{T\to\infty}T. \qquad (10.8)$$

把（10.8）代入（10.6）得

$$W=(2\pi)^4\delta^{(4)}(\sum_f p'_f-\sum_i p_i)(2\pi)^3\delta^{(3)}(0)\frac{1}{V^{n_i+n_f}}\frac{1}{\prod_i N_i^2\prod_f N_f^2}$$

$$\times|\mathrm{M}_{fi}|^2\lim_{T\to\infty}T \qquad (10.9)$$

此式定义的$W$显然不是一个有意义的几率，因为其中包含两个无限大因子$\lim_{T\to\infty}T$和$\delta^{(3)}(0)$，所以$W$成为无穷大。事实上，（10.9）式的$W$是所研究的物理过程(10.1)在无限长的时间间隔$T$内连续进行无限多次的总的跃迁几率。如上一章所述，这样一个没

有物理意义的结果，是由于我们采用平面波近似所导致的。但是在实验上，任何一个粒子反应过程总是在一段极短时间内完成的（见第九章§2），而且人们只能在一段有限时间内来观察粒子反应过程，例如在单位时间内来观察，这样就可将（10.9）式中的最后一个因子消去，由此得到单位时间的跃迁几率$W_{per}$；为了把$(2\pi)^3\delta^{(3)}(0)$也消去，我们按照（9.23）到(9.24)式的叙述，把$\int\cdots d^3x$仍然换成$\int_V\cdots d^3x$，相应地，把$(2\pi)^3\times\delta^{(3)}(\sum_f \mathbf{p}'_f-\sum_i \mathbf{p}_i)$代以$V\delta_{\Sigma \mathbf{p}'_f,\Sigma \mathbf{p}_i}$，$(2\pi)^3\delta^{(3)}(0)$代以$V$，于是就得到$W_{per}$的如下表示式：

$$W_{per}=(2\pi)^4\delta^{(4)}(\sum_f p'_f-\sum_i p_i)\frac{1}{V^{n_i+n_f-1}}\frac{1}{\prod_i N_i^2\prod_f N_f^2}|M_{fi}|^2. \quad (10.10)$$

## （二）对终态粒子动量求和、衰变寿命

（10.10）式是单位时间从初态$|i\rangle$跃迁到终态$|f\rangle$的几率。初态粒子的能量、动量可以用实验装置来控制，因而初态粒子是完全确定了的；但终态粒子将以不同的几率$W_{per}$处于具有不同能量、动量值之状态。因此，要确定$W_{per}$之值，就必须从实验上精确测定终态粒子的能量和动量。然而，实验上无法探测具有精确动量的粒子，而只能探测动量在某一间隔$\mathbf{p}'$—$\mathbf{p}'+d\mathbf{p}'$内的粒子。为了从理论上反映这一情况，我们首先在(10.10)右端对终态粒子的一切可能的动量求和：

$$W_{per}=(2\pi)^4\frac{1}{\prod_i N_i^2}\frac{1}{V^{n_i-1}}\sum_{p'_f}\frac{\delta^{(4)}(\sum_f p'_f-\sum_i p_i)}{V^{n_f}\prod_f N_f^2}|M_{fi}|^2. \quad (10.11)$$

由(4.55)式有：$\sum_{p'_f}\equiv\sum_{\mathbf{p}'_f}=\sum_{\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2\cdots\mathbf{p}'_{n_f}}=\left[\frac{V}{(2\pi)^3}\right]^{n_f}\int d^3p'_1d^3p'_2\cdots d^3p'_{n_f}$，因此，(10.11)式成为

$$W_{per}=(2\pi)^4\frac{1}{V^{n_i-1}\prod_i N_i^2}\frac{1}{(2\pi)^{3n_f}}\int d^3p'_1d^3p'_2\cdots d^3p'_{n_f}$$
$$\times\frac{\delta^{(4)}(\sum_f p'_f-\sum_i p_i)}{\prod_f N_f^2}|M_{fi}|^2. \quad (10.12)$$

此式定义的$W_{per}$是单位时间内从给定的初态$|i\rangle$跃迁到一切可能的终态的总几率。由于上式右边还包含有一个没有测量意义的归一化体积因子$\frac{1}{V^{n_i-1}}$，故$W_{per}$还不是一个可以用实验测定的物理量。为了使理论结果与实验事实能够最终进行比较，就需要定义粒子反应过程的截面和寿命。在这一小节里，我们首先来定义粒子的衰变寿命。在(10.1)式里令$n_i=1$，就得到如下的衰变过程：

$$A \to B_1 + B_2 + \cdots + B_{n_f} \tag{10.13}$$

在这种情形下，(10.12) 式右边的因子$\frac{1}{V^{n_i-1}}=1$，$W_{\rm per}$成为一个可以用实验测定的物理量。它便是粒子$A$在单位时间内通过衰变方式 (10.13) 发生衰变的几率〔或者说，是场系统从有一个粒子$A$的初态跃迁到所有可能的终态$|f\rangle$的几率〕。这里，所谓"衰变方式"是指同一种粒子可以衰变成不同数目、不同种类的另一些粒子，我们称它具有不同的"衰变方式"。例如$\mu^-$介子具有如下的一些衰变方式：

$$\mu^- \to e^- + \tilde{\nu}_e + \nu_\mu \qquad (\text{衰变百分数：98.6\%})$$

$$\to e^- + \tilde{\nu}_e + \nu_\mu + \gamma \qquad (\sim 1.4\%)$$

$$\left.\begin{array}{l} \to e^- + \gamma + \gamma \\ \to e^- + e^+ + e^- \\ \to e^- + \gamma \\ \cdots\cdots \end{array}\right\} (\text{衰变率在}10^{-8}\text{以下，几乎不可能})$$

其中，第一种衰变方式满足两种轻子数守恒的要求，其衰变几率最大，为98.6%。

衰变几率$W_{\rm per}$的倒数便是粒子$A$的平均寿命，记为$\tau$：

$$\tau^{-1} = W_{\rm per} = (2\pi)^4 \frac{1}{\prod\limits_i N_i^2} \frac{1}{(2\pi)^{3n_f}} \int d^3 p_1' \cdots d^3 p_{n_f}' \frac{\delta^{(4)}(\sum\limits_f p_f' - p_A)}{\prod\limits_f N_f^2} \left| \mathrm{M}_{fi} \right|^2. \tag{10.14}$$

式中，$p_A$是初态粒子$A$的四维动量。

## （三）散射过程的截面

**入射粒子相对流强F**

在讨论散射截面以前，首先要弄清入射粒子相对流强的含义，我们主要讨论两个初态粒子碰撞，生成两个终态粒子的过程，即二体二体散射过程：

$$A_1 + A_2 \to B_1 + B_2 \tag{10.15}$$

在实验上，通常采取的办法是：①让$A_2$类粒子处于静止（在实验室参考系里），而用经过高能加速器加速的$A_1$类粒子束去碰撞$A_2$类粒子。这时，$A_1$类粒子称为入射粒子，$A_2$类粒子称为靶粒子；②利用对撞机将两类初态粒子加速，使两束粒子反向运行，发生对撞[注1]。在这两种情形下，入射粒子相对流强$F$的定义均是：

$$F \doteq \tilde{\rho}|\mathbf{v}|. \tag{10.16}$$

〔注1〕 详见《物理学词典》粒子物理学分册，pp.52－54.科学出版社，1982年。

这里，$\tilde{\rho}$是入射粒子束中的粒子密度，v是两类初态粒子的相对速度，在实验室参考系里，$A_2$类粒子静止，v就是$A_1$类粒子的入射速度，因此，$F$是单位时间穿过与入射方向垂直的单位横截面积的入射粒子数．初看起来，这一定义颇带经典意味．因此有必要说明，它与场量子的二象性并不抵触．

首先，假定初态粒子都是旋量粒子．由于初态粒子具有确定的动量，所以与之相关的量子场是单色平面波．让我们来计算初态粒子束的相对束流密度，它是守恒流密度算符$J_\mu(x)$的本征值．设其中一类初态粒子四维动量为$p$．另一类粒子四维动量为$q$．这时，场系统的初态是：

$$c_{qs_2}^+ c_{ps_1}^+ |o) = |i) \tag{10.17}$$

守恒流密度算符$J_\mu(x)$与$ps_1$粒子有关的部分是

$$J_\mu^p(x) = i\frac{1}{V}\frac{m}{E_p} c_{ps_1}^+ c_{ps_1} \bar{u}_{ps_1} \gamma_\mu u_{ps_1},$$

与$qs_2$粒子有关的部分是

$$J_\mu^q(x) = i\frac{1}{V}\frac{m}{E_q} c_{qs_2}^+ c_{qs_2} \bar{u}_{qs_2} \gamma_\mu u_{qs_2}.$$

在以上二式里，只写出$J_\mu(x)$的表示式中具有非零贡献的项， 又由于已自动满足正规顺序，故正规乘积符号：：也省去．整个系统的算符$J_\mu(x)$是$J^p$与$J^q$的代数和．我们分别考虑$J_\mu(x)$的时间分量和空间分量．在两束粒子发生碰撞的区域，粒子密度是二者之和，因此有

$$J_4(x) = i\frac{1}{V}\left(\frac{m}{E_p} c_{ps_1}^+ c_{ps_1} \bar{u}_{ps_1} \gamma_4 u_{ps_1} + \frac{m}{E_q} c_{qs_2}^+ c_{qs_2} \bar{u}_{qs_2} \gamma_4 u_{qs_2}\right). \tag{10.18}$$

两束粒子的相对流密度矢量，是两束粒子各自的流密度矢量之差，因此又有

$$\mathbf{J}(x) = i\frac{1}{V}\left(\frac{m}{E_p} c_{ps_1}^+ c_{ps_1} \bar{u}_{ps_1} \boldsymbol{\gamma} u_{ps_1} - \frac{m}{E_q} c_{qs_2}^+ c_{qs_2} \bar{u}_{qs_2} \boldsymbol{\gamma} u_{qs_2}\right). \tag{10.19}$$

容易证明，在态（10.17）之下，$J_4(x)$的期望值是

$$(i|J_4(x)|i) = i\frac{2}{V}, \tag{10.20}$$

因此，在初态$|i)$下，总的粒子密度是$\frac{2}{V}$．同样可得，$\mathbf{J}(x)$的期望值为

$$(i|\mathbf{J}(x)|i) = \frac{1}{V}\left(\frac{\mathbf{p}}{E_p} - \frac{\mathbf{q}}{E_q}\right), \tag{10.21}$$

因此，流密度矢量之值是

$$|\langle i|\mathbf{J}(x)|i\rangle|=\frac{1}{V}\left|\frac{\mathbf{p}}{E_p}-\frac{\mathbf{q}}{E_q}\right|,\tag{10.22}$$

按照（10.20），上式中的$\frac{1}{V}$便可解释为入射粒子束中的粒子密度．为了弄清（10.22）右边第二个因子的意义，我们使用熟知的关系式：

$$p^2=\mathbf{p}^2-p_0^2=-m^2=-p_0^2(1-v_p^2)$$

这里$v_p$是$\mathrm{p}s_1$粒子的速度．由上式可得

$$v_p=\frac{|\mathbf{p}|}{p_0}=\frac{|\mathbf{p}|}{E_p},\tag{10.23}$$

同样可得：

$$v_q=\frac{|\mathbf{q}|}{q_0}=\frac{|\mathbf{q}|}{E_q}.\tag{10.24}$$

于是$\left|\frac{\mathbf{p}}{E_p}-\frac{\mathbf{q}}{E_q}\right|$是两类初态粒子的相对速度大小．因而（10.22）式便是(10.16)式．由此可见，（10.16）式定义的$F$乃是算符$\mathbf{J}(x)$在初态$|i\rangle$下的期望值．

对于光子，由于没有粒子数守恒定律，故不存在守恒流密度算符$J_\mu$．但是因为我们已对电磁场引入归一化体积$V$，所以当初态粒子是两个光子（或一个入射光子和一个靶粒子)时，入射粒子束中的粒子密度便是$\widetilde{\rho}=\frac{1}{V}$；另方面，对于光子，$k^2=\mathbf{k}^2-k_0^2=0$，故有

$$c=\frac{|\mathbf{k}|}{k_0}=1\text{．（这里，}c\text{ 是电磁波传播速率，亦即量子电磁场之传播速率）}$$

这样，对于光子，（10.16）式仍然可以从场论的概念去理解．

现在，可以把（10.22）式左边写为$F$：

$$F=\frac{1}{V}\left|\frac{\mathbf{p}}{E_p}-\frac{\mathbf{q}}{E_q}\right|,\tag{10.25$a$}$$

在动量中心系里$\mathbf{q}=-\mathbf{p}$，因而

$$F=\frac{|\mathbf{p}|}{V}\left(\frac{1}{E_p}+\frac{1}{E_q}\right),\tag{10.25$b$}$$

在实验室参考系里，$\mathbf{q}=0$，又有

$$F=\frac{1}{V}\frac{|\mathbf{p}|}{E_p}\tag{10.25$c$}$$

倘若初态粒子是两个光子，则类似地有：

$$F=\frac{1}{V}\left|\frac{\mathbf{k}_1}{\omega_{k_1}}-\frac{\mathbf{k}_2}{\omega_{k_2}}\right|,\quad\text{在任意参考系}\tag{10.26$a$}$$

$$F=\frac{|\mathbf{k}_1|}{V}\left(\frac{1}{\omega_{k_1}}+\frac{1}{\omega_{k_2}}\right),\quad \text{在动量中心系} \tag{10.26b}$$

$$F=\frac{1}{V}\left|\frac{\mathbf{k}_1}{\omega_{k_1}}-\frac{\mathbf{k}_2}{\omega_{k_2}}\right|,\quad \text{在实验室参考系} \tag{10.26c}$$

对于初态粒子是一个光子和一个旋量粒子的情形，同样有：

$$F=\frac{1}{V}\left|\frac{\mathbf{k}}{\omega_k}-\frac{\mathbf{p}}{E_p}\right|,\quad \text{在任意参考系} \tag{10.27a}$$

$$F=\frac{|\mathbf{k}|}{V}\left(\frac{1}{\omega_k}+\frac{1}{E_p}\right),\quad \text{在动量中心系} \tag{10.27b}$$

$$F=\frac{1}{V}\frac{|\mathbf{k}|}{\omega_k},\quad \text{在实验室参考系} \tag{10.27c}$$

$(\omega_k\equiv|\mathbf{k}|\equiv k_o)$。

**散射截面**

散射截面 $\sigma$ 是单位时间内，单位流强下，经由散射反应自初态 $|i)$ 跃迁到粒子动量取各种可能值的终态的总几率。由（10.12）式得

$$\sigma=\frac{W_{\text{per}}}{F}=(2\pi)^4\frac{1}{FV^{n_i-1}\prod\limits_i N_i^2}\frac{1}{(2\pi)^{3n_f}}$$

$$\times\int d^3p_1'\cdots\cdots d^3p_{n_f}'\frac{\delta^{(4)}(\sum\limits_f p_f'-\sum\limits_i p_i)}{\prod\limits_f N_f^2}|M_{fi}|^2. \tag{10.28}$$

对于二体二体散射过程，上式简化为

$$\sigma=\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{FVN_{i1}^2N_{i2}^2}\int d^3p_1'd^3p_2'$$

$$\times\frac{\delta^{(4)}(p_1'+p_2'-p_1-p_2)}{N_{f1}^2N_{f2}^2}|M_{fi}|^2, \tag{10.29}$$

因为在相对流强 $F$ 的表示式里含有因子 $\frac{1}{V}$，故在 $\sigma$ 的表示式里不再含有归一化体积 $V$，这样，$\sigma$ 就是一个可由实验测定的物理量。现在来证明，截面 $\sigma$ 是一个Lorentz不变量。首先 $M_{fi}$ 是一个Lorentz不变的矩阵元，这一点从第九章的实例里就可以明显地看出来。其次，为了说明对终态粒子三维动量的积分也具有不变性，我们假定初态和终态分别具有两个旋量粒子：

$$|i)=c_{\mathbf{p}s_1}^+c_{\mathbf{q}s_2}^+|0),\quad \mathbf{p}s_1\text{、}\mathbf{q}s_2\text{粒子的质量分别为}m_1\text{、}m_2$$

$$|f\rangle = c^{+}_{p's'_1} c^{+}_{q's'_2}|0\rangle, \qquad p's'_1、q's'_2\text{粒子的质量分别为}m_3、m_4$$

这时（10.29）式成为

$$\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{m_1 m_2 m_3 m_4}{\left|\frac{\mathbf{p}}{E_p} - \frac{\mathbf{q}}{E_q}\right| E_q E_p} \int \frac{d^3p'}{E_{p'}} \frac{d^3q'}{E_{q'}}$$

$$\times \underbrace{\delta^{(4)}(p'+q'-p-q)|M_{fi}|^2}_{M_L}, \tag{10.30}$$

其中，

$$\int \frac{d^3q'}{E_{q'}} M_L = 2\int d^3q' \int dq'_0 M_L \frac{1}{2E_{q'}} \delta(q'_0 - E_{q'})$$

$$= 2\int d^3q' \int dq'_0 M_L \frac{1}{2E_{q'}} \{\delta(q'_0 - E_{q'}) + \delta(q'_0 + E_{q'})\}\theta(q'_0)$$

$$= 2\int d^4q' M_L \delta(q'^2_0 - E^2_{q'})\theta(q'_0)$$

$$= 2\int d^4q' M_L \delta(q'^2 + m_4^2)\theta(q_0'), \tag{10.31}$$

$M_L = \delta^{(4)}(p'+q'-p-q)|M_{fi}|^2$是一个Lorentz不变的被积函数，在上式的推导里曾使用了(5.142)式。令$N_L = \int \frac{d^3q'}{E_{q'}} M_L$(Lorentz不变量)，并重复上式的推证可得

$$\int \frac{d^3p'}{E_{p'}} \int \frac{d^3q'}{E_{q'}} M_L = 2\int d^4p' N_L \delta(p'^2 + m_3^2)\theta(p'_0), \tag{10.32}$$

以上的证明虽然是对初态粒子和终态粒子都是旋量粒子的情况进行的，但不难推广到任意的情况。因此，在（10.29）式里，尚待考察的因子是$(FVN^2_{i1}N^2_{i2})^{-1}$。我们仍以初、终态粒子均为旋量粒子的情形为例。这时，由（10.30)式，仅需证明$\left|\frac{\mathbf{p}}{E_p} - \frac{\mathbf{q}}{E_q}\right| \times E_p E_q$是一个Lorentz不变量。$\left|\frac{\mathbf{p}}{E_p} - \frac{\mathbf{q}}{E_p}\right|$是在任意参考系里，初态粒子的相对速度大小。假定在任意的运动参考系里，两个初态粒子的动量p、q有一夹角θ（见图10—1）。两粒子相对速度

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{E_p} - \frac{\mathbf{q}}{E_q} \tag{10.33}$$

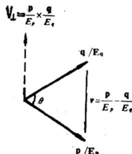


图10—1

位于p、q二矢量所在的平面内，倘若给速度v加上一个与此

平面垂直的虚部$i\mathbf{v}_\perp$，并不会改变初态粒子相对流强的大小。因此，可以把（10.33）式扩充为下式：

$$\mathbf{v}=(\frac{\mathbf{p}}{E_p}-\frac{\mathbf{q}}{E_q})+i(\frac{\mathbf{p}}{E_p}\times\frac{\mathbf{q}}{E_q}). \quad (10.34)$$

按（10.25）式，在任意参考系里，我们有$F\sim\sqrt{(\frac{\mathbf{p}}{E_p}-\frac{\mathbf{q}}{E_q})\cdot(\frac{\mathbf{p}}{E_p}-\frac{\mathbf{q}}{E_q})}$，而现在我们也可以写：

$$F\sim\sqrt{[(\frac{\mathbf{p}}{E_p}-\frac{\mathbf{q}}{E_q})+i(\frac{\mathbf{p}}{E_p}\times\frac{\mathbf{q}}{E_q})]\cdot[(\frac{\mathbf{p}}{E_p}-\frac{\mathbf{q}}{E_q})+i(\frac{\mathbf{p}}{E_p}\times\frac{\mathbf{q}}{E_q})]}$$

$$=\sqrt{\left|\frac{\mathbf{p}}{E_p}-\frac{\mathbf{q}}{E_q}\right|^2-\left|\frac{\mathbf{p}}{E_p}\times\frac{\mathbf{q}}{E_q}\right|^2} \quad (10.35)$$

据此，可将（10.30）右边的因子$E_pE_q\left|\frac{\mathbf{p}}{E_p}-\frac{\mathbf{q}}{E_p}\right|$用如下的因子来代替：

$$E_pE_q\sqrt{\left|\frac{\mathbf{p}}{E_p}-\frac{\mathbf{q}}{E_p}\right|^2-\left|\frac{\mathbf{p}}{E_p}\times\frac{\mathbf{q}}{E_q}\right|^2}$$

$$=\sqrt{\mathbf{p}^2E_q^2+\mathbf{q}^2E_p^2-2\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}E_pE_q-(|\mathbf{p}||\mathbf{q}|\sin\theta)^2}$$

$$=\sqrt{[(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})^2-2\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}E_pE_q+E_p^2E_q^2]-[|\mathbf{p}|^2|\mathbf{q}|^2-|\mathbf{p}|^2E_q^2-|\mathbf{q}|^2E_p^2+E_p^2E_q^2]}$$

$$=\sqrt{(p\cdot q)^2-p^2q^2}\ . \quad (10.36)a$$

所以在现在的情况下，（10.29）式的因子$(FVN_{i1}^2N_{i2}^2)^{-1}$是：

$$(FVN_{i1}^2N_{i2}^2)^{-1}=\frac{m_1m_2}{\sqrt{(p\cdot q)^2-p^2q^2}}. \quad (10.36)b$$

对于初粒态子是两个光子，以及一个光子和一个质量为$m$的旋量粒子的情形，用类似的方法分别得到：

$$(FVN_{i1}^2N_{i2}^2)^{-1}=\left(4\omega_{k_1}\omega_{k_2}\left|\frac{\mathbf{k}_1}{\omega_{k_1}}-\frac{\mathbf{k}_2}{\omega_{k_2}}\right|\right)^{-1}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{(k_1\cdot k_2)^2-k_1^2k_2^2}}, \quad (10.37)$$

和

$$(FVN_{i1}^2N_{i2}^2)^{-1}=\frac{m}{2}\left(\omega_kE_p\left|\frac{\mathbf{k}}{\omega_k}-\frac{\mathbf{p}}{E_p}\right|\right)^{-1}=\frac{m}{2\sqrt{(p\cdot k)^2-p^2k^2}} \quad (10.38)$$

至此，我们在（10.29）式的情况下证明了散射截面是一个Lorentz不变量。应当指出，这一结果是普遍正确的。基本粒子反应过程的截面与参考系无关，这不但与实验事实符合，而且与我们的物理直觉一致。因若不然，就会存在这样的参考系，在那里观察，某些本来存在的反应过程是不会发生的。

## §2 对粒子的极化求和与求平均

在这一节以前，我们曾假定初态粒子和终态粒子都有确定的极化。但在实验上，入射粒子束一般是非极化束（关于极化的概念，见附录二），而且一般并不去区分终态粒子的极化。在这种情形下，为了把理论结果与实验事实比较，就需要在截面和寿命的表示式里对初态粒子的极化求平均，并对终态粒子极化求和。经过此种运算得到的 $\sigma$ 和 $\tau$ 称为无极化截面和无极化寿命，记为$\sigma_{un}$和$\tau_{un}$。

**旋量粒子**

首先来看怎样对旋量粒子的自旋求和与求平均。所谓求和就是把粒子的自旋态按其自旋指标可能取的一切值加起来，所谓求平均就是把求和的结果用自旋态的可能数目去除。在 $\sigma$ 和 $\tau$ 的表示式里与旋量粒子自旋态有关的因子包含在$|M_{fi}|^2$内。这些因子通常具有以下形式：

$$|\overline{u}_{p's'}\,t u_{ps}|^2,\quad |\overline{u}_{p_1's_1'}\,t v_{p_2's_2'}|^2,$$

$$|\overline{v}_{p_1s_1}\,t u_{p_2s_2}|^2,\quad |\overline{v}_{ps}\,t v_{p's'}|^2$$

其中，t 是 $4\times4$ 矩阵，它是 $\gamma$ 矩阵的某一组合。现在把 $|\overline{u}_{p's'}\,t u_{ps}|^2$ 拿来对终态粒子自旋指标$s'$求和并对初态粒子自旋指标 $s$ 求平均：

$$\frac{1}{2}\sum_{s'=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}|\overline{u}_{p's'}\,t u_{ps}|^2$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{2}\overline{u}_{ps}\gamma_4 t^{+}\gamma_4\left(\sum_{s'=1}^{2}u_{p's'}\overline{u}_{p's'}\right)t u_{ps}$$

(1.197) a
(1.201) a

$$=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{2}\overline{u}_{ps}\gamma_4 t^{+}\gamma_4\frac{\gamma\cdot p'+im}{2im}t u_{ps}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{2}\overline{u}^{\alpha}_{ps}\gamma_4^{\alpha\beta}t^{+}_{\beta\delta}\gamma_4^{\delta\theta}\left(\frac{\gamma\cdot p'+im}{2im}\right)_{\theta\tau}t_{\tau\lambda}u^{\lambda}_{ps}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{2}\left(u^{\lambda}_{ps}\overline{u}^{\alpha}_{ps}\right)\gamma_4^{\alpha\beta}t^{+}_{\beta\delta}\gamma_4^{\delta\theta}\left(\frac{\gamma\cdot p'+im}{2im}\right)_{\theta\tau}t_{\tau\lambda}$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{\gamma_4 t^{+}\gamma_4\left(\frac{\gamma\cdot p'+im}{2im}\right)t\left(\frac{\gamma\cdot p+im}{2im}\right)\right\}. \tag{10.39}$$

利用公式（1.197）$a$、$b$和（1.201）$a$、$b$同样可得：

$$\sum_{s_1'=1}^{2}\sum_{s_2'=1}^{2}|\overline{u}_{p_1's_1'}tv_{p_2's_2'}|^2$$
$$=\mathrm{Tr}\left\{\gamma_4 t^+\gamma_4\left(\frac{\gamma\cdot p_1'+im}{2im}\right)t\left(\frac{\gamma\cdot p_2'-im}{2im}\right)\right\},\tag{10.40}$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{2}\sum_{s_1=1}^{2}\sum_{s_2=1}^{2}|\overline{v}_{p_1s_1}tu_{p_2s_2}|^2$$
$$=\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left\{\gamma_4 t^+\gamma_4\left(\frac{\gamma\cdot p_1-im}{2im}\right)t\left(\frac{\gamma\cdot p_2+im}{2im}\right)\right\},\tag{10.41}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{s'=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}|\overline{v}_{ps}tv_{p's'}|^2$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{\gamma_4 t^+\gamma_4\left(\frac{\gamma\cdot p-im}{2im}\right)t\left(\frac{\gamma\cdot p'-im}{2im}\right)\right\}.\tag{10.42}$$

**光子**

凡有始态或终态光子的电磁过程，总可以把其中一个光子的极化矢量从$S$矩阵元里提出来，并将$S$矩阵元写为：〔注1〕

$$R_{fi}\sim M_{fi}=L_\mu e^\mu_{k\lambda}.\tag{10.43}$$

这里，$e^\mu_{k\lambda}$是某一光子的极化矢量之分量，$L_\mu$是$S$矩阵元里的其余部分．与此相应，在$\sigma$的表示式里要进行如下的求和：

$$\sum_{\lambda=1}^{2}|L\cdot e_{k\lambda}|^2=\sum_{\lambda=1}^{2}L_\rho^* e^\rho_{k\lambda}L_\mu e^\mu_{k\lambda}$$
$$=L_\rho^* L_\mu\sum_{\lambda=1}^{2}e^\rho_{k\lambda}e^\mu_{k\lambda}.\tag{10.44}$$

利用电磁相互作用的规范不变性极易完成上式右边的求和．如第七章所述，（7.57）式与（7.54）式、（7.55）式等效，因而量子电磁场理论和电磁相互作用理论的规范对称性，既可以相对于（7.54）、（7.55）而言，也可以相对于（7.57）而言，两种做法是等效的．现在，把（7.57）式转到动量空间．因为

$$\Box\partial_\mu\alpha(x)=0,$$

故四矢$\partial_\mu\alpha(x)$与四矢$A_\mu(x)$应具有完全相似的付里叶展式：

$$\partial_\mu\alpha(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k\lambda}\frac{k^\mu}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}}\left(a_{k\lambda}e^{ik\cdot x}+\overline{a}_{k\lambda}e^{-ik\cdot x}\right),\tag{10.45 a}$$

〔注1〕 对光子极化求和还有别的方法，我们这里采用DAVID LURIE的方法，这一方法较之别的方法更为明确简单．见DAVID LURIE《Particles and Fields》一书，pp.253—256．

此式与$A_\mu(x)$的展式（7.6）$a$相比，只是把后者的$e^\mu_{k\lambda}$换成光子的四维动量分量$k^\mu$，由此不难看出，（7.57）式在动量空间具有以下形式

$$e^\mu_{k\lambda} \to e^\mu_{k\lambda} + k^\mu. \tag{10.45 b}$$

因此散射截面$\sigma(\sim|L_\mu e^\mu_{k\lambda}|^2)$的规范不变性，导致

$$L_\mu k^\mu = 0, \tag{10.46 a}$$

和

$$L^*_\mu k^\mu = 0. \tag{10.46 b}$$

另方面，利用（1.284）$b$式可将（10.44）式写为

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda=1}^{2}|L\cdot e_{k\lambda}|^2 &= L^*_\rho L_\mu\Big(\sum_{\lambda=1}^{4} e^\rho_{k\lambda}\ e^\mu_{k\lambda} - e_{k3}e_{k3} - e_{k4}e_{k4}\Big)\\ &= L^*_\rho L_\mu\Big(\delta^{\rho\mu} - \frac{k^\rho k^\mu}{(k\cdot\eta)^2} - \frac{k^\mu\eta^\rho + \eta^\mu k^\rho}{k\cdot\eta}\Big),\end{aligned}$$

按照（10.46）式，上式右边第二三两项乘积均为零，所以

$$\sum_{\lambda=1}^{2}|L\cdot e_{k\lambda}|^2 = L^*_\mu L_\mu. \tag{10.47}$$

我们看到，此式右边的结果是将左边的$|L\cdot e_{k\lambda}|^2$简单地改写为$|L|^2$，并取消求和号$\sum$而得到的，当对光子的极化求平均时，上式两边还要插入数值因子$\frac{1}{2}$，这可以作为一个规则。利用这一规则可以十分简易地完成$|M_{fi}|^2$中对光子极化的所有求和与求平均。

以上对粒子极化求和与平均的工作给出了主要的方法，尚待完成的是计算(10.39)—（10.42）式中的阵迹。我们将结合具体实例来阐明计算阵迹的方法。

## §3 Compton散射

在实验室参考系里，初态电子（靶粒子）处于静止状态，而初态光子是入射粒子。因此，我们将在实验室参考系里来讨论这一过程。Compton散射的最低价微扰效应便是二阶效应，所以这里直接运用第九章§5第（二）小节的结果，相应的散射振幅由(9.77)和（9.78）给出。完成对$q$的积分后，我们有

$$S_{fi} = \frac{e^2}{V^2}\Big(\frac{m^2}{4|\mathbf{k}||\mathbf{k}'|E_pE_{p'}}\Big)^{1/2}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p'+k'-p-k)$$
$$\times\Big\{e^\mu_{k'\lambda'}\ \bar{u}_{p's'}\ \gamma_\mu\Big[\frac{-1}{\gamma\cdot(p+k)-im}\Big]\gamma_\nu u_{ps}\ e^\nu_{k\lambda}$$

$$+ e^{\mu}_{k\lambda} \bar{u}_{p's'} \gamma_\mu \left(\frac{-1}{\gamma\cdot(p-k')-im}\right) \gamma_\nu u_{ps} e^{\nu}_{k'\lambda'}\Big\}. \tag{10.48}$$

将上式右边花括号内第一项的求和指标μ、ν对换得到

$$S_{fi} = \frac{i}{V^2}\left(\frac{m^2}{4|\mathbf{k}||\mathbf{k}'|E_pE_{p'}}\right)^{1/2}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p'+k'-p-k)M_{fi}, \tag{10.49}$$

其中，

$$M_{fi} = \bar{u}_{p's'}\, e^{\nu}_{k'\lambda'} t_{\nu\mu}\, e^{\mu}_{k\lambda}\, u_{ps}, \tag{10.50)a}$$

$$t_{\nu\mu} = ie^2\left(\gamma_\nu \frac{\gamma\cdot(p+k)+im}{(p+k)^2+m^2}\gamma_\mu + \gamma_\mu \frac{\gamma\cdot(p-k')+im}{(p-k')^2+m^2}\gamma_\nu\right). \tag{10.50)b}$$

在实验室参考系里，初态电子相对静止：

$$\mathbf{p}=0,\ E_p=m,\quad (m\text{是电子质量}) \tag{10.51}$$

因此，由（10.29）式和（10.38）式得到

$$\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{m}{4|\mathbf{k}|}\int\frac{d^3k'}{|\mathbf{k}'|}\frac{d^3p'}{E_{p'}}\delta^{(4)}(p'+k'-p-k)|M_{fi}|^2. \tag{10.52}$$

我们不去区分初态粒子和终态粒子的极化，按照上一节的讨论，这时应当计算无极化截面$\sigma_{un}$：

$$\sigma_{un} = \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{m}{4|\mathbf{k}|}\int\frac{d^3k'}{|\mathbf{k}'|}\frac{d^3p'}{E_{p'}}\delta^{(4)}(p'+k'-p-k)\,\frac{1}{4}\sum_{s,s'}^{2}\sum_{\lambda,\lambda'}^{2}|M_{fi}|^2$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{m}{4|\mathbf{k}|}\int\frac{d^3k'}{|\mathbf{k}'|}\frac{d^3p'}{E_{p'}}\delta^{(4)}(p'+k'-p-k)$$

$$\times\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left\{\gamma_4 t^{+}_{\nu\mu}\gamma_4\left(\frac{\gamma\cdot p'+im}{2im}\right)t_{\nu\mu}\left(\frac{\gamma\cdot p+im}{2im}\right)\right\}. \tag{10.53}$$

为了计算此式右边的阵迹，首先对$t_{\nu\mu}$进行可能的简化。为此，我们回到（10.50)$a$式。由该式看到，$t_{\nu\mu}$作用于$u_{ps}$，因而有：

$$[\gamma\cdot(p+k)+im]\gamma_\mu u_{ps} = (\gamma\cdot p+im)\gamma_\mu u_{ps} + \gamma\cdot k\gamma_\mu u_{ps}$$

$$= \gamma_\mu(2\gamma_\mu p_\mu - \gamma\cdot p + im)u_{ps} + \gamma\cdot k\gamma_\mu u_{ps}$$

$$= (2p_\mu + \gamma\cdot k\gamma_\mu)u_{ps}, \tag{10.54)a}$$

这里曾使用了（1.143)$a$式，并应注意，在同一项里出现三个相同的Lorentz指标并不表示求和。用类似的方法可得

$$[\gamma\cdot(p-k')+im]\gamma_\mu u_{ps} = (2p_\mu - \gamma\cdot k'\gamma_\mu)u_{ps}. \tag{10.54)b}$$

此外，利用质壳关系$p^2=-m^2$和$k^2=k'^2=0$可将（10.50)$b$式的分母作如下简化：

$$(p-k')^2+m^2=-2p\cdot k' \tag{10.55a}$$

$$(p+k)^2+m^2=2p\cdot k \tag{10.55b}$$

按（10.54）式和（10.55）式便可把$t_{\nu\mu}$简化为：

$$t_{\nu\mu}=ie^2\left(\gamma_\nu\frac{2p_\mu+\gamma\cdot k\gamma_\mu}{2p\cdot k}+\gamma_\mu\frac{2p_\nu-\gamma\cdot k'\gamma_\nu}{-2p\cdot k'}\right). \tag{10.56}$$

其次，可将（10.53）式右边的$\gamma_4$消去．在推导（10.47）式时已经看到，$\sum_{\lambda=3}^{4}|L\cdot e_{k\lambda}|^2$对散射过程的无极化截面$\sigma_{un}$没有贡献，因此，对$\sigma_{un}$有实际影响的极化矢量是代表横光子的矢量$e_{k1}$和$e_{k2}$以及$e_{k'1}$和$e_{k'2}$，这些极化矢量在特定的参考系里只有空间分量而无时间分量〔见(1.263)$^a_b$〕．与此相应，在（10.53）式里对$\nu$、$\mu$两对指标的求和事实上只需从1加到3，$\nu$、$\mu=4$ 的那些求和项只具有形式的意义．另方面，$M_{fi}$〔从而$\frac{1}{4}\sum_{s,s'}^{2}\sum_{\lambda,\lambda'}^{2}|M_{fi}|^2$〕是一个Lorentz不变量．所以我们可以在特定参考系里来计算（10.53）式右边的阵迹，然后再把计算结果转到实验室参考系．由（10.56）式易得

$$\gamma_4 t^+_{jl}\gamma_4=ie^2\left(\frac{2p_l+\gamma_l\gamma\cdot k}{2p\cdot k}\gamma_j+\frac{2p_j-\gamma_j(\gamma\cdot k')}{-2p\cdot k'}\gamma_l\right),\quad j、l=1、2、3$$

既然在特定参考系里，$\nu$、$\mu=4$ 的项对所要计算的阵迹不做贡献，现在就可以把上式扩充为：

$$\gamma_4 t^+_{\nu\mu}\gamma_4=ie^2\left(\frac{2p_\mu+\gamma_\mu\gamma\cdot k}{2p\cdot k}\gamma_\nu+\frac{2p_\nu-\gamma_\nu\gamma\cdot k'}{-2p\cdot k'}\gamma_\mu\right). \tag{10.57}$$

现在，把（10.56）和（10.57）代入(10.53）式右边的求迹符号下，便得到

$$\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left\{\gamma_4 t^+_{\nu\mu}\gamma_4\left(\frac{\gamma\cdot p'+im}{2im}\right)t_{\nu\mu}\left(\frac{\gamma\cdot p+im}{2im}\right)\right\}$$

$$=\underbrace{\frac{e^4}{4}\frac{1}{16m^2(p\cdot k)^2}\mathrm{Tr}\left\{(2p_\mu+\gamma_\mu\gamma\cdot k)\gamma_\nu(\gamma\cdot p'+im)\gamma_\nu(2p_\mu+\gamma\cdot k\gamma_\mu)(\gamma\cdot p+im)\right\}}_{A}$$

$$-\underbrace{\frac{e^4}{4}\frac{1}{16m^2(p\cdot k)(p\cdot k')}\mathrm{Tr}\left\{(2p_\mu+\gamma_\mu\gamma\cdot k)\gamma_\nu(\gamma\cdot p'+im)\gamma_\mu(2p_\nu-\gamma\cdot k'\gamma_\nu)(\gamma\cdot p+im)\right\}}_{B}$$

$$-\underbrace{\frac{e^4}{4}\frac{1}{16m^2(p\cdot k)(p\cdot k')}\mathrm{Tr}\left\{(2p_\nu-\gamma_\nu\gamma\cdot k')\gamma_\mu(\gamma\cdot p'+im)\gamma_\nu(2p_\mu+\gamma\cdot k\gamma_\mu)(\gamma\cdot p+im)\right\}}_{C}$$

$$+\underbrace{\frac{e^4}{4}\frac{1}{16m^2(p\cdot k')^2}\mathrm{Tr}\left\{2p_\nu-\gamma_\nu\gamma\cdot k')\gamma_\mu(\gamma\cdot p'+im)\gamma_\mu(2p_\nu-\gamma\cdot k'\gamma_\nu)(\gamma\cdot p+im)\right\}}_{D}. \tag{10.58}$$

因为μ、ν都是求和指标，故若在$A$中将$k$换成$-k'$便得到$D$，在$B$中将$k$换成$-k'$，$k'$换成$-k$便得到$C$。这样，就只需要计算$A$和$B$。在$A$中共包含十六项阵迹，按照附录一里的公式（1），其中有八项是奇数个γ矩阵乘积的迹，因而这八项均为零。另外还有八项是偶数个γ矩阵乘积的迹，计算如下：

$$A_1=\frac{e^4}{4}\frac{1}{16m^2(p\cdot k)^2}\mathrm{Tr}(2p_\mu\underbrace{\gamma_\nu\gamma\cdot p'\gamma_\nu}_{-2\gamma\cdot p'\text{〔见(1.74)}c\text{〕}}2p_\mu\gamma\cdot p)$$

$$=\frac{e^4}{4}\frac{1}{16m^2(p\cdot k)^2}[-8p^2\underbrace{\mathrm{Tr}\gamma\cdot p'\gamma\cdot p}_{4p'\cdot p\text{〔见附录一公式(2)〕}}]=\frac{e^4}{2}\frac{p'\cdot p}{(p\cdot k)^2},$$

$$A_2=\frac{e^4}{4}\frac{1}{16m^2(p\cdot k)^2}\mathrm{Tr}(2p_\mu\underbrace{\gamma_\nu\gamma\cdot p'\gamma_\nu}_{-2r\cdot p'}\gamma\cdot k\gamma_\mu\gamma\cdot p)$$

$$=\frac{e^4}{4}\frac{1}{16m^2(p\cdot k)^2}[-4\mathrm{Tr}(\underbrace{\gamma\cdot p'\gamma\cdot k}_{4p'\cdot k}\underbrace{\gamma\cdot p\gamma\cdot p}_{p^2\text{〔见 (1.74)}b\text{〕}})]$$

$$=\frac{e^4}{4}\frac{p'\cdot k}{(p\cdot k)^2},$$

$$A_3=\frac{e^4}{4}\frac{1}{16m^2(p\cdot k)^2}\underbrace{\mathrm{Tr}(2p_\mu\gamma_\nu im\gamma_\nu 2p_\mu im)}_{64m^4\text{〔见(1.71)}b\text{，并注意对}\nu\text{求和〕}}=e^4\frac{m^2}{(p\cdot k)^2},$$

$$A_4=\frac{e^4}{4}\frac{1}{16m^2(p\cdot k)^2}\mathrm{Tr}(2p_\mu\gamma_\nu im\gamma_\nu\gamma\cdot k\gamma_\mu im)$$

$$=\frac{e^4}{4}\frac{1}{16m^2(p\cdot k)^2}[-2m^2\underbrace{\mathrm{Tr}(\gamma_\nu\gamma_\nu\gamma\cdot k\gamma\cdot p)}_{16p\cdot k\text{（注意}\gamma_\nu\gamma_\nu=4\text{）}}]=-\frac{e^4}{2}\frac{1}{p\cdot k},$$

$$A_5=\frac{e^4}{4}\frac{1}{16m^2(p\cdot k)^2}\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma\cdot k\underbrace{\gamma_\nu\gamma\cdot p'\gamma_\nu}_{-2\gamma\cdot p'}2p_\mu\gamma\cdot p)$$

$$=\frac{e^4}{4}\frac{1}{16m^2(p\cdot k)^2}[-4\mathrm{Tr}(\underbrace{\gamma\cdot k\gamma\cdot p'}_{4p'\cdot k}\underbrace{\gamma\cdot p\gamma\cdot p}_{p^2})]=\frac{e^4}{4}\frac{p'\cdot k}{(p\cdot k)^2},$$

$$A_6=\frac{e^4}{4}\frac{1}{16m^2(p\cdot k)^2}\mathrm{Tr}(\underbrace{\gamma_\mu\gamma\cdot k\gamma_\nu\gamma\cdot p'\gamma_\nu\gamma\cdot k\gamma_\mu}_{4\gamma\cdot k\gamma\cdot p'\gamma\cdot k}\gamma\cdot p)$$

$$=\frac{e^4}{4}\frac{4}{16m^2(p\cdot k)^2}\underbrace{\mathrm{Tr}(\gamma\cdot k\gamma\cdot p'\gamma\cdot k\gamma\cdot p)}_{4p'\cdot kp\cdot k+4p\cdot kp'\cdot k\text{〔见附录一公式（7）〕}}$$

$$=\frac{e^4}{2}\frac{p'\cdot k}{m^2p\cdot k},$$

$$A_7=\frac{e^4}{4}\frac{1}{16m^2(p\cdot k)^2}\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma\cdot k\gamma_\nu im\gamma_\nu 2p_\mu im)$$

$$=\frac{e^4}{4}\frac{1}{16m^2(p\cdot k)^2}[-8m^2\underbrace{\mathrm{Tr}(\gamma\cdot k\gamma\cdot p)}_{4p\cdot k}]$$

$$=-\frac{e^4}{2}\frac{1}{p\cdot k}.$$

$$A_8=\frac{e^4}{4}\frac{1}{16m^2(p\cdot k)^2}\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\underbrace{\gamma\cdot k\gamma_\nu im\gamma_\nu\gamma\cdot k}_{\gamma\cdot k\gamma\cdot k=k^2=0}\gamma_\mu im)=0.$$

把以上结果相加就得到$A$：

$$A=A_1+A_2+\cdots\cdots+A_8$$
$$=\frac{e^4}{2}\frac{p'\cdot p}{(p\cdot k)^2}+\frac{e^4}{2}\frac{p'\cdot k}{(p\cdot k)^2}+\frac{e^4}{2m^2}\frac{p'\cdot k}{p\cdot k}+e^4\frac{m^2}{(p\cdot k)^2}$$
$$-e^4\frac{1}{p\cdot k},\tag{10.59}$$

将此式右边的$k$换成$-k'$就得到$D$：

$$D=\frac{e^4}{2}\frac{p'\cdot p}{(p\cdot k')^2}-\frac{e^4}{2}\frac{p'\cdot k'}{(p\cdot k')^2}+\frac{e^4}{2m^2}\frac{p'\cdot k'}{p\cdot k'}+e^4\frac{m^2}{(p\cdot k')^2}$$
$$+e^4\frac{1}{p\cdot k'}\tag{10.60}$$

同样地，可将$B$展开为十六项阵迹之和，其中有八项是奇数个γ矩阵乘积的积，其值为零，另有八项是偶数个γ矩阵乘积的迹，计算如下：

$$B_1=\frac{e^4}{4}\frac{1}{16m^2(p\cdot k)(p\cdot k')}\mathrm{Tr}(2p_\mu\gamma_\nu\gamma\cdot p'\gamma_\mu 2p_\nu\gamma\cdot p)$$

$$=\frac{e^4}{4}\frac{4}{16m^2(p\cdot k)(p\cdot k')}\underbrace{\mathrm{Tr}(\gamma\cdot p\gamma\cdot p'\gamma\cdot p\gamma\cdot p)}_{p^2\mathrm{Tr}\gamma\cdot p\gamma\cdot p'}=-\frac{e^4}{4}\frac{p'\cdot p}{(p\cdot k)(p\cdot k')},$$

$$B_2=\frac{-e^4}{4}\frac{1}{16m^2(p\cdot k)(p\cdot k')}\mathrm{Tr}(\underbrace{2p_\mu\gamma_\nu\gamma\cdot p'\gamma_\mu\gamma\cdot k'\gamma_\nu\gamma\cdot p}_{2\gamma_\nu\gamma\cdot p'\gamma\cdot p\gamma\cdot k'\gamma_\nu\gamma\cdot p})$$

$$=\frac{-e^4}{4}\frac{1}{16m^2(p\cdot k)(p\cdot k')}[-4\underbrace{\mathrm{Tr}(\gamma\cdot k'\gamma\cdot p\gamma\cdot p'\gamma\cdot p)}_{4p\cdot k'\,p'\cdot p-4p'\cdot k'\,p^2+4p\cdot k'\,p'\cdot p}]$$

$$=\frac{e^4}{2m^2}\frac{p'\cdot p}{p\cdot k}+\frac{e^4}{4}\frac{p'\cdot k'}{(p\cdot k)(p\cdot k')},$$

$$B_3=\frac{e^4}{4}\frac{1}{16m^2(p\cdot k)(p\cdot k')}\underbrace{\mathrm{Tr}(2p_\mu\gamma_\nu im\gamma_\mu 2p_\nu im)}_{4m^4\mathrm{Tr}I_4=16m^4}=\frac{e^4}{4}\frac{m^2}{(p\cdot k)(p\cdot k')},$$

$$B_4=\frac{-e^4}{4}\frac{1}{16m^2(p\cdot k)(p\cdot k')}\mathrm{Tr}(\underbrace{2p_\mu\gamma_\nu im\gamma_\mu\gamma\cdot k'\gamma_\nu im}_{-2m^2\gamma_\nu\gamma\cdot p\gamma\cdot k'\gamma_\nu=-8m^2p\cdot k'})$$

$$=\frac{e^4}{2}\frac{1}{p\cdot k},$$

$$B_5=\frac{e^4}{4}\frac{1}{16m^2(p\cdot k)(p\cdot k')}\mathrm{Tr}(\underbrace{\gamma_\mu\gamma\cdot k\gamma_\nu\gamma\cdot p'\gamma_\mu 2p_\nu\gamma\cdot p}_{2\gamma_\mu\gamma\cdot k\gamma\cdot p\gamma\cdot p'\gamma_\mu\gamma\cdot p=-4\gamma\cdot p'\gamma\cdot p\gamma\cdot k\gamma\cdot p})$$

$$=-\frac{e^4}{2m^2}\frac{p'\cdot p}{p\cdot k'}-\frac{e^4}{4}\frac{p'\cdot k}{(p\cdot k)(p\cdot k')}$$

$$B_6=\frac{-e^4}{4}\frac{1}{16m^2(p\cdot k)(p\cdot k')}\mathrm{Tr}(\underbrace{\gamma_\mu\gamma\cdot k\gamma_\nu\gamma\cdot p'\gamma_\mu\gamma\cdot k'\gamma_\nu\gamma\cdot p}_{k_\alpha p'_\beta k'_\lambda\underbrace{\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\beta\gamma_\mu}_{-2\gamma_\beta\gamma_\nu\gamma_\alpha\text{〔见附录一，(9c式)〕}}\gamma_\lambda\gamma_\nu\gamma\cdot p})$$

$$=\frac{-e^4}{4}\frac{-2}{16m^2(p\cdot k)(p\cdot k')}\mathrm{Tr}(k_\alpha p'_\beta k'_\lambda\gamma_\beta\underbrace{\gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\lambda\gamma_\nu}_{4\delta_{\alpha\lambda}\text{〔附录一，(9b)式〕}}\gamma\cdot p)$$

$$=\frac{-e^4}{4}\frac{-8k'\cdot k}{16m^2(p\cdot k)(p\cdot k')}\underbrace{\mathrm{Tr}(\gamma\cdot p'\gamma\cdot p)}_{4p'\cdot p}=\frac{e^4}{2m^2}\frac{(p'\cdot p)(k'\cdot k)}{(p\cdot k)(p\cdot k')},$$

$$B_7=\frac{e^4}{4}\frac{1}{16m^2(p\cdot k)(p\cdot k')}\mathrm{Tr}(\underbrace{\gamma_\mu\gamma\cdot k\gamma_\nu im\gamma_\mu 2p_\nu im}_{-2m^2\gamma_\mu\gamma\cdot k\gamma\cdot p\gamma_\mu=-8m^2p\cdot k})$$

$$=-\frac{e^4}{2}\frac{1}{p\cdot k'},$$

$$B_8=\frac{-e^4}{4}\frac{1}{16m^2(p\cdot k)(p\cdot k')}\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma\cdot k\underbrace{\gamma_\nu im\gamma_\mu\gamma\cdot k'\gamma_\nu im)}_{-m^2k'_\alpha 4\delta_{\mu\alpha}=-4m^2k'_\mu}$$

$$=\frac{e^4}{4}\frac{k'\cdot k}{(p\cdot k)(p\cdot k')}.$$

把以上八项相加即得到$B$：

$$B=B_1+B_2+\cdots+B_8=\frac{-e^4}{4}\frac{p'\cdot p}{(p\cdot k)(p\cdot k')}+\frac{e^4}{2m^2}\frac{p'\cdot p}{p\cdot k}$$

$$-\frac{e^4}{2m^2}\frac{p'\cdot p}{p\cdot k}-\frac{e^4}{4}\frac{p'\cdot k'}{(p\cdot k)(p\cdot k')}+\frac{e^4}{4}\frac{k'\cdot k}{(p\cdot k)(p\cdot k')}+\frac{e^4}{2}\frac{1}{p\cdot k}$$

$$+\frac{e^4}{4}\frac{m^2}{(p\cdot k)(p\cdot k')}+\frac{e^4}{2m^2}\frac{(p'\cdot p)(k'\cdot k)}{(p\cdot k)(p\cdot k')}-\frac{e^4}{4}\frac{p'\cdot k}{(p\cdot k)(p\cdot k')}$$

$$-\frac{e^4}{2}\frac{1}{p\cdot k'}.\tag{10.61}$$

把上式中的$k$换成$-k'$，$k'$换成$-k$就得到$C$：

$$C=-\frac{e^4}{4}\frac{p'\cdot p}{(p\cdot k)(p\cdot k')}-\frac{e^4}{2m^2}\frac{p'\cdot p}{p\cdot k'}+\frac{e^4}{2m^2}\frac{p'\cdot p}{p\cdot k}-\frac{e^4}{4}\frac{p'\cdot k}{(p\cdot k)(p\cdot k')}$$

$$+\frac{e^4}{4}\frac{k'\cdot k}{(p\cdot k)(p\cdot k')}-\frac{e^4}{2}\frac{1}{p\cdot k'}+\frac{e^4}{4}\frac{m^2}{(p\cdot k)(p\cdot k')}$$

$$+\frac{e^4}{2m^2}\frac{(p'\cdot p)(k'\cdot k)}{(p\cdot k)(p\cdot k')}+\frac{e^4}{4}\frac{p'\cdot k'}{(p\cdot k)(p\cdot k')}+\frac{e^4}{2}\frac{1}{p\cdot k}\tag{10.62}$$

把（10.59）、（10.60）、（10.61）、（10.62）诸式代入（10.58），并利用关系式：

$$p'\cdot k'=p\cdot k,\tag{10.63a}$$

$$p'\cdot k=p\cdot k',\tag{10.63b}$$

$$p'\cdot p=p\cdot k-p\cdot k'-m^2,\tag{10.63c}$$

$$k\cdot k'=p\cdot k-p\cdot k',\tag{10.63d}$$

消去数积$p'\cdot k'$、$p'\cdot k$、$p'\cdot p$、$k\cdot k'$，就得到：

$$\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left\{\gamma_4 t^+_{\nu\mu}\gamma_4\left(\frac{\gamma\cdot p'+im}{2im}\right)t_{\nu\mu}\left(\frac{\gamma\cdot p+im}{2im}\right)\right\}$$

$$=\frac{e^4}{2m^2}\left[\left(\frac{m^2}{p\cdot k}-\frac{m^2}{p\cdot k'}\right)^2-2\left(\frac{m^2}{p\cdot k}-\frac{m^2}{p\cdot k'}\right)+\left(\frac{p\cdot k}{p\cdot k'}+\frac{p\cdot k'}{p\cdot k}\right)\right].\tag{10.64}$$

(10.63) 式可直接从能量、动量守恒定律

$$p' + k' = p + k, \tag{10.65}$$

和质壳关系：

$$p'^2 = p^2 = -m^2 \tag{10.66)a}$$

$$k'^2 = k^2 = 0. \tag{10.66)b}$$

导出来。

在实验室参考系里，我们有：

$$p \cdot k = imi|\mathbf{k}| = -m|\mathbf{k}|,$$

$$p \cdot k' = -m|\mathbf{k}'|,$$

因此，(10.64) 式成为

$$\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left\{\gamma_4 t^{+}_{\nu\mu} r_4 \left(\frac{\gamma \cdot p' + im}{2im}\right) t_{\nu\mu} \left(\frac{\gamma \cdot p + im}{2im}\right)\right\}$$

$$= \frac{e^4}{2m^2}\left[\left(\frac{m}{|\mathbf{k}|} - \frac{m}{|\mathbf{k}'|}\right)^2 + 2\left(\frac{m}{|\mathbf{k}|} - \frac{m}{|\mathbf{k}'|}\right) + \left(\frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}'|} + \frac{|\mathbf{k}'|}{|\mathbf{k}|}\right)\right]. \tag{10.67}$$

把 (10.67) 代入 (10.53) 得

$$\sigma_{un} = \frac{\alpha^2}{2m}\frac{1}{|\mathbf{k}|}\int \frac{d^3k'}{|\mathbf{k}'|}\frac{d^3p'}{E_{p'}}\delta^{(4)}(p' + k' - p - k)$$

$$\times \left[\left(\frac{m}{|\mathbf{k}|} - \frac{m}{|\mathbf{k}'|}\right)^2 + 2\left(\frac{m}{|\mathbf{k}|} - \frac{m}{|\mathbf{k}'|}\right) + \left(\frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}'|} + \frac{|\mathbf{k}'|}{|\mathbf{k}|}\right)\right] \tag{10.68}$$

式中，

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = 1/137$$

是精细结构常数，它便是第八章§2所提到的电磁相互作用耦合强度。

为了在(10.68)式中完成对终态粒子动量的积分，我们把$d^3k'$写为

$$d^3k' = |\mathbf{k}'|^2 d|\mathbf{k}'|\sin\theta d\theta d\varphi = |\mathbf{k}'|^2 d|\mathbf{k}'| d\Omega, \tag{10.69}$$

这相当于在粒子的三维动量空间选取球极坐标，而极轴便与初态光子的动量$\mathbf{k}$一致。在(10.69)式里对$|\mathbf{k}'|$的积分又可转变为对终态粒子总能量$E_f = |\mathbf{k}'| + E_{p'}$的积分：

$$d|\mathbf{k}'| = \frac{d|\mathbf{k}'|}{dE_f} dE_f, \tag{10.70}$$

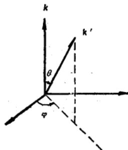



图10—2 动量空间球坐标，极轴方向与k重合。

把（10.68）式里的δ函数写成空间、时间两部分的乘积：

$$\delta^{(4)}(p'+k'-p-k)=\delta^{(3)}(\mathbf{p}'+\mathbf{k}'-\mathbf{p}-\mathbf{k})\delta(E_{p'}+|\mathbf{k}'|-m-|\mathbf{k}|),$$

则对$E_f$的积分，就是要按能量守恒定律

$$E_{p'}+|\mathbf{k}'|=m+|\mathbf{k}| \tag{10.71a}$$

消去δ函数的时间部分$\delta(E_{p'}+|\mathbf{k}'|-m-|\mathbf{k}|)$。在（10.68）式里对$\mathbf{p}'$的积分只需按动量守恒定律

$$\mathbf{p}'=\mathbf{k}-\mathbf{k}' \tag{10.71b}$$

消去δ函数的空间部分$\delta^{(3)}(\mathbf{p}'+\mathbf{k}'-\mathbf{p}-\mathbf{k})$。因此，在（10.68）式里的积分$\int dE_f d^3p'$便代之以能量动量守恒定律（10.71）：

$$\sigma_{un}=\frac{\alpha^2}{2m}\frac{1}{|\mathbf{k}|}\int d\Omega\frac{|\mathbf{k}'|}{E_{p'}}\frac{d|\mathbf{k}'|}{dE_f}$$

$$\times\left[\left(\frac{m}{|\mathbf{k}|}-\frac{m}{|\mathbf{k}'|}\right)^2+2\left(\frac{m}{|\mathbf{k}|}-\frac{m}{|\mathbf{k}'|}\right)+\left(\frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}'|}+\frac{|\mathbf{k}'|}{|\mathbf{k}|}\right)\right] \tag{10.72}$$

为了求出上式的导数$\frac{d|\mathbf{k}'|}{dE_f}$，首先要从守恒定律（10.71）出发导出以下诸关系：将（10.71）$b$代入能量动量关系式$E_{p'}^2=|\mathbf{p}'|^2+m^2$得

$$E_{p'}^2=|\mathbf{k}|^2+|\mathbf{k}'|^2-2|\mathbf{k}||\mathbf{k}'|\cos\theta+m^2, \tag{10.73a}$$

再将（10.71）$a$式平方又得

$$E_{p'}^2=m^2+|\mathbf{k}|^2+|\mathbf{k}'|^2+2m|\mathbf{k}|-2m|\mathbf{k}'|-2|\mathbf{k}||\mathbf{k}'|, \tag{10.73b}$$

以上二式结合就得到如下的Compton条件：

$$|\mathbf{k}'|=\frac{m|\mathbf{k}|}{m+|\mathbf{k}|(1-\cos\theta)}, \tag{10.74a}$$

或

$$\frac{m}{|\mathbf{k}|}-\frac{m}{|\mathbf{k}'|}=\cos\theta-1. \tag{10.74b}$$

现在，利用（10.73）$a$和$E_f=|\mathbf{k}'|+E_{p'}$可得

$$\frac{d|\mathbf{k}'|}{dE_f}=\frac{E_{p'}}{E_{p'}+|\mathbf{k}'|-|\mathbf{k}|\cos\theta}, \tag{10.75}$$

再利用（10.71）$a$和（10.74）$a$，就可把（10.75）式化为下式：

$$\frac{d|\mathbf{k}'|}{dE_f}=\frac{E_{p'}}{m}\frac{|\mathbf{k}'|}{|\mathbf{k}|}, \tag{10.76}$$

把（10.74）$b$和（10.76）代入（10.72），便得到过程的无极化截面：

$$\sigma_{un}=\frac{\alpha^2}{2m^2}\frac{1}{|\mathbf{k}|^2}\int d\Omega|\mathbf{k}'|^2\left(\frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}'|}+\frac{|\mathbf{k}'|}{|\mathbf{k}|}-\sin^2\theta\right). \tag{10.77}$$

$\sigma_{un}$是在单位时间内，单位入射流强下，入射光子被散射（无论散射到任何方向）的总几率，亦即是当不考虑初态和终态粒子极化时，Compton散射过程的总截面。把(10.77）式两边对$\Omega$求导，就得到散射过程的微分截面

$$\frac{d\sigma_{un}}{d\Omega}=\frac{\alpha^2}{2m^2}\frac{|\mathbf{k}'|^2}{|\mathbf{k}|^2}\left(\frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}'|}+\frac{|\mathbf{k}'|}{|\mathbf{k}|}-\sin^2\theta\right). \tag{10.78}$$

它是单位时间内，单位入射流强下，入射光子被散射到（$\theta$、$\varphi$）方向的单位立体角内的几率。（10.78）称为Klein-Nishina公式。

下面我们来看Compton散射过程的非相对论极限。由条件（10.74）$a$看到，当入射光子能量$|\mathbf{k}|\ll$电子静质量$m$时，

$$|\mathbf{k}'|\approx|\mathbf{k}|,$$

因而（10.78）式成为：

$$\frac{d\sigma_{un}}{d\Omega}=\frac{\alpha^2}{2m^2}(1+\cos^2\theta), \tag{10.79$a$}$$

相应地，（10.77）式成为：

$$\sigma_{un}=\frac{\alpha^2}{2m^2}\int(1+\cos^2\theta)\sin\theta d\theta d\varphi=\frac{8\pi}{3}\frac{\alpha^2}{m^2}. \tag{10.79$b$}$$

（10.79）式是J.J. Thomson在1933年从经典理论得到的，称为Thomson 公式。与此相应，Compton散射的非相对论极限就称为Thomson 散射。前者属量子散射效应，而后者是经典效应，仅当

$$|\mathbf{k}|\sim m$$

时，才需要考虑量子效应。

由于

$$\frac{\alpha^2}{m^2}=r_0^2, \tag{10.80}$$

（$r_0=2.8\times10^{-13}$厘米是经典电子的半径），故射截面具有面积的量纲。

## §4 正、负电子偶的双光子湮没

如果我们只考虑纯粹的 QED 效应，那么，$e^+e^-$ 碰撞可能产生以下几种反应（主要的）：

$$e^+e^- \longrightarrow e^+e^-,$$
$$e^+e^- \longrightarrow 2\gamma,$$
$$e^+e^- \longrightarrow \mu^+\mu^-.$$

第一、三两种反应的$S$矩阵元已在上一章给出．在下一节里将要计算第三种反应的截面．在这一节里，我们来计算第二种反应过程的截面，并算出正电子通过物质时的湮没率．

由于终态是两个全同粒子（光子），故这一过程在二阶近似下的Feynman图有两个：直接散射图10—3$a$与交换散射图10—3$b$．使用第九章所述的 Feynman 规则，就可按图10—3 写出过程的$S$矩阵元：

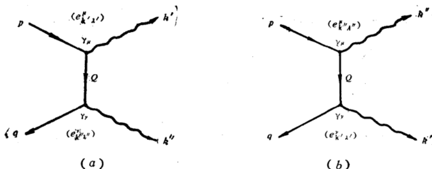



图10—3　$e^+e^-\to 2\gamma$过程的二阶图形

$$R_{fi} = -(2\pi)^4 \frac{1}{V^2}\left(\frac{m^2}{4E_pE_q|\mathbf{k}'||\mathbf{k}''|}\right)^{1/2}\delta^{(4)}(p+q-k'-k'')\mathrm{M}_{fi},\quad (10.81)$$

其中，

$$\mathrm{M}_{fi} = e^2\bar{v}_{qs_2}\left\{\gamma_\nu\frac{1}{\gamma\cdot(p-k')-im}\gamma_\mu+\gamma_\mu\frac{1}{\gamma\cdot(p-k'')-im}\gamma_\nu\right\}u_{ps_1}$$

$$\times\, e^\mu_{k'\lambda'}\, e^\nu_{k''\lambda''}. \quad (10.82)$$

在这里，（p，$s_1$）、（q，$s_2$）分别是电子、正电子的动量和极化；（k′，λ′）、（k″，λ″）分别是两个终态光子的动量和极化．由（10.29）和（10.25）$a$可得任意参考系里的截面为：

$$\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{m^2}{\left|\frac{\mathbf{p}}{E_p}-\frac{\mathbf{q}}{E_q}\right|E_pE_q}\int\frac{d^3k'}{2|\mathbf{k}'|}\frac{d^3k''}{2|\mathbf{k}''|}\delta^{(4)}(p+q-k'-k'')|\mathrm{M}_{fi}|^2,$$

$$(10.83)$$

使用上一节的方法可得（请读者自己去做）：

$$\sigma_{un} = \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{m^2}{4E_pE_q\left|\frac{\mathbf{p}}{E_p}-\frac{\mathbf{q}}{E_q}\right|}\int\frac{d^3k'}{|\mathbf{k}'|}\frac{d^3k''}{|\mathbf{k}''|}\delta^{(4)}(p+q-k'-k'')$$

$$\times\left\{\frac{1}{4}\sum_{\lambda',\lambda''}^{2}\sum_{s_1,s_2}^{2}|M_{fi}|^2\right\}=\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{m^2}{4E_pE_q\left|\frac{\mathbf{p}}{E_p}-\frac{\mathbf{q}}{E_q}\right|}\int\frac{d^3k'}{|\mathbf{k}'|}\frac{d^3k''}{|\mathbf{k}''|}$$

$$\times\delta^{(4)}(p+q-k'-k'')\left\{\frac{e^4}{2m^2}\left[\left(\frac{p\cdot k''}{p\cdot k'}+\frac{p\cdot k'}{p\cdot k''}\right)-2\left(\frac{m^2}{p\cdot k'}+\frac{m^2}{p\cdot k''}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(\frac{m^2}{p\cdot k'}+\frac{m^2}{p\cdot k''}\right)^2\right]\right\}. \qquad (10.84)$$

(10.84) 式右边对 $\mathbf{k}''$ 的积分，只需按动量守恒定律 $\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}'+\mathbf{k}''$ 消去 δ 函数的空间部分 $\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{k}'-\mathbf{k}'')$ 即告完成。为了完成对 $\mathbf{k}'$ 的积分，较方便的办法是先把 (10.84) 式转到质心参考系（对 $e^+$、$e^-$ 来说，质心系亦即是动量中心系，见图 10—4）。在质心系里，

$$\mathbf{q}=-\mathbf{p}, \qquad (10.85)a$$

按照动量守恒定律：

$$\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}'+\mathbf{k}'',$$

同时应有

$$\mathbf{k}''=-\mathbf{k}', \qquad (10.85)b$$

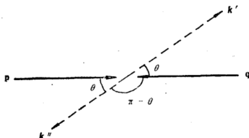



图10—4　在质心参考系里 $e^+e^-\to 2\gamma$ 反应的空间动量图。θ是p与k′之夹角（或q与k″之夹角）；π−θ是q与k′之夹角（或p与k″之夹角）。

由 (10.85)$a$ 可得

$$E_p^2=|\mathbf{p}|^2+m^2=|-\mathbf{p}|^2+m^2=E_q^2,$$

即

$$E_q=E_p, \qquad (10.86)a$$

又由 (10.85)$b$ 直接得到

$$|\mathbf{k}''|=|\mathbf{k}'|, \qquad (10.86)b$$

将 (10.86) 式与能量守恒定律

$$E_p+E_q=|\mathbf{k}'|+|\mathbf{k}''|$$

相结合就导致如下的等式：

$$|\mathbf{k}''|=|\mathbf{k}'|=E_q=E_p. \qquad (10.87)$$

由此，令 $E_f=|\mathbf{k}'|+|\mathbf{k}''|=2|\mathbf{k}'|$，就得到：

$$d^3\mathbf{k}'=|\mathbf{k}'|^2d|\mathbf{k}'|d\Omega=|\mathbf{k}'|^2\frac{d|\mathbf{k}'|}{dE_f}dE_fd\Omega=\frac{|\mathbf{k}'|^2}{2}dE_fd\Omega, \qquad (10.88)$$

这里，把p方向作为动量空间球坐标的极轴方向。此外，利用 (10.87) 式不难推出以下两个等式：

$$p\cdot k'=-E_p(E_p-|\mathbf{p}|\cos\theta), \qquad (10.89)a$$

$$p\cdot k''=-E_p(E_p+|\mathbf{p}|\cos\theta). \qquad (10.89)b$$

现在，把（10.85）、（10.87）、（10.88）和（10.89）一起代入（10.84）式，并完成对 $E_f$ 的积分〔按能量守恒定律消去 δ 函数的时间部分 $\delta(E_p+E_q-|\mathbf{k}'|-|\mathbf{k}''|)$〕，则稍加整理后（10.84）式就成为

$$\sigma_{un}=r_0^2\frac{m^2}{4E_p|\mathbf{p}|}\int d\Omega\left(\frac{2E_p^2+2m^2}{E_p^2-|\mathbf{p}|^2\cos^2\theta}-\frac{2m^4}{(E_p^2-|\mathbf{p}|^2\cos^2\theta)^2}-1\right),\tag{10.90}$$

应用积分公式：

$$\int\frac{dx}{c^2-x^2}=\frac{1}{2c}\ln\frac{c+x}{c-x}，\quad 当|x|<c \tag{10.91a}$$

$$\int\frac{dx}{(a^2-b^2x^2)^2}=\frac{x}{2a^2(a^2-b^2x^2)}+\frac{1}{4a^3b}\ln\frac{a+bx}{a-bx}+c,\tag{10.91b}$$

不难完成（10.90）式右边的积分．由此得到质心系里的无极化截面为

$$\sigma_{un}=\pi r_0^2\frac{m^2}{2E_p^2}\left[\frac{\beta^2-2}{\beta}+\frac{3-\beta^4}{2\beta^2}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}\right],\tag{10.92}$$

其中，

$$\beta=\frac{|\mathbf{p}|}{E_p}.\tag{10.93}$$

这里需要注意的是：由于 φ 从零变到 $2\pi$，故 θ 的积分范围只应为 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，在 θ 从 $\frac{\pi}{2}$ 到 π 的范围内，两个终态光子的动量方向彼此交换（见图10—5），而交换前、后的两种状态属于反应过程的同一个终态．如果像通常那样取 θ 的变化范围为 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$，则在事实上把每个终态计入两次，终态数目增加一倍，$\sigma_{un}$ 之值也随之增加一倍．对积分范围的这种特殊限制显然是由两个原因造成的：其一是我们选取质心参考系，其二是终态粒子是全同粒子．

在质心系里，当 $e^+$、$e^-$ 的碰撞能量很大时（极端相对论情形）．出射光子的动量方

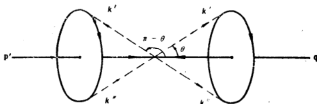



图10—5　θ的变化范围．在 $\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 范围内的每一个θ值，都在 $\theta\geqslant\frac{\pi}{2}$ 范围内有一对应值 $\pi-\theta$，由于φ从零变到 $2\pi$，故这两个θ值对应同一终态．

向具有明显的指向性．为了说明这一点，把（10.90）式对Ω求导，由此得到质心系里的微分截面

$$\frac{d\sigma_{un}}{d\Omega}=r_0^2\frac{m^2}{4E_p|\mathbf{p}|}\left(\frac{2E_p^2+2m^2}{E_p^2-|\mathbf{p}|^2\cos^2\theta}-\frac{2m^4}{(E_p^2-|\mathbf{p}|^2\cos^2\theta)^2}-1\right), \qquad (10.94)$$

在极端相对论情形下，

$$E_p\gg m$$

故上式简化为

$$\frac{d\sigma_{un}}{d\Omega}\cong r_0^2\frac{m^2}{2E_p|\mathbf{p}|}\frac{E_p^2}{E_p^2-|\mathbf{p}|^2\cos^2\theta} \qquad (10.95)$$

此式右边当 $\cos\theta=1$ 时取极大值，而当 $\cos\theta=0$ 时取极小值．换言之，终态光子主要地向前（相对于初态电子动量方向而言）和向后发射（图10—6）．

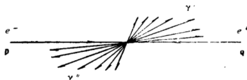



图10—6　出射光子的相对数目．用带有箭头的实线表示各个方向上出射光子相对数目，此图仅为示意图．

反之，当$e^+$、$e^-$碰撞能量很低时（即非相对论情形），出射光子的动量将以均等的几率指向所有方向．事实上，因为

$$|\mathbf{p}|\to 0 \quad E_p\approx m,$$

故有

$$\frac{d\sigma_{un}}{d\Omega}=r_0^2\frac{m^2}{4E_p|\mathbf{p}|}\left(\frac{2E_p^2+2m^2}{E_p^2}-\frac{2m^4}{E_p^4}-1\right) \qquad (10.96)$$

此式表明，微分截面与终态光子的出射方向无关．

为了计算正电子的湮没率，我们把截面表示式转到实验室参考系．这时正电子为入射粒子，电子为靶粒子．可以在(10.84)式里令$\mathbf{p}=0$，$E_p=m$，并完成对终态光子动量的积分，但方便的办法是借助于适当的Lorentz不变量把(10.92)式里的β用实验室参考系里的量来表示．设电子、正电子在质心系里分别具有四维动量$p$、$q$，而在实验室参考系里分别具有四维动量P、Q，则显然应有

$$\mathrm{P}\cdot\mathrm{Q}=p\cdot q,$$

因为

$$\mathrm{P}\cdot\mathrm{Q}=\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}-E_{\mathrm{P}}E_{\mathrm{Q}}=-mE_{\mathrm{Q}},\quad(\mathbf{P}=0,E_{\mathrm{P}}=m)$$

$$p\cdot q=\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}-E_pE_q=-|\mathbf{p}|^2-E_p^2=-2|\mathbf{p}|^2-m^2,$$

所以

$$|\mathbf{p}|^2=\frac{1}{2}(mE_{\mathrm{Q}}-m^2), \qquad (10.97)a$$

$$E_p^2=|\mathbf{p}|^2+m^2=\frac{1}{2}(mE_{\mathrm{Q}}+m^2), \qquad (10.97)b$$

令

$$\Gamma=\frac{E_Q}{m},\quad（实验室参考系里的量）\tag{10.98}$$

则（10.97）式成为：

$$|\mathbf{p}|^2=\frac{m^2}{2}(\Gamma-1),\tag{10.99a}$$

$$E_p^2=\frac{m^2}{2}(\Gamma+1).\tag{10.99b}$$

把（10.99）代入（10.93）即得

$$\beta=\left(\frac{\Gamma-1}{\Gamma+1}\right)^{½}\tag{10.100}$$

利用这一关系式把（10.92）式里的$\beta$换成$\Gamma$（前者是质心系里的电子速率，而后者是实验室系里正电子的能量与质量之比），就得到实验室参考系里的截面表示式：

$$\sigma_{un}=\pi r_0^2\frac{1}{\Gamma+1}\left[\frac{\Gamma^2+4\Gamma+1}{\Gamma^2-1}\ln(\Gamma+\sqrt{\Gamma^2-1})-\frac{\Gamma+3}{\sqrt{\Gamma^2-1}}\right].\tag{10.101}$$

此式表明，在实验室参考系里，总截面与入射正电子的能量有关。下面讨论两种特殊情形：非相对论情形与极端相对论情形：

**非相对论情形**

这时，$E_Q\approx m$，$\Gamma\to1$，为方便起见，用正电子的入射速率$v$来表示$\Gamma$：

$$\Gamma=\frac{E_Q}{m}=\frac{E_Q}{\sqrt{E_Q^2-|\mathbf{Q}|^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{|\mathbf{Q}|^2}{E_Q^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-v^2}},$$

由此，（10.101）式成为

$$\sigma_{un}=\frac{\pi r_0^2}{v},\quad v\to0\tag{10.102}$$

在导出此式时，曾使用了如下等式：

$$\ln(1+x)=x,\quad 当x\to0.$$

（10.102）式的$\sigma_{un}$与入射正电子的速率成反比，当$v\to0$时，$\sigma_{un}\to\infty$，这就没有物理意义。但是，每单位时间从有一个电子和一个正电子的初态跃迁到有两个光子的终态的跃迁几率，即正电子的湮没率$W_{Per}$则是有限的：

$$W_{Per}=F\sigma_{un}=\breve{\rho}v\sigma_{un}=\breve{\rho}\pi r_0^2,\tag{10.103}$$

$W_{Per}$的倒数便是正电子的平均寿命：

$$\tau = W_{per}^{-1} = \frac{1}{\tilde{\rho}\pi r_0^2} \tag{10.104}$$

假定$\tilde{\rho}$是每立方厘米靶物质中的电子数，$N$是阿伏伽德罗常数，$A$是靶物质的摩尔质量，$Z$是原子序数，$\rho$是靶物质密度，则

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{A} N Z,$$

考虑到$r_0 = 2.8 \times 10^{-13}$厘米，$N \cong 6.03 \times 10^{23}/_{摩尔}$就得到

$$\tau = \frac{1}{N\pi r_0^2} \frac{A}{Z\rho} = \frac{1}{1.5 \times 10^{-1}} \frac{A}{Z\rho} \text{（厘米）},$$

上式中的$\rho$和$A$不再有量纲，它们只代表靶物质密度和摩尔质量之数值（在CGS单位制里）．在$c = 1$的单位制里有

$$\frac{1}{\text{厘米}} = 3 \times 10^{10} \frac{1}{\text{秒}},$$

因此，

$$\tau = \frac{1}{4.5} \times 10^{-9} \frac{A}{Z\rho} \text{（秒）}. \tag{10.105}$$

**极端相对论情形**

这时$E_Q \gg m$，$\Gamma \gg 1$，所以（10.101）式成为

$$\sigma_{un} = \pi r_0^2 \frac{1}{\Gamma} \left[\ln(2\Gamma) - 1\right],$$

以$\frac{|Q|}{E_Q} \Big/ v \equiv 1$乘上式右端得

$$\sigma_{un} = \pi r_0^2 \frac{1}{v} \frac{|Q|m}{E_Q^2} \left[\ln\left(\frac{2E_Q}{m}\right) - 1\right]$$

$$\cong \pi r_0^2 \frac{1}{v} \frac{|Q|m}{E_Q^2} \ln\left(\frac{2E_Q}{m}\right),$$

因此，

$$W_{per} = \tilde{\rho} v \sigma_{un} = \frac{\ln\left(\frac{2E_Q}{m}\right)}{\frac{E_Q}{m}} 4.5 \times 10^9 \frac{Z\rho}{A} \text{（秒}^{-1}\text{）}. \tag{10.106}$$

$$\tau = \frac{E_Q/m}{\ln(2E_Q/m)} \frac{1}{4.5} \frac{A}{Z\rho} 10^{-9} \text{（秒）} \tag{10.107}$$

因为$\frac{E_Q/m}{\ln(2E_Q/m)} \gg 1$，所以在极端相对论情形下的$\tau$值比非相对论情形下的$\tau$值〔见(10.105)式〕大得多．换言之，低速正电子比起高速正电子，其湮没率要大得多，而平均寿命则短得多．在实验上，高速正电子穿过物质时，总是首先损失能量，然后才易与质物中的电子湮没为光子．

我们上面对$W_{per}$和$\tau$的推算只具有近似的意义，因为在推算时曾将靶物质中的电子看成自由电子（平面波），而且未曾计入$e^+e^-\to 3r$和$e^+e^-\to r$等反应．在原子核库仑场里，最后一种反应也是能够发生的．

## §5　高能e⁺、e⁻碰撞产生μ轻子偶

如上一节所述$e^+e^-\to 2\gamma$的反应截面随着碰撞能量的增大而减小，仅当能量很低时（非相对论情形），这一反应过程才容易发生；与此相反，$e^+e^-\to\mu^+\mu^-$反应仅当质心系总能量很高时（一般应在1GeV以上）才能观测得到．这一过程的$S$矩阵元由(9.80)式给出，相应的Feynman图便是图9—9中的右图．因此，

$$M_{fi}=\overline{u}_{q_1^t\sigma_1^t}\gamma_\mu v_{q_2^t\sigma_2^t}\overline{v}_{p_2s_2}\gamma_\mu u_{p_1s_1}, \tag{10.108}$$

这里，已将(9.80)式中的$\delta_{\mu\nu}$消去并将该式中的因子$e^2/s$从$M_{fi}$中提出，由(10.30)式得（在任意参考系）：

$$\sigma=\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{m_e^2m_\mu^2}{E_{p_1}E_{p_2}\left|\frac{\mathbf{p}_1}{E_{p_1}}-\frac{\mathbf{p}_2}{E_{p_2}}\right|}\frac{e^4}{s^2}\int\frac{d^3q_1'}{E_{q_1'}}\frac{d^3q_2'}{E_{q_2'}}$$

$$\times\delta^{(4)}(q_1'+q_2'-p_1-p_2)|M_{fi}|^2 \tag{10.109}$$

对于$e^+e^-\to\mu^+\mu^-$反应，在质心参考系里来进行计算是方便的．这时，

$$\mathbf{q}_1'+\mathbf{q}_2'=\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2=0. \tag{10.110a}$$

即

$$\mathbf{q}_2'=-\mathbf{q}_1',\quad \mathbf{p}_2=-\mathbf{p}_1, \tag{10.110b}$$

因此，

$$E_{q_2'}=E_{q_1'}=E_{q'}, \tag{10.111a}$$

$$E_{p_2}=E_{p_1}=E_p, \tag{10.111b}$$

又因

$$E_{q_1'}+E_{q_2'}=E_{p_1}+E_{p_2}, \tag{10.112a}$$

所以

$$E_{q'} = E_p. \tag{10.112)b$$

把 (10.110)$b$、(10.111) 和 (10.112)$b$代入 (10.109)：

$$\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{m_e^2 m_\mu^2}{2E_p^3|\mathbf{p}_1|}\frac{e^4}{s^2}\int d^3q_1' d^3q_2' \delta^{(4)}(q_1'+q_2'-p_1-p_2)|M_{fi}|^2$$

(10.113)

选择初态粒子$e^-$的动量 ($\mathbf{p}_1$) 方向作为动量空间球坐标的极轴方向，则

$$d^3q_1' = |\mathbf{q}_1'|^2 d|\mathbf{q}_1'|\sin\theta d\theta d\varphi$$

$$= |\mathbf{q}_1'|^2 \frac{d|\mathbf{q}_1'|}{dE_f} dE_f \sin\theta d\theta d\varphi, \tag{10.114)a$$

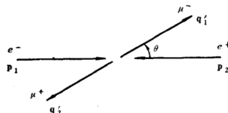



图10—7 在质心系里$e^+e^-\to\mu^+\mu^-$反应的空间动量图，以$\mathbf{p}_1$为球坐标的极轴方向，$\theta$是$\mathbf{q}_1'$与$\mathbf{p}_1$的夹角。

这里，$E_f = E_{q_1'} + E_{q_2'} = 2E_{q'}$；

由此又得到：

$$\frac{d|\mathbf{q}_1'|}{dE_f} = \frac{E_{q'}}{2|\mathbf{q}_1'|} \equiv \frac{E_p}{2|\mathbf{q}_1'|}, \tag{10.114)b$$

把 (10.114)$b$代入 (10.114)$a$得

$$d^3q_1' = \frac{1}{2}|\mathbf{q}_1'|E_p dE_f \sin\theta d\theta d\varphi.$$

在 (10.113) 式里完成对$\mathbf{q}_2'$和$E_f$的积分，消去能量、动量守恒的δ函数$\delta^{(4)}(q_1'+q_2'-p_1-p_2)$，则 (10.113) 式成为

$$\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{m_e^2 m_\mu^2}{E_p^2}\frac{|\mathbf{q}_1'|}{4|\mathbf{p}_1|}\frac{e^4}{s^2}\int \sin\theta d\theta d\varphi |M_{fi}|^2, \tag{10.115}$$

为了计算无极化截面$\sigma_{un}$，首先来计算$\frac{1}{4}\sum|M_{fi}|^2$：

$$\frac{1}{4}\sum_{\substack{\sigma_1',\sigma_2'\\ s_1,s_2}}^{2}|M_{fi}|^2 = \sum_{\sigma_1',\sigma_2'}^{2}|\overline{u}_{\mathbf{q}_1'\sigma_1'}\gamma_\mu v_{\mathbf{q}_2'\sigma_2'}|^2 \frac{1}{4}\sum_{s_1,s_2}^{2}|\overline{v}_{\mathbf{p}_2 s_2}\gamma_\mu u_{\mathbf{p}_1 s_1}|^2,$$

按照 (10.40) 式和 (10.41) 式有

$$\frac{1}{4}\sum_{\substack{\sigma_1',\sigma_2'\\ s_1,s_2}}^{2}|M_{fi}|^2 = \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left\{\gamma_4\gamma_\nu\gamma_4\frac{\gamma\cdot q_1'+im_\mu}{2im_\mu}\gamma_\mu\frac{\gamma\cdot q_2'-im_\mu}{2im_\mu}\right\}$$

$$\times\mathrm{Tr}\left\{\gamma_4\gamma_\nu\gamma_4\frac{\gamma\cdot p_2-im_e}{2im_e}\gamma_\mu\frac{\gamma\cdot p_1+im_e}{2im_e}\right\}$$

$$= \frac{1}{4} \mathrm{Tr} \left\{ \gamma_\nu \frac{\gamma \cdot q_1' + i m_\mu}{2 i m_\mu} \gamma_\mu \frac{\gamma \cdot q_2' - i m_\mu}{2 i m_\mu} \right\}$$

$$\times \mathrm{Tr} \left\{ \gamma_\nu \frac{\gamma \cdot p_2 - i m_e}{2 i m_e} \gamma_\mu \frac{\gamma \cdot p_1 + i m_e}{2 i m_e} \right\}$$

$$= \frac{1}{4} \frac{1}{16 m_e^2 m_\mu^2} \mathrm{Tr} \left\{ \gamma_\nu (\gamma \cdot q_1' + i m_\mu) \gamma_\mu (\gamma \cdot q_2' - i m_\mu) \right\}$$

$$\times \mathrm{Tr} \left\{ \gamma_\nu (\gamma \cdot p_2 - i m_e) \gamma_\mu (\gamma \cdot p_1 + i m_e) \right\}$$

$$= \frac{1}{2 m_e^2 m_\mu^2} \left\{ p_1 \cdot q_2' \, p_2 \cdot q_1' + p_1 \cdot q_1' \, p_2 \cdot q_2' - m_\mu^2 p_1 \cdot p_2 - m_e^2 q_1' \cdot q_2' \right.$$

$$\left. + 2 m_e^2 m_\mu^2 \right\}. \qquad (10.116)$$

现在把上式右边的所有标积用

$$s = -(p_1 + p_2)^2 = -(q_1' + q_2')^2 \qquad 〔见 (9.81) 式〕$$

和

$$t = -(p_1 - q_1')^2 = -(p_2 - q_2')^2 \qquad 〔参见 (9.74)a〕$$

来表示：

$$p_1 \cdot p_2 = \frac{1}{2}[(p_1 + p_2) - p_1^2 - p_2^2] = -\frac{1}{2}s + m_e^2, \qquad (10.117)a$$

$$q_1' \cdot q_2' = -\frac{1}{2}s + m_\mu^2, \qquad (10.117)b$$

$$p_1 \cdot q_1' = \frac{1}{2}[-(p_1 - q_1')^2 + p_1^2 + q_1'^2] = \frac{1}{2}(t - m_e^2 - m_\mu^2), \qquad (10.117)c$$

$$p_1 \cdot q_2' = \frac{1}{2}[-(p_1 - q_2')^2 + p_1^2 + q_2'^2] = \frac{1}{2}(u - m_e^2 - m_\mu^2). \qquad (10.117)d$$

这里，u的定义是：$u = -(p_1 - q_2')^2 = -(p_2 - q_1')^2$。由于

$$s + t + u = 2(m_e^2 + m_\mu^2).$$

所以 (10.117)$d$又可改写为下式：

$$p_1 \cdot q_2' = \frac{1}{2}(-s - t + m_e^2 + m_\mu^2). \qquad (10.117)e$$

此外，从能量、动量守恒定律

$$p_1 + p_2 = q_1' + q_2',$$

和质壳关系

$$p_1^2 = p_2^2 = -m_e^2, \quad q_1'^2 = q_2'^2 = -m_\mu^2,$$

容易导出如下等式：

$$p_2 \cdot q_1' = p_1 \cdot q_2', \tag{10.117f}$$

$$p_2 \cdot q_2' = p_1 \cdot q_1', \tag{10.117g}$$

把(10.117)$a$、$b$、$c$、$e$、$f$、$g$诸式代入（10.116）就得到

$$\frac{1}{4}\sum_{\substack{\sigma_1', \sigma_2' \\ s, s_2}}^{2} |M_{fi}|^2 = \frac{1}{8m_e^2 m_\mu^2}\Big\{(s+t-m_e^2-m_\mu^2)^2$$

$$+(t-m_e^2-m_\mu^2)^2+2s(m_e^2+m_\mu^2)\Big\}, \tag{10.118}$$

因此

$$\sigma_{un} = \frac{1}{32(2\pi)^2}\frac{|\mathbf{q}_1'|}{E_p^2|\mathbf{p}_1|}\frac{e^4}{s^2}\int \sin\theta d\theta d\varphi[(s+t-m_e^2-m_\mu^2)^2$$

$$+(t-m_e^2-m_\mu^2)^2+2s(m_e^2+m_\mu^2)], \tag{10.119a}$$

此式右边对φ的积分是直接了当的．为了完成对θ的积分，我们利用t的定义〔见(10.117)$a$前面的公式〕，把$d\cos\theta$换成$dt$：

$$d\cos\theta = \frac{1}{2|\mathbf{p}_1||\mathbf{q}_1'|}dt, \tag{10.119b}$$

把（10.119)$b$代入（10.119)$a$，并利用等式

$$E_p^2|\mathbf{p}_1|^2 = \frac{1}{16}(s^2-4sm_e^2), \tag{10.120}$$

就可把（10.119)$a$改写为下式：

$$\sigma_{un} = \frac{-1}{8\pi}\frac{e^4}{s^3(s-4m_e^2)}\int_{t_下}^{t_上} dt[(s+t-m_e^2-m_\mu^2)^2$$

$$+(t-m_e^2-m_\mu^2)^2+2s(m_e^2+m_\mu^2)]. \tag{10.121}$$

$e^+e^-\to\mu^+\mu^-$是高能反应，例如，假定初态粒子的质心系总能量为

$$E_i = 2E_p = 1\text{GeV},$$

则因在质心系里，$s=E_i^2=10^6(\text{MeV})^2$〔可从s的定义以及（10.110)、(10.111）来推出这一结果〕，故有：

$$s \gg m_\mu^2 \cong 1.1\times10^4(\text{MeV})^2, \tag{10.122a}$$

$$s \gg m_e^2 \quad (m_e \cong 0.511\text{MeV}), \tag{10.122b}$$

另方面，从 t 的定义可得 t 的积分限如下：

$$t_{下}=t|_{\theta=0}=0, \tag{10.123a}$$

$$t_{上}=t|_{\theta=\pi}=-s, \tag{10.123b}$$

综合（10.122）、（10.123），我们可将（10.121）简化为

$$\sigma_{un}=\frac{-1}{8\pi}\frac{e^4}{s^4}\int_0^{-s}(s^2+2st+2t^2)dt,$$

即

$$\sigma_{un}=\frac{4\pi\alpha^2}{3s},\quad \alpha=\frac{e^2}{4\pi}. \tag{10.124}$$

此式表明，在质心系里，$e^+e^-\to\mu^+\mu^-$ 的无极化截面与初态电子的总能量$E_i$有一个简单的平方反比关系。然而在实验上除了大量 $e^+e^-\to\mu^+\mu^-$ 反应之外，还存在$e^+e^-\to V\to\mu^+\mu^-$反应。这里，$V$ 是有质量的中性矢量介子，它与光子具有相同的量子数。例如$V$可以是一个$\psi$粒子。这一反应过程的图形如图10—8．这是一个四阶过程的图形．由于这一图形的贡献，使得在$e^+e^-\to\mu^+\mu^-$反应的背景曲线〔即（10.124）式的$\sigma_{un}$— s 曲线〕上出现许多共振峰。因此，应当把图 9 — 9 和图 10— 8 的贡献合起来考虑〔注 1〕，由此得到：

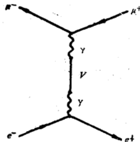



图10—8　$e^+$、$e^-\to V\to\mu^+$、$\mu^-$的Feynman图

$$\sigma_{un}=\frac{4\pi\alpha^2}{3s}\left[1+\frac{\xi^2}{s(s-M^2)}\right]^2. \tag{10.125}$$

其中，$\xi$ 是中性矢量介子与光子的耦合常数，$M$是矢量介子的质量．（10.125）式很好地解释了实验曲线的共振峰，每当 $e^+$、$e^-$总能量的平方 s 与某一中性矢量介子的质量平方接近时，$\sigma_{un}\sim s$ 曲线就出现一共振峰．由此就可推断有一个中性矢量介子存在．例如，1974年就发现了 $\psi$ 族介子的如下共振峰：

$J/\psi$ （$M=3097\pm2$MeV）

$\psi'$ （$M=3685\pm3$MeV）

## §6　电子的Coulomb散射

在 §3、§4、§5 里讨论了三个QED的最低阶效应的例子．这些例子都属于量子场与量子场的相互作用．在 QED 里还有一类特殊的相互作用，需要用稍微不同的方法去处

〔注 1〕 详见邹国兴，《量子场论导论》，pp．158—160、pp.145—146，科学出版社，1980年；进一步的参考资料还有：《基本粒子译文集》，第一集，PP.107—149，科技文献出版社重庆分社，1978．

理．这类问题统称为外场问题．例如当入射粒子是某种带电的场量子（点状粒子），而靶粒子(散射中心)是一个重原子核时，由于后者是许多质子、中子（旋量场的场量子）的复合体，因而联属于它的场也不是某种基本场，而是一个复合场．在此种情形下，倘若像前面三节那样，仍然将靶粒子视为量子场的激发态，则不仅会使数学处理变得十分困难，而且在事实上不会得到预期的理论结果．一种简单而可靠的方法是：把上述的散射过程视为入射带电粒子被一个外电磁场散射（这个外电磁场是由重原子核产生的，当原子核处于静止状态时，外场是Coulomb 场），这个外电磁场是事先确定了的，它是一个有源场，它的四维势 $A_\mu^{ext}(x)$ 不满足自由场方程（1.250）．而且在散射过程中，外场除了与入射粒子发生能量、动量的交换以外，它自身并不发生任何变化．这是因为，外场作为对靶粒子的一种近似，它是量子场在强度趋于无限大时的极限（当场量子的数目很大时，Bose场趋向经典极限）．

本节主要讨论电子在Coulomb场中的散射，分述如下：

**电子在外电磁场中的散射，跃迁几率幅**

在（9.43）式里把量子电磁场的势 $A_\mu(x)$ 换成外场的势 $A_\mu^{ext}(x)$，就得到这种情形下的相互作用Hamilton密度

$$\mathscr{H}_I^{ext}(x) = -ie:\overline{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x): A_\mu^{ext}(x). \qquad (10.126)$$

散射过程的初态和终态均分别有一个电子：

$$|i\rangle = c_{ps}^{+}|0\rangle,$$

$$|f\rangle = c_{p's'}^{+}|0\rangle.$$

我们来计算这一过程的最低阶（一阶）近似 $S$ 矩阵元：

$$(f|S_1|i) = (0|c_{p's'}\left\{-e\int d^4x:\overline{\psi}^{(-)}(x)\gamma_\mu\psi^{(+)}(x): A_\mu^{ext}(x)\right\}c_{ps}^{+}|0), \qquad (10.127)$$

此式右边的正规乘积对应的 Feynman 图便是图10—9，图中的X代表外电磁场．$A_\mu^{ext}(x)$可通过其波矢（k)空间的付里叶分量 $A_\mu^{ext}(k)$表示为如下的积分：

$$A_\mu^{ext}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\, A_\mu^{ext}(k)e^{ik\cdot x}, \qquad (10.128)a$$

其中，

$$A_\mu^{ext}(k) = \int A_\mu^{ext}(x)e^{-ik\cdot x}d^4x. \qquad (10.128)b$$

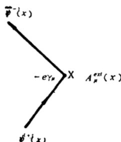



图10—9　正规乘积：$\overline{\psi}^{(-)}\gamma_\mu\psi^{(+)}: A_\mu^{ext}$ 的Feynman图

应注意，由于 $A_\mu^{ext}(x)$不满足线性齐次方程(1.250)，因而上式中的 $k$ 不再受到质壳关系 $k^2=0$之限制，（10.127）式的一阶 $S$ 矩阵元也不再为零．把（9.58)$d$、(9.58)$a$ 和(10.128)$a$代入（10.127），就得到：

$$(f|S_1|i)=-\frac{e}{V}\left(\frac{m^2}{E_{p'}E_p}\right)^{1/2}\bar{u}_{p's'}\gamma_\mu u_{ps}\int d^4k A_\mu^{ext}(k)\delta^{(4)}(p'-p-k). \qquad (10.129)$$

上式右边的 $\delta^{(4)}(p'-p-k)$ 乃是包括初、末态电子和外场在内的整个系统的能量、动量守恒因子，因此，在这种散射过程里，经典场的频率$\omega_k$和波矢量$\mathbf{k}$分别具有粒子能量和动量的意义。但是，散射过程自始至终均未出现可观测的光子（实光子），按照量子场论的概念，唯一可能的解释是：在这种相互作用过程里，作为散射体的外电磁场表现为无数虚光子组成的系集，每个虚光子的四维动量便是$k=(\mathbf{k}, i\omega_k)$，而且正如前面已指出的，矢量$k$不满足质壳关系，即$k^2\neq 0$。外场与入射电子的能量、动量交换便是通过交换虚光子来实现的。

完成（10.129）式右边对$k$的积分，就得到散射过程的跃迁几率幅：

$$(f|S_1|i)=-\frac{e}{V}\left(\frac{m^2}{E_{p'}E_p}\right)^{1/2}\bar{u}_{p's'}\gamma_\mu u_{ps}A_\mu^{ext}(p'-p). \qquad (10.130)$$

我们看到，上式右边没有散射过程的能量、动量守恒因子$(2\pi)^4\delta^{(4)}(p'-p)$。因此，终态电子的能量、动量并不等于初态电子的能量、动量。这一点，从上述关于外场的讨论里已得到完满的解释。

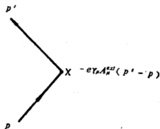



图10—10 $S$矩阵元（10.130）对应的Feynman图

与（10.130）式对应的Feynman图是图10—10。由于外场没有实光子，因而$A_\mu^{ext}(p'-p)$不代表外线，应当把它归入到顶点因子里去。这样，还需要对QED Feynman规则作如下的补充：

图10—10的顶角—→$S$矩阵元里的因子：$-e\gamma_\mu A_\mu^{ext}(p'-p)$。

**外场是Coulomb场的情形，散射截面**

这时，在（10.127)式里应以$\gamma_4 A_4^{ext}(x)$代替$\gamma_\mu A_\mu^{ext}(x)$。并且按照（10.128)$a$式，外场四维势的时间分量为

$$A_0^{ext}(x)=-iA_4^{ext}(x)=\frac{-i}{(2\pi)^4}\int d^4k A_4^{ext}(k)e^{ik\cdot x},$$

因Coulomb场与时间无关，故$A_4^{ext}(k)$可分离为时、空两部分之乘积〔注1〕：

$$A_4^{ext}(k)=2\pi A_4^{ext}(\mathbf{k})\delta(k_0),$$

〔注1〕 Coulomb场只有时间分量$A_4^{ext}(x)\equiv A_4^{ext}(\mathbf{x})=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k A_4^{ext}(k)e^{ik\cdot x}$，其逆变换为：

$$A_4^{ext}(k)=\int d^4x A_4^{ext}(\mathbf{x})e^{-ik\cdot x}=\int d^3x A_4^{ext}(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$
$$\times\int e^{ik_0t}dt=2\pi A_4^{ext}(\mathbf{k})\delta(k_0).$$

将此式代入上式即得

$$A_0^{ext}(x) \equiv A_0^{ext}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k A_0^{ext}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tag{10.131}$$

这样，(10.127) 式成为：

$$\begin{aligned}(0|c_{p's'}S_1c_{ps}^+|0) &= -\frac{ie}{V}\left(\frac{m^2}{E_{p'}E_p}\right)^{1/2}\bar{u}_{p's'}\gamma_4 u_{ps}\\ &\times\int d^4x e^{-ip'\cdot x+ip\cdot x}\left(\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k A_0^{ext}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\right)\\ &= \frac{-ie}{V}\left(\frac{m^2}{E_{p'}E_p}\right)^{1/2}\bar{u}_{p's'}\gamma_4 u_{ps}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k A_0^{ext}(\mathbf{k})\left(\int d^3x e^{-i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\right)\\ &\times\left(\int dt e^{i(E_{p'}-E_p)t}\right)\\ &= -ie(2\pi)\delta(E_{p'}-E_p)\frac{m}{E_pV}A_0^{ext}(\mathbf{p}'-\mathbf{p}')\bar{u}_{p's'}\gamma_4 u_{ps},\end{aligned} \tag{10.132}$$

由此可见，当外场是Coulomb场时，散射过程满足能量守恒定律：

$$E_{p'} = E_p, \tag{10.133a}$$

但仍不满足动量守恒定律：

$$\mathbf{p}'-\mathbf{p}=\mathbf{k}\neq 0. \tag{10.133b}$$

矩阵元 (10.132) 对应的Feynman图是图10—11。由图可见，在现在的情形下，需要对QED Feynman 规则作如下补充：

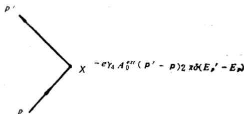



图10—11 S矩阵元 (10.132) 对的应Feynman图

图10—11的顶角→S矩阵元里的因子：

$$-e\gamma_4 A_0^{ext}(\mathbf{p}'-\mathbf{p})(2\pi)\delta(E_{p'}-E_p).$$

为了计算散射过程的截面，首先要计算单位时间的跃迁几率$W_{per}$，

$$\begin{aligned}W_{per} &= \frac{1}{2\pi\delta(0)}|(0|c_{p's'}S_1c_{ps}^+|0)|^2\\ &= e^2 2\pi\delta(E_{p'}-E_p)\frac{m^2}{E_p^2V^2}|A_0^{ext}(\mathbf{p}'-\mathbf{p})|^2|\bar{u}_{p's'}\gamma_4 u_{ps}|^2,\end{aligned}$$

其次再将上式对所有p′求和：

$$\sum_{\mathbf{p}'} = \frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3p',$$

并除以$F=\frac{1}{V}\frac{|\mathbf{p}|}{E_p}$（实验室参考系），就得到散射截面σ：

$$\sigma=\frac{e^2}{(2\pi)^2}\frac{m^2}{E_p|\mathbf{p}|}\int d^3p'\,\delta(E_{p'}-E_p)|A_0^{ext}(\mathbf{p}'-\mathbf{p})|^2|\bar{u}_{p's'}\gamma_4u_{ps}|^2. \quad (10.134)$$

利用公式(1.71)$d$，不难求得：

$$\frac{1}{2}\sum_{s,s'}^{2}|\bar{u}_{p's'}\gamma_4u_{ps}|^2=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{\gamma_4\frac{\gamma\cdot p'+im}{2im}\gamma_4\frac{\gamma\cdot p+im}{2im}\right\}$$

$$=\frac{1}{2m^2}(m^2+\mathbf{p}'\cdot\mathbf{p}+E_p^2),$$

因此，无极化截面为

$$\sigma_{un}=\frac{e^2}{(2\pi)^2}\frac{1}{2E_p|\mathbf{p}|}\int d^3p'\,\delta(E_{p'}-E_p)|A_0^{ext}(\mathbf{p}'-\mathbf{p})|^2(m^2+\mathbf{p}'\cdot\mathbf{p}+E_p^2)$$

(10.135)

选择入射电子动量方向为球坐标的极轴方向（见图10—12），则可将$d^3p'$写为：

$$d^3p'=|\mathbf{p}'|^2d|\mathbf{p}'|d\Omega$$

$$=|\mathbf{p}'|^2\frac{d|\mathbf{p}'|}{dE_{p'}}dE_{p'}d\Omega$$

$$=|\mathbf{p}'|E_{p'}dE_{p'}d\Omega.$$

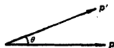


图10—12 动量空间的球坐标，极轴方向为p方向

把上式代入（10.135）并完成对$E_{p'}$的积分得

$$\sigma_{un}=\frac{e^2}{2(2\pi)^2}\int d\Omega|A_0^{ext}(\mathbf{p}'-\mathbf{p})|^2(m^2+\mathbf{p}'\cdot\mathbf{p}+E_p^2) \quad (10.136)$$

为了确定$A_0^{ext}(\mathbf{p}'-\mathbf{p})$，我们假定Coulomb场是被原子序数为$Z$的原子核产生的。把经典的标势

$$A_0^{ext}(\mathbf{x})=\frac{-Ze}{4\pi|\mathbf{x}|}$$

代入（10.131）式的逆变换式

$$A_0^{ext}(\mathbf{k})=\int d^3x\,A_0^{ext}(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}},$$

并将$d^3x$转换为$|\mathbf{x}|^2\sin\beta d\beta d\varphi d|\mathbf{x}|$（见图10—13），进行简单的积分运算即得

$$A_0^{ext}(\mathbf{k})=\frac{-Ze}{|\mathbf{k}|^2}=\frac{-Ze}{|\mathbf{p}'-\mathbf{p}|^2}, \quad (10.137)$$

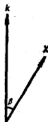


图10—13

因$|\mathbf{p}'|=|\mathbf{p}|$，故

$$A_0^{ext}(\mathbf{k})=\frac{-Ze}{4|\mathbf{p}|^2\sin^2\frac{\theta}{2}}. \tag{10.138}$$

把（10.138）代入（10.136），并注意$\mathbf{p}'\cdot\mathbf{p}=|\mathbf{p}|^2\cos\theta$，就得到

$$\sigma_{un}=\frac{Z^2e^4}{16\pi^2}\int d\Omega\frac{E_p^2-|\mathbf{p}|^2\sin^2\frac{\theta}{2}}{4|\mathbf{p}|^4\sin^4\frac{\theta}{2}}, \tag{10.139}$$

上式两边对$\Omega$求导，就得到散射过程的微分截面：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{1}{16\pi^2}\frac{Z^2e^4}{4|\mathbf{p}|^2v^2\sin^4\frac{\theta}{2}}\left(1-v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right), \tag{10.140}$$

其中，$v=\frac{|\mathbf{p}|}{E_p}$是入射电子的速率．在非相对论近似下，$v^2\to0$，$E_p\to m$，我们有

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{1}{4}\left(\frac{Z\frac{e^2}{4\pi}}{mv^2}\right)^2\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}. \tag{10.141}$$

此式就是著名的卢瑟福散射公式．它可以用经典方法精确地得到[注1]．但上述计算表明，卢瑟福公式只是量子场论一阶微扰效应的一个非相对论近似．

## §7 中微子、电子弹性散射

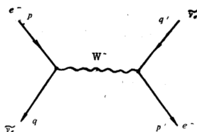
中微子与电子的相互作用是弱作用（详见第八章，§3）．以（8.78）式和(8.79)$a$式的散射过程为例，按照W－S理论，前者既有中性流的贡献，也有带电流的贡献，而后者则是纯粹的中性流反应．相应于这两种散射过程的最低阶（二阶）Feynman图分别是图10—14和10—15．

在实验上，$e^-\nu$弹性散射是用高能中微子去轰击静止的电子靶，因此，我们就在实验室参考系里来计算反应截面．当入射中微子的能量$E_q=|\mathbf{q}|$很大时，必须严格按照W－S理论来进行计算．但是，在

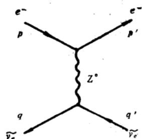
$$|\mathbf{q}|\ll M_W、M_Z \tag{10.142}$$

的极限情形下，图10—14和10—15分别成为图10—16和图10—17．

〔注1〕 用经典方法推导卢瑟福公式的详细讨论可参阅，例如，梅镇岳，《原子核物理学》，pp.16—18，科学出版社，1966年修订第二版．




(a) 交换带电中间Bose子的反应（带电流反应）




(b) 交换中性中间Bose子的反应（中性流反应）

图10—14 在W—S理论里，$\tilde{\nu}_e e^- \to \tilde{\nu}_e e^-$的二阶Feynman图。$p$、$q$是初态粒子四维动量，$p'$、$q'$为终态粒子四维动量。

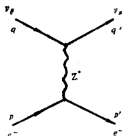



图10—15 在W—S理论里$\nu_\mu e^- \to \nu_\mu e^-$的二阶Feynman图（中性流反应）。$p$、$q$为初态粒子的四维动量，$p'$、$q'$为终态粒子四维动量。

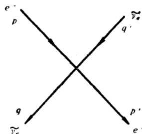



图10—16 在条件（10.142）的极限情形下$\tilde{\nu}_e e^- \to \tilde{\nu}_e e^-$的图形

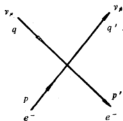



图10—17 在条件（10.142）的极限情形下$\nu_\mu e^- \to \nu_\mu e^-$的图形

就是说，通过交换中间Bose子的相互作用，在条件（10.142）之下过渡到直接相互作用（详见第八章，§3）。相应地，在W—S理论里由局域规范对称性给出的相互作用Lagrange函数密度分别过渡到$V-A$理论里的（8.73）式和(8.81)式。

对于$\tilde{\nu}_e e^- \to \tilde{\nu}_e e^-$，我们有

$$\mathscr{L}_I = \frac{G_F}{\sqrt{2}}\left[\overline{\psi}_{\nu_e}\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_e\right]\left[\overline{\psi}_e\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_{\nu_e}\right]$$

$$+\frac{G_F}{\sqrt{2}}\left[\overline{\psi}_{\nu_e}\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_{\nu_e}\right]\left[\overline{\psi}_e\gamma_\lambda(c_V+c_A\gamma_5)\psi_e\right], \qquad (10.143)$$

此式右边第一项是带电流耦合项〔它便是（8.73）式右边第三项〕，而右边第二项是中

性流耦合项〔参见(8.81)式〕，其中的$c_V$、$c_A$由(8.82)式定义。为了把(10.143)式右边的两项加起来，需要对第一项进行所谓Fierz变换（关于Fierz变换，详见J. C. TAYLOR《Gauge Theories of Weak Interactions》, Cambridge University Press 1976, pp.60—61)，使之成为

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}}\left[\overline{\psi}_{\nu_e}\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_{\nu_e}\right]\left[\overline{\psi}_e\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_e\right].$$

这样，(10.143)式就可写为：

$$\mathscr{L}_I=\frac{G_F}{\sqrt{2}}\left[\overline{\psi}_{\nu_e}\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_{\nu_e}\right]\left[\overline{\psi}_e\gamma_\lambda(g_V+g_A\gamma_5)\psi_e\right], \tag{10.144}$$

这里，

$$g_V=1+c_V,\quad g_A=1+c_A. \tag{10.145}$$

我们首先来计算$\tilde{\nu}_e e^-\to\tilde{\nu}_e e^-$的散射截面。从图10--16看出，在条件(10.142)的极限情形下，只需计及$S$矩阵的一阶效应，注意到(10.144)是非导数耦合，$\mathscr{H}_I=-\mathscr{L}_I$，则相应的$S$矩阵元是（用$r$, $r'$分别代表初、终态中微子的极化）：

$$(f|S_1|i)=(0|c_{p's'}d_{q'r'}\left\{-i\int d^4x:(-\mathscr{L}_I):\right\}d^+_{qr}c^+_{ps}|0)$$

$$\begin{aligned}\overset{(1.220)}{\underset{(6.6)}{=}}&\frac{iG_F}{\sqrt{2}}\int d^4x(0|c_{p's'}d_{q'r'}:\left\{\frac{1}{\sqrt{V}}d_{qr}\overline{v}_{qr}e^{iq\cdot x}\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\frac{1}{\sqrt{V}}d^+_{q'r'}v_{q'r'}\right.\\&\times e^{-iq'\cdot x}\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m_e}{E_{p'}}}c^+_{p's'}\overline{u}_{p's'}e^{-ip'\cdot x}\gamma_\lambda(g_V+g_A\gamma_5)\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m_e}{E_p}}c_{ps}u_{ps}\\&\left.\times e^{ip\cdot x}\right\}:d^+_{qr}c^+_{ps}|0).\end{aligned}$$

完成上式右边对$x$的积分，并注意

$$(0|c_{p's'}d_{q'r'}:d_{qr}d^+_{q'r'}c^+_{p's'}c_{ps}:d^+_{qr}c^+_{ps}|0)=-1,$$

即得：

$$\begin{aligned}(f|s_1|i)=&\frac{-iG_F}{\sqrt{2}}\frac{1}{V^2}\left(\frac{m_e^2}{E_pE_{p'}}\right)^{1/2}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p'+q'-p-q)\\&\times\overline{v}_{qr}\gamma_\lambda(1+\gamma_5)v_{q'r'}\overline{u}_{p's'}\gamma_\lambda(g_V+g_A\gamma_5)u_{ps},\end{aligned} \tag{10.146}$$

因此，

$$M_{fi}=\overline{v}_{qr}\gamma_\lambda(1+\gamma_5)v_{q'r'}\overline{u}_{p's'}\gamma_\lambda(g_V+g_A\gamma_5)u_{ps}. \tag{10.147}$$

这里已将$G_F^2$从$\mathrm{M}_{fi}$里提出。按照(10.29)式，并考虑到：对中微子，$N_i = N_f = 1$，对电子，$N_i = \sqrt{\frac{E_p}{m_e}}$，$N_f = \sqrt{\frac{E_{p'}}{m_e}}$，以及在实验室参考系里$F = \left|\frac{\mathbf{p}}{E_p} - \frac{\mathbf{q}}{E_q}\right|\frac{1}{V} = \frac{1}{V}$。就得到反应截面$\sigma$：

$$\sigma = \frac{G_F^2}{2}\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{m_e^2}{E_p}\int\frac{d^3p'}{E_{p'}}d^3q'\,\delta^{(4)}(p'+q'-p-q)|\mathrm{M}_{fi}|^2. \quad (10.148)$$

为了求得无极化截面$\sigma_{un}$，需要计算$\frac{1}{4}\sum|\mathrm{M}_{fi}|^2$：

$$\frac{1}{4}\sum_{\substack{s,r\\s',r'}}^{2}|\mathrm{M}_{fi}|^2 = \frac{1}{4}\sum_{r,r'}^{2}|\bar{v}_{\mathbf{q}r}\gamma_\lambda(1+\gamma_5)v_{\mathbf{q}'r'}|^2$$

$$\times\sum_{s,s'}^{2}|\bar{u}_{\mathbf{p}'s'}\gamma_\lambda(g_V+g_A\gamma_5)u_{\mathbf{p}s}|^2$$

(10.42)、(10.39)、并消去$\gamma_4$

$$= \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left[(1-\gamma_5)\gamma_\lambda\frac{\gamma\cdot q}{2i|\mathbf{q}|}\gamma_\tau(1+\gamma_5)\frac{\gamma\cdot q'}{2i|q'|}\right]$$

$$\times\mathrm{Tr}\left[(g_V-g_A\gamma_5)\gamma_\lambda\frac{\gamma\cdot p'+im_e}{2im_e}\gamma_\tau(g_V+g_A\gamma_5)\frac{\gamma\cdot p+im_e}{2im_e}\right] \quad (10.149)$$

利用附录一公式（1）、(10)、(11)和(1.71)$b$、(1.71)$d$以及如下诸等式：

$$\varepsilon_{\mu\alpha\nu\beta}(\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\tau}-\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\tau}+\delta_{\mu\tau}\delta_{\lambda\nu}) = 0,$$

$$(\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta}-\delta_{\mu\nu}\delta_{\alpha\beta}+\delta_{\mu\beta}\delta_{\alpha\nu})(\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\tau}-\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\tau}+\delta_{\mu\tau}\delta_{\lambda\nu}) = 2(\delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\tau}+\delta_{\lambda\beta}\delta_{\alpha\tau}),$$

$$(\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta}-\delta_{\mu\nu}\delta_{\alpha\beta}+\delta_{\mu\beta}\delta_{\alpha\nu})\delta_{\mu\nu} = -2\delta_{\alpha\beta},$$

$$\varepsilon_{\mu\alpha\nu\beta}\delta_{\mu\nu} = 0,$$

$$(1\pm\gamma_5)^2 = 2(1\pm\gamma_5).$$

$$(g_V+g_A\gamma_5)(g_V-g_A\gamma_5) = g_V^2-g_A^2,$$

容易得到

$$\frac{1}{4}\sum_{\substack{s,r\\s',r'}}|\mathrm{M}_{fi}|^2 = \frac{1}{m_e^2|\mathbf{q}||\mathbf{q}'|}\Big[(g_V+g_A)^2(p\cdot q')(p'\cdot q)$$

$$+(g_V-g_A)^2(p\cdot q)(p'\cdot q')+m_e^2(g_V^2-g_A^2)(q\cdot q')\Big],$$

因此，无极化截面为

$$\sigma_{un} = \frac{G_F^2}{2}\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{E_p|\mathbf{q}|}\int\frac{d^3p'}{E_{p'}}\frac{d^3q'}{|\mathbf{q}'|}\delta^{(4)}(p'+q'-p-q)$$

$$\times [(g_V+g_A)^2(p\cdot q')(p'\cdot q)+(g_V-g_A)^2(p\cdot q)(p'\cdot q') + m_e^2(g_V^2-g_A^2)(q\cdot q')]. \quad (10.150)$$

完成此式右边对 $\mathbf{p}'$ 的积分，消去 $\delta^{(3)}(\mathbf{p}'+\mathbf{q}'-\mathbf{p}-\mathbf{q})$；为了完成对$\mathbf{q}'$的积分，在动量空间选取球坐标（见图10—18），使得

$$d^3q'=|\mathbf{q}'|^2\sin\theta d\theta d\varphi d|\mathbf{q}'| = |\mathbf{q}'|^2\frac{d|\mathbf{q}'|}{dE_f}d\Omega dE_f.$$

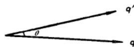



图10—18 动量空间的球坐标，以初态中微子动量方向为极轴方向。

这里，$E_f=E_{p'}+|\mathbf{q}'|$，将上式代入（10.150），完成对$E_f$的积分，消去$\delta(E_{p'}+|\mathbf{q}'|-E_p-|\mathbf{q}|)$ 就有

$$\sigma_{un}=\frac{G_F^2}{2}\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{E_p|\mathbf{q}|}\int d\Omega\frac{|\mathbf{q}'|^2}{E_{p'}|\mathbf{q}'|}\frac{d|\mathbf{q}'|}{dE_f}\Big((g_V+g_A)^2(p\cdot q')(p'\cdot q) + (g_V-g_A)^2(p\cdot q)(p'\cdot q')+m_e^2(g_V^2-g_A^2)(q\cdot q')\Big). \quad (10.151)$$

在实验室参考系里，

$$\mathbf{p}=0,\ E_p=m_e \quad (10.152)$$

因而，使用类似于推导（10.73）$a$和(10.74)$a$的方法，可由能量守恒定律

$$m_e+|\mathbf{q}|=E_{p'}+|\mathbf{q}'| \quad (10.153)a$$

和动量守恒定律

$$\mathbf{q}=\mathbf{p}'+\mathbf{q}' \quad (10.153)b$$

导出以下两个关系式：

$$E_f=\sqrt{|\mathbf{q}|^2+|\mathbf{q}'|^2-2|\mathbf{q}||\mathbf{q}'|\cos\theta+m_e^2}+|\mathbf{q}'| \quad (10.154)a$$

$$|\mathbf{q}'|=\frac{m_e|\mathbf{q}|}{m_e+|\mathbf{q}|(1-\cos\theta)}, \quad (10.154)b$$

将此二式结合又有

$$\frac{d|\mathbf{q}'|}{dE_f}=\frac{E_{p'}|\mathbf{q}'|}{m_e|\mathbf{q}|}; \quad (10.155)$$

另方面，由能量、动量守恒定律

$$p'+q'=p+q$$

和质壳关系

$$p'^2=p^2=-m_e^2$$
$$q'^2=q^2=0$$

可得

$$
\left.\begin{aligned}
p'\cdot q' &= p\cdot q = -m_e|\mathbf{q}|,\\
p'\cdot q &= p\cdot q' = -m_e|\mathbf{q}'|,\\
q'\cdot q &= p\cdot q - p\cdot q' = -m_e|\mathbf{q}| + m_e|\mathbf{q}'|.
\end{aligned}\right\} \tag{10.156}
$$

再把（10.152)、(10.155）和（10.156）代入（10.151）：

$$
\sigma_{un} = \frac{G_F^2}{2}\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{|\mathbf{q}|^2}\int d\Omega[(g_V+g_A)^2|\mathbf{q}'|^4
+ m_e(g_V^2-g_A^2)|\mathbf{q}'|^3 + (g_V-g_A)^2|\mathbf{q}|^2|\mathbf{q}'|^2 - m_e(g_V^2-g_A^2)|\mathbf{q}||\mathbf{q}'|^2] \tag{10.157}
$$

只要把(10.154)$b$代入此式，并完成对$\Omega$的积分就得到实验室参考系里的无极化截面，此式两边对$\Omega$微分，又可得到相应的微分截面。

但是，当入射中微子的能量$|\mathbf{q}|\sim m_e$时，（10.157）给出的截面值很小，以致在实验上观测不到。为了使理论结果能与实验测量值进行比较，我们必须再次限制中微子能量为$|\mathbf{q}|\gg m_e$，与（10.142）式结合，就得到理论上限定的中微子能量范围[注1]：

$$
M_W、M_Z \gg |\mathbf{q}| \gg m_e. \tag{10.158}
$$

现在，完成（10.157）式右边对$\Omega$的积分：

$$
\int d\Omega|\mathbf{q}'|^2 = \int_0^\pi \sin\theta d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{m_e^2|\mathbf{q}|^2}{[m_e+|\mathbf{q}|(1-\cos\theta)]^2}
$$

令$x=-\cos\theta$
$y=m_e+|\mathbf{q}|(1+x)$

$$
= 2\pi m_e^2|\mathbf{q}|\int_{m_e}^{m_e+2|\mathbf{q}|}\frac{dy}{y^2} = 2\pi m_e|\mathbf{q}|, \tag{10.159a}
$$

同样可得

$$
\int d\Omega|\mathbf{q}'|^3 = \pi m_e|\mathbf{q}|^2, \tag{10.159b}
$$

$$
\int d\Omega|\mathbf{q}'|^4 = \frac{2}{3}\pi m_e|\mathbf{q}|^3. \tag{10.159c}
$$

注意，虽然我们有条件（10.158），但在进行上述积分时，却不能把（10.154)$b$式分母中的$m_e$忽略掉（为什么？）。将（10.159）代入（10.157），并略去正比于$m_e^2$的项[（10.157）右边第二、四项]，就得到

$$
\sigma_{un} = \frac{G_F^2 m_e|\mathbf{q}|}{4\pi}[(g_V-g_A)^2 + \frac{1}{3}(g_V+g_A)^2]. \tag{10.160a}
$$

[注1] 实验上已测得$M_W=81\text{GeV}$，$M_Z=91\text{GeV}$，而$m_e=0.511\times10^{-3}\text{GeV}$，因而，例如当$|\mathbf{q}|$的数量级是1GeV时，(10.158)式就到满足（详见p224脚注的引文）。

或

$$\sigma_{un}=\frac{G_F^2 m_e|\mathbf{q}|}{4\pi}[4\sin^4\theta_W+\frac{1}{3}(3-2\sin^2\theta_W)^2]. \tag{10.160b}$$

对于纯粹的中性流反应，例如$\nu_\mu e^-\to\nu_\mu e^-$，全部计算均与前述相同，唯一要修改之处是：自（10.144）起要用$c_V$、$c_A$分别代替$g_V$、$g_A$，因此

$$\sigma_{un}=\frac{G_F^2 m_e|\mathbf{q}|}{4\pi}[(c_V-c_A)^2+\frac{1}{3}(c_V+c_A)^2], \tag{10.161a}$$

或

$$\sigma_{un}=\frac{G_F^2 m_e|\mathbf{q}|}{4\pi}[4\sin^4\theta_W+\frac{1}{3}(1-2\sin^2\theta_W)^2]. \tag{10.161b}$$

最后，我们来估计$\sigma_{un}$的数量级．由于（10.160）和（10.161）右边方括号内的量，其值近于$O(1)$：

$$[\cdots\cdots]\sim O(1),$$

故仅就数量级而言，

$$\sigma_{un}\sim\frac{G_F^2 m_e|\mathbf{q}|}{4\pi}, \tag{10.162}$$

由（8.83）式可得

$$G_F^2\cong\left(\frac{1.03}{8.8}\right)^2\times10^{-8}\frac{1}{\text{GeV}^4}$$

而

$$1\text{GeV}=10^3\text{MeV}=1.6\times10^{-3}\text{尔格},$$

故

$$G_F^2\cong\left(\frac{1.03}{8.8}\right)^2\frac{1}{(1.6)^2}\times10^{-2}\frac{1}{\text{GeV}^2}\frac{1}{\text{尔格}^2}, \tag{10.163}$$

因为$\hbar=c=1$，所以

$$\text{尔格}^{-1}=1.05\times10^{-27}\text{秒} \tag{10.164}$$

$$\text{秒}=3\times10^{10}\text{厘米}, \tag{10.165}$$

由此得

$$G_F^2\cong\left(\frac{1.03}{8.8}\right)^2\left(\frac{3\times1.05}{1.6}\right)^2\times10^{-38}\frac{1}{\text{GeV}^2}\text{厘米}^2,$$

将此结果代入（10.162），并取$m_e=0.51\times10^{-3}\text{GeV}$，$4\pi\approx12.6$，就得到

$$\sigma_{un}\sim\frac{G_F^2 m_e|\mathbf{q}|}{4\pi}\cong\left(\frac{1.03}{8.8}\right)^2\left(\frac{3.2}{1.6}\right)^2\left(\frac{0.51}{12.6}\right)\times10^{-39}$$

$$\times\frac{|q|}{\text{GeV}}\text{厘米}^2\cong 2.1\times 10^{-42}\frac{|q|}{\text{GeV}}\text{厘米}^2. \qquad (10.166)$$

由这结果可见，$\sigma_{un}$之值是很小的，仅当入射中微子的能量$|q|$不小于1GeV时，$\sigma_{un}$之数量级才不致比$10^{-42}$厘米$^2$更小。上述计算结果与实测值基本符合，例如[注1]，实验上测得的$\nu_\mu e^-\to\nu_\mu e^-$截面值为

$$\sigma_{un}=(1.6\pm 0.4)\times 10^{-42}\frac{|q|}{\text{GeV}}\text{厘米}^2.$$

## §8 π介子和K介子的轻子型衰变，分支比

上节讨论的$\nu e$弹性散射属于高能弱作用的范围。本节要讨论的$\pi$衰变和$K$衰变以及下一节要讨论的$\mu$介子衰变则属于低能弱作用的范围。$\pi$介子和$K$介子都是强子。我们要讨论的衰变过程是：

$$\pi^+\to\mu^++\nu_\mu \qquad \pi^-\to\mu^-+\tilde{\nu}_\mu$$

$$\pi^+\to e^++\nu_e \qquad \pi^-\to e^-+\tilde{\nu}_e$$

$$K^+\to\mu^++\nu_\mu \qquad K^-\to\mu^-+\tilde{\nu}_\mu$$

$$K^+\to e^++\nu_e \qquad K^-\to e^-+\tilde{\nu}_e$$

这些衰变过程都是半轻子弱过程，在这样的弱作用过程里同时伴有强作用的成份。例如，按照Fermi弱作用理论，一个$\pi^+$介子衰变成一个正电子和一个中微子的过程可以是：$\pi^+$介子首先通过强作用转变为一个虚质子和一个虚反中子（图10—19），然后，虚质子与虚反中子再通过弱作用产生正电子和中微子。我们看到，在这个问题里有以下两点值得注意：第一，初态粒子是Bose子，而不是Fermi子；第二，初态粒子与终态粒子之间的相互作用不是点作用（即不是定域作用）。因此，不能把第八章的$V-A$理论一成不变地搬过来用。但是，仍然可以类比于$V-A$理论来构造$\pi\to\nu e$、$K\to\nu e$等过程的唯象相互作用：即假定$\mathscr{L}_I$仍取$V-A$流—流耦合的形式。以

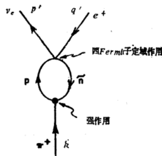



图10—19 $\pi^+\to e^++\nu_e$过程的一种可能图形。上面的顶点是弱作用，下面的顶点是强作用。

$$\pi^+\to e^++\nu_e$$

为例，终态轻子的弱流便是如下的$V-A$流：

$$\bar{\psi}_\nu\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_e, \qquad (10.167)$$

初态$\pi^+$介子的“$V-A$流”，唯一可能的形式是：

〔注1〕 见《Quarks and Leptons》，PLENUM，1980，p.237.

$$f_\pi(\partial_\lambda\phi^+ + \phi\partial_\lambda\phi), \tag{10.168}$$

其中，$f_\pi$为待定参数．（10.168）的极矢部分对$\pi^+\to e^+\nu_e$没有贡献，因而按照$V-A$理论，我们有

$$\mathscr{L}_I = i\frac{G_F}{\sqrt{2}}f_\pi\overline{\psi}_\nu\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_e\partial_\lambda\phi + \text{厄米共轭项} \tag{10.169}$$

虽然，$\mathscr{L}_I$属导数耦合，但只要把整个相互作用场系统的Lagrange函数密度

$$\mathscr{L} = -\overline{\psi}_e(\gamma\cdot\partial+m_e)\psi_e - \overline{\psi}_\nu(\gamma\cdot\partial)\psi_\nu - \partial_\mu\phi^+\partial_\mu\phi - m_\pi^2\phi^+\phi + \mathscr{L}_I \tag{10.170}$$

代入Legendre变换

$$\mathscr{H} = \pi_e\dot{\psi}_e + \pi_\nu\dot{\psi}_\nu + \pi\dot{\phi} + \dot{\phi}^+\pi^+ - \mathscr{L}, \tag{10.171}$$

并注意

$$\pi = \dot{\phi}^+ + \frac{G_F}{\sqrt{2}}f_\pi\overline{\psi}_\nu\gamma_4(1+\gamma_5)\psi_e, \tag{10.172a}$$

$$\pi^+ = \dot{\phi}, \tag{10.172b}$$

即可得到

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_e + \mathscr{H}_\nu + \mathscr{H}_\pi + \mathscr{H}_I,$$

其中，

$$\mathscr{H}_e = \psi_e^+(\gamma_4\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla + \gamma_4 m_e)\psi_e, \tag{10.173a}$$

$$\mathscr{H}_\nu = \psi_\nu^+\gamma_4\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla\psi_\nu, \tag{10.173b}$$

$$\mathscr{H}_\pi = \pi\pi^+ + \nabla\phi^+\cdot\nabla\phi + m_\pi^2\phi^+\phi, \tag{10.173c}$$

$$\mathscr{H}_I = -\mathscr{L}_I. \tag{10.173d}$$

正因为我们有(10.173)$d$的简单关系，所以在（10.169）式里曾引入虚数$i$以保证$\mathscr{H}_I$的厄米性．

（10.169）右边的厄米共轭项对$\pi^+\to e^+\nu_e$没有贡献，因而相应的$S$矩阵元为：

$$\begin{aligned}(f|S_1|i) &= (0|c_{\mathbf{p}'s_1'}d_{\mathbf{q}'s_2'}\left\{-i\int d^4x:\mathscr{H}_I:\right\}a_{\mathbf{k}}^+|0) \\ &= (0|c_{\mathbf{p}'s_1'}d_{\mathbf{q}'s_2'}\left\{-\frac{G_F}{\sqrt{2}}f_\pi\int d^4x:\overline{\psi}_\nu^{(-)}\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_e^{(-)}\partial_\lambda\phi^{(+)}:\right\}a_{\mathbf{k}}^+|0)\end{aligned}$$

利用平面波展式(1.220)$b$、(6.6)$a$和(5.43)$a$可将上式转到动量空间：

$$\begin{aligned}(f|S_1|i) &= i\frac{G_F}{\sqrt{2}}f_\pi\frac{1}{V^{3/2}}\sqrt{\frac{m_e}{2E_{q'}\omega_k}}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p'+q'-k) \\ &\quad\times\overline{u}_{\mathbf{p}'s_1'}\gamma\cdot k(1+\gamma_5)v_{\mathbf{q}'s_2'},\end{aligned} \tag{10.174}$$

由此就有能量、动量守恒定律：

$$k = p' + q' \tag{10.175}$$

借助于(10.175)、(1.144)$a$以及(1.226)$a$的厄米共轭式又可把（10.174）式简化为

$$(f|S_1|i) = \frac{1}{V^{3/2}}\sqrt{\frac{m_e}{2E_{q'}\omega_k}}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p'+q'-k)\mathrm{M}_{fi} \tag{10.176}$$

其中，

$$\mathrm{M}_{fi} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi m_e \bar{u}_{\mathbf{p}'s_1'}(1-\gamma_5)v_{\mathbf{q}'s_2'}. \tag{10.177}$$

按照公式（10.14），可以写出$\pi^+$介子衰变为正电子$e^+$和中微子 $\nu_e$ 的衰变几率.我们现在，把这个衰变几率简记为$W$：

$$W = \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{m_e}{2\omega_k}\int\frac{d^3q'}{E_{q'}}d^3p'\delta^{(4)}(p'+q'-k)|\mathrm{M}_{fi}|^2 \tag{10.178}$$

相应地，

$$W_{un} = \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{m_e}{2\omega_k}\int\frac{d^3q'}{E_{q'}}d^3p'\delta^{(4)}(p'+q'-k)\sum_{s_1',s_2'}^{2}|\mathrm{M}_{fi}|^2. \tag{10.179}$$

其中，

$$\begin{aligned}\sum_{s_1',s_2'}^{2}|\mathrm{M}_{fi}|^2 &= \frac{G_F^2}{2}f_\pi^2 m_e^2\sum_{s_1',s_2'}^{2}|\bar{u}_{\mathbf{p}'s_1'}(1-\gamma_5)v_{\mathbf{q}'s_2'}|^2\\ &= \frac{G_F^2}{2}f_\pi^2 m_e^2 \mathrm{Tr}\left\{\gamma_4(1-\gamma_5)\gamma_4\frac{\gamma\cdot p'}{2i|\mathbf{p}'|}(1-\gamma_5)\frac{\gamma\cdot q'-im_e}{2im_e}\right\}\\ &= -\frac{1}{4}\frac{G_F^2 f_\pi^2 m_e}{|\mathbf{p}'|}\mathrm{Tr}[(\gamma\cdot p')(\gamma\cdot q')] = -\frac{G_F^2 f_\pi^2 m_e}{|\mathbf{p}'|}p'\cdot q'\\ &= \frac{G_F^2 f_\pi^2 m_e}{2|\mathbf{p}'|}(m_\pi^2 - m_e^2),\end{aligned} \tag{10.180}$$

在$\pi^+$介子的自身参考系里，

$$\mathbf{k} = 0, \quad \omega_k = m_\pi,$$

$$\mathbf{p}' = -\mathbf{q}',$$

使用我们已经熟悉的办法（见图10—20），把$d^3p'$写为

$$d^3p' = |\mathbf{p}'|^2 d|\mathbf{p}'|d\Omega$$

$$= |\mathbf{p}'|^2\frac{1}{\frac{dE_f}{d|\mathbf{p}'|}}dE_f d\Omega, \tag{10.181a}$$

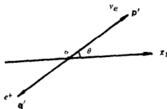



图10—20 在$\pi^+$介子自身参考系里选取球坐标，极轴$0x_3$可任意给定

其中，

$$E_f = E_{q'} + |\mathbf{p}'| = \sqrt{|\mathbf{p}'|^2 + m_e^2} + |\mathbf{p}'|, \tag{10.181b}$$

将（10.180）和（10.181）代入（10.179），完成对$\mathbf{q}'$和$E_f$的积分，消去$\delta^{(4)}(p'+q'-k)$，并完成对$\Omega$的积分，就得到

$$W_{un} = \frac{G_F^2 f_\pi^2}{8\pi} \frac{m_e^2}{m_\pi^3} (m_\pi^2 - m_e^2)^2. \tag{10.182}$$

这就是在$\pi^+$介子自身参考系里的衰变几率。我们看到，它只与$\pi^+$介子质量和电子质量有关。因此，对于

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu,$$

只要把（10.182）中的$m_e$换成$m_\mu$，就得到相应的无极化衰变几率：

$$W_{un} = \frac{G_F^2 f_\pi^2}{8\pi} \frac{m_\mu^2}{m_\pi^3} (m_\pi^2 - m_\mu^2)^2 \tag{10.183}$$

读者可以大致重复本节的讨论来证明：（10.182）和（10.183）分别对$\pi^-$介子的下述衰变过程：

$$\pi^- \to e^- + \tilde{\nu}_e, \quad \pi^- \to \mu^- + \tilde{\nu}_\mu$$

也同样成立，而且对于K介子的衰变过程，只要把$m_\pi$换成$m_K$即可。因此，就有以下的衰变几率之比，即分支比，记为BR：

$$\mathrm{BR}\left(\frac{\pi \to e\nu}{\pi \to \mu\nu}\right) = \frac{W(\pi \to e\nu)}{W(\pi \to \mu\nu)} = \frac{m_e^2 (m_\pi^2 - m_e^2)^2}{m_\mu^2 (m_\pi^2 - m_\mu^2)^2} \tag{10.184}$$

$$\mathrm{BR}\left(\frac{K \to e\nu}{K \to \mu\nu}\right) = \frac{W(K \to e\nu)}{W(K \to \mu\nu)} = \frac{m_e^2 (m_K^2 - m_e^2)^2}{m_\mu^2 (m_K^2 - m_\mu^2)^2}, \tag{10.185}$$

现在，把$m_\pi \cong 273 m_e$，$m_K \cong 965 m_e$和$m_\mu \cong 207 m_e$代入（10.184）和（10.185），就得到BR之值为：

$$\mathrm{BR}\left(\frac{\pi \to e\nu}{\pi \to \mu\nu}\right) = 1.29 \times 10^{-4} \tag{10.186}$$

$$\mathrm{BR}\left(\frac{K \to e\nu}{K \to \mu\nu}\right) = 2.52 \times 10^{-5} \tag{10.187}$$

而实验结果是：[注1]

$$\mathrm{BR}\left(\frac{\pi \to e\nu}{\pi \to \mu\nu}\right) = (1.267 \pm 0.023) \times 10^{-4}, \tag{10.188}$$

$$\mathrm{BR}\left(\frac{K \to e\nu}{K \to \mu\nu}\right) \cong 2.42 \times 10^{-5} \tag{10.189}$$

理论值与实测值之间的偏离都在$10^{-6}$以下，这说明，唯象相互作用(10.169)是正确的。

〔注1〕 见汉斯·弗朗费尔等著，王忠民等译，《亚原子物理学》，pp.366—368，原子能出照社，1981年。

## §9 μ⁻介子衰变，弱耦合常数$G_F$

μ⁻介子的衰变过程 $\mu^-\to e^-\bar{\nu}_e\nu_\mu$是纯轻子弱过程，而且μ介子的寿命已精确测定：

$\tau\cong2.2\times10^{-6}$秒〔注1〕

本节将证明：

$$\tau^{-1}=\frac{G_F^2m_\mu^5}{192\pi^3},$$

其中，$m_\mu$是μ介子的质量．据此，就能够确定弱耦合常数$G_F$，这一过程的$\mathscr{L}_I$便是(8.73)式右边第一项：

$$\mathscr{L}_I=\frac{G_F}{\sqrt{2}}[\bar{\psi}_e\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_{\nu_e}][\bar{\psi}_{\nu_\mu}\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_\mu].\tag{10.190}$$

因为$\mathscr{L}_I$是非导数耦合，$\mathscr{H}_I=-\mathscr{L}_I$，所以最低阶（一阶）近似$S$矩阵元为：

$$(f|S_1|i)=-i\int d^4x(f|:\mathscr{H}_I:|i)=i\int d^4x(f|:\mathscr{L}_I(x):|i).\tag{10.191}$$

设初、终态粒子的四维动量和极化分别是：

$\mu^-\quad(p,s),$

$e^-\quad(q',r'),$

$\bar{\nu}_e\quad(k'',\xi'),$

$\nu_\mu\quad(k',\eta'),$

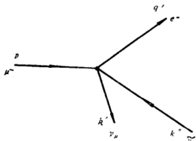



图10—21 在$V-A$理论里，μ⁻介子衰变图．

则

$$(f|S_1|i)=(0|c_{q'r'}d_{k''\xi'}c_{k'\eta'}S_1c^+_{ps}|0)$$

$$=i\int d^4x(0|c_{q'r'}d_{k''\xi'}c_{k'\eta'}:\left\{\frac{G_F}{\sqrt{2}}[\bar{\psi}_e^{(-)}\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_{\nu_e}^{(-)}]\right.$$

$$\left.\times[\bar{\psi}_{\nu_\mu}^{(-)}\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_\mu^{(+)}]\right\}:c^+_{ps}|0)$$

$$=-\frac{iG_F}{\sqrt{2}}\frac{1}{V^2}\left(\frac{m_\mu m_e}{E_pE_{q'}}\right)^{1/2}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p-q'-k'-k'')$$

$$\times\bar{u}_{q'r'}\gamma_\lambda(1+\gamma_5)v_{k''\xi'}\bar{u}_{k'\eta'}\gamma_\lambda(1+\gamma_5)u_{ps},\tag{10.192}$$

〔注1〕 τ的精确值为$\tau=2.197134\times10^{-6}$秒．可见任意一个基本粒子表．

按照公式（10.14），平均寿命之倒数为：

$$\tau^{-1}=\frac{1}{(2\pi)^5}\frac{G_F^2}{2}\frac{m_\mu m_e}{E_p}\int\frac{d^3q'}{E_q'}d^3k'd^3k''\delta^{(4)}(p-q'-k'-k'')$$

$$\times\frac{1}{2}\sum_s^2\sum_{r'\zeta'\eta'}^2|\bar{u}_{q'r'}\gamma_\lambda(1+\gamma_5)v_{k''\xi'}\bar{u}_{k'\eta'}\gamma_\lambda(1+\gamma_5)u_{ps}|^2 \qquad (10.193)$$

因为实验上不测量初、终态粒子的极化，所以上式右边已对粒子极化求和、求平均．利用（10.39）、（10.40）可得

$$\frac{1}{2}\sum_s^2\sum_{r'\xi'\eta'}^2|\bar{u}_{q'r'}\gamma_\lambda(1+\gamma_5)v_{k''\xi'}\bar{u}_{k'\eta'}\gamma_\lambda(1+\gamma_5)u_{ps}|^2$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{\gamma_4(1+\gamma_5)\gamma_\alpha\gamma_4\left(\frac{\gamma\cdot q'+im_e}{2im_e}\right)\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\frac{\gamma\cdot k''}{2i|\mathbf{k}''|}\right\}$$

$$\times\mathrm{Tr}\left\{\gamma_4(1+\gamma_5)\gamma_\alpha\gamma_4\frac{\gamma\cdot k'}{2i|\mathbf{k}'|}\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\left(\frac{\gamma\cdot p+im_\mu}{2im_\mu}\right)\right\}.$$

将此式中的$\gamma_4$消去并按$(1+\gamma_5)^2=2(1+\gamma_5)$进行化简就得到：

$$\frac{1}{2}\sum_s^2\sum_{r'\xi'\eta'}^2|\bar{u}_{q'r'}\gamma_\lambda(1+\gamma_5)v_{k''\xi'}\bar{u}_{k'\eta'}\gamma_\lambda(1+\gamma_5)u_{ps}|^2$$

$$=\frac{1}{8m_em_\mu|\mathbf{k}'||\mathbf{k}''|}\mathrm{Tr}[\gamma_\alpha\gamma\cdot q'\gamma_\lambda\gamma\cdot k''-\gamma_5\gamma_\alpha\gamma\cdot q'\gamma_\lambda\gamma\cdot k'']$$

$$\times\mathrm{Tr}[\gamma_\alpha\gamma\cdot k'\gamma_\lambda\gamma\cdot p-\gamma_5\gamma_\alpha\gamma\cdot k'\gamma_\lambda\gamma\cdot p]$$

| (1.71) $d$, 附录一(10)式 |

$$=8\frac{1}{m_em_\mu|\mathbf{k}'||\mathbf{k}''|}p\cdot k''q'\cdot k'. \qquad (10.194)$$

把此式代入（10.193）得

$$\tau^{-1}=\frac{4G_F^2}{(2\pi)^5}\frac{1}{E_p}\int\frac{d^3q'}{E_{q'}}\frac{d^3k'}{|\mathbf{k}'|}\frac{d^3k''}{|\mathbf{k}''|}\delta^{(4)}(p-q'-k'-k'')p\cdot k''q'\cdot k'. \qquad (10.195)$$

上式右边的积分是一个Lorentz不变量．为了便于计算，我们首先在两个中微子$\nu_\mu$和$\bar{\nu}_e$的动量中心系里来完成对$\mathbf{k}'$和$\mathbf{k}''$的积分．这时，由动量守恒定律

$$\mathbf{p}=\mathbf{q}'+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'' \qquad (10.196)$$

以及

$$\mathbf{k}''=-\mathbf{k}' \qquad (10.197)$$

同时应有：

$$\mathbf{p}=\mathbf{q}' \tag{10.198}$$

和

$$|\mathbf{k}''|=|\mathbf{k}'|, \qquad |\mathbf{p}|=\mathbf{q}'|. \tag{10.199}$$

由于有关系式（10.197），故对$\mathbf{k}'$和$\mathbf{k}''$的积分并不独立，应在积分号前乘以数值因子$\frac{1}{2}$以避免计算结果的重复性：

$$\tau^{-1}=\frac{4G_F^2}{(2\pi)^5}\frac{1}{E_p}\frac{1}{2}\int\frac{d^3q'}{E_{q'}}\frac{d^3k'd^3k''}{|\mathbf{k}'|^2}\delta^{(4)}(p-q'-k'-k'')p\cdot k''q'\cdot k'. \tag{10.200}$$

以$\mathbf{p}$方向为极轴方向选择极坐标（见图10－22），使得

$$d^3k'=|\mathbf{k}'|^2\sin\theta d\theta d\varphi d|\mathbf{k}'|,$$

完成对$\mathbf{k}''$和$|\mathbf{k}'|$的积分，消去$\delta^{(4)}(p-q'-k'-k'')$，则（10.200）式成为

$$\tau^{-1}=\frac{4G_F^2}{(2\pi)^5}\frac{1}{E_p}\frac{1}{2}\int\frac{d^3q'}{E_{q'}}\sin\theta d\theta d\varphi\, p\cdot k''q'\cdot k', \tag{10.201}$$

为了完成对角度$\theta$、$\varphi$的积分，方便的做法是：在$\nu_\mu$和$\tilde{\nu}_e$的动量中心系里选择空间坐标架，使得$Ox_3$轴与$\mathbf{p}$方向（初态粒子$\mu$的动量方向）正向平行(见图10—23)，于是就有：

$$p_1=q_1'=p_2=q_2'=0, \tag{10.202a}$$

$$p_3=q_3'=|\mathbf{p}|=|\mathbf{q}'|. \tag{10.202b}$$

注意到，$k_3'=|\mathbf{k}'|\cos\theta$，则可由（10.202）式得到

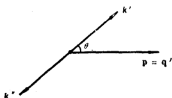


图10—22

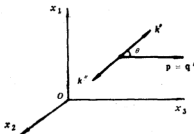


图10—23

$$p\cdot k''q'\cdot k'=-|\mathbf{p}|^2|\mathbf{k}'|^2\cos^2\theta+p_4q_4'k_4'k_4'+(p_4-q_4')p_3k_4'|\mathbf{k}'|\cos\theta,$$

将此式代入（10.201），完成对角度$\theta$、$\varphi$的积分，并利用显然的等式

$$|\mathbf{k}'|^2=\frac{1}{4}(E_p-E_{q'})^2 \tag{10.203a}$$

和

$$k'_4 k'_4 = -|\mathbf{k}'|^2 \tag{10.203b}$$

来化简积分结果，这样做以后，（10.201）式成为下式：

$$\tau^{-1} = \frac{1}{3}\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{G_F^2}{E_p}\int\frac{d^3q'}{E_{q'}}\left\{-(E_p-E_{q'})^2[|\mathbf{p}|^2+3p_4q'_4]\right\}. \tag{10.204}$$

要在$\nu_\mu$、$\bar{\nu}_e$的动量中心系里来完成对 $\mathbf{q}'$ 的积分是很不方便的，但只要把(10.204)式转到$\mu^-$介子自身参考系里去，进行这一积分就很容易．十分凑巧，由于狭义相对论的钟慢效应，基本粒子的寿命与参考系有关，为了有一个统一的标准，人们总是将实测值和理论公式转换到粒子的自身参考系里去．因此，我们正好应当把（10.204）式转到$\mu^-$介子的自身参考系．为了实现这一转换，需要借助于（10.202）把（10.204）的被积式扩充为Lorentz不变式．首先，由（10.202）$b$式可得

$$\begin{aligned}-(E_p-E_{q'})^2[|\mathbf{p}|^2+3p_4q'_4] &= (p_3q'_3+p_4q'_4)[-(E_p-E_{q'})^2] \\ &+2[p_3(p_3-q'_3)+p_4(p_4-q'_4)][q'_3(p_3-q'_3)+q'_4(p_4-q'_4)],\end{aligned} \tag{10.205}$$

其次，由（10.202）$a$和（10.202）$b$显然有以下诸等式：

$$\begin{aligned}&-(E_p-E_{q'})^2=(p-q')^2,\\ &p_3q'_3+p_4q'_4=p\cdot q',\\ &p_3(p_3-q'_3)+p_4(p_4-q'_4)=p\cdot(p-q'),\\ &q'_3(p_3-q'_3)+q'_4(p_4-q'_4)=q'\cdot(p-q').\end{aligned}$$

据此就有

$$\begin{aligned}-(E_p-E_{q'})^2[|\mathbf{p}|^2+3p_4q'_4] &= p\cdot q'(p-q')^2\\ &+2p\cdot(p-q')q'\cdot(p-q').\end{aligned} \tag{10.206}$$

或者

$$\begin{aligned}-(E_p-E_{q'})^2[|\mathbf{p}|^2+3p_4q'_4] &= -3p\cdot q'(m_\mu^2+m_e^2)-4(p\cdot q')^2\\ &-2m_\mu^2m_e^2.\end{aligned} \tag{10.207}$$

在$\mu^-$介子的自身参考系里，

$$\mathbf{p}=0,\quad E_p=m_\mu,$$

另方面，因为$m_e\cong\frac{1}{206}m_\mu$，故可将（10.207）式里含有$m_e^2$的项略去，并近似地取$E_{q'}\cong|\mathbf{q}'|$．于是（10.207）式成为

$$-(E_p-E_{q'})^2[|\mathbf{p}|^2+3p_4q'_4]=3m_\mu^3|\mathbf{q}'|-4m_\mu^2|\mathbf{q}'|^2,$$

相应地，（10.204）式成为

$$
\begin{aligned}
\tau^{-1} &= \frac{1}{3}\frac{1}{(2\pi)^4}G_F^2\int\frac{d^3q'}{|\mathbf{q}'|}\left\{3m_\mu^2|\mathbf{q}'|-4m_\mu|\mathbf{q}'|^2\right\} \\
&= \frac{G_F^2}{48\pi^4}\int d\Omega d|\mathbf{q}'|\left\{3m_\mu^2|\mathbf{q}'|^2-4m_\mu|\mathbf{q}'|^3\right\} \\
&= \frac{G_F^2}{12\pi^3}\int d|\mathbf{q}'|\left\{3m_\mu^2|\mathbf{q}'|^2-4m_\mu|\mathbf{q}'|^3\right\}. \qquad (10.208)
\end{aligned}
$$

在$\mu^-$介子自身参考系里，能量守恒定律和动量守恒定律的形式分别是：

$$m_\mu=|\mathbf{q}'|+|\mathbf{k}'|+|\mathbf{k}''| \qquad (10.209)a$$

和

$$0=\mathbf{q}'+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'', \qquad (10.209)b$$

因此

$$|\mathbf{q}'|=|\mathbf{k}'+\mathbf{k}''|\leqslant|\mathbf{k}'|+|\mathbf{k}''|.$$

此式与（10.209）$a$结合就得到$|\mathbf{q}'|$的变化范围是

$$0\leqslant|\mathbf{q}'|\leqslant\frac{m_\mu}{2},$$

至此，完成（10.208）右边的定积分$\int_0^{m_\mu/2}d|\mathbf{q}'|\{\cdots\cdots\}$就得到

$$\tau^{-1}=\frac{G_F^2m_\mu^5}{192\pi^3} \qquad (10.210)$$

将$\tau\cong2.2\times10^{-6}$秒代入上式，并利用公式（10.164）和（10.165），即可确定耦合常数$G_F$：

$$G_F=1.43\times10^{-49}\text{尔格}\cdot\text{厘米}^3. \qquad (10.211)$$

因为1尔格$=\dfrac{1}{1.05\times10^{-27}\times3\times10^{10}\text{厘米}}$，所以$G_F$具有长度平方的量纲。再次利用（10.164）和（10.165），可以把$G_F$用质子质量$M_p$来表示：

$$G_F=1.03\times10^{-5}M_p^{-2}. \qquad (10.212)$$

这里，我们已通过微扰论的计算证明了（8.83）式。

## 习　题

（1）到第九章为止，通过微扰计算得出了相互作用过程的$S$矩阵元。$S$矩阵元不是可以观测的物理量。在第十章里曾通过哪些主要步骤得到能与实验事实比较的理论结果？

（2）验证（10.20）式和（10.21）式。

（3）验证（10.40）—（10.42）式。

（4）计算以下阵迹

$$a)\quad \mathrm{Tr}[\gamma_5\gamma_\alpha\gamma\cdot q\gamma_\lambda\gamma\cdot k']\mathrm{Tr}[\gamma_5\gamma_\alpha\gamma\cdot k\gamma_\lambda\gamma\cdot p];$$

$$b)\quad \mathrm{Tr}[\gamma_4(1+\gamma_5)\gamma_4\gamma\cdot p(1+\gamma_5)\gamma\cdot q]$$
$$\times\mathrm{Tr}[\gamma\cdot l(1+\gamma_5)g_\mu\gamma\cdot q(1+\gamma_5)\gamma_\mu].$$

其中，$l_\mu$、$g_\mu$、$p_\mu$、$q_\mu$、$k_\mu$、$k'_\mu$均为四维动量分量。

（5）验证（10.173）$d$式。

（6）直接用（8.81）式的$\mathscr{L}_I$计算散射过程（8.79）$a$的无极化截面，并得出（10.161）$a$式之结果。

# 第十一章　QED重整化初步

## 引　　言

在第九—十章里，我们计算了$e^-e^-\to e^-e^-$散射、$e\gamma\to e\gamma$散射等电磁相互作用过程的最低阶微扰近似。如第九章所述，在QED里最低阶近似的计算结果与实验事实符合得很好，这是由于电磁相互作用耦合常数$e$很小。但随着实验技术的发展，要求理论计算值越来越精确，人们必须计算高阶微扰矩阵元，以便把理论结果与实验数据作进一步的比较。

但当计算高阶近似时却遇到了发散困难。例如，$e\gamma\to e\gamma$散射的四阶过程的Feynman图之一是图11—1，按照第九章所述Feynman规则，此图对应的$S$矩阵元是（这里没有计入交叉项的贡献）：

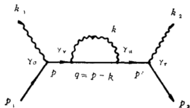



图11—1

$$
\begin{aligned}
(f|S_4|i) =&\left(\frac{1}{(2\pi)^4}\right)^4\int d^4p'd^4qd^4pd^4k\frac{1}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}_2|}}e^{\tau}_{\mathbf{k}_2\lambda_2}\\
&\times\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{E_{p_2}}}\bar{u}_{\mathrm{p}_2s_2}\left\{-e\gamma_\tau(2\pi)^4\delta^{(4)}(p'-p_2-k_2)\right\}\left(\frac{-1}{\gamma\cdot p'-im}\right)\\
&\times\left\{-e\gamma_\mu(2\pi)^4\delta^{(4)}(q-p'+k)\right\}\left(\frac{-1}{\gamma\cdot q-im}\right)\\
&\times\left\{-e\gamma_\nu(2\pi)^4\delta^{(4)}(p-q-k)\right\}\left(\frac{-i\delta_{\mu\nu}}{k^2}\right)\left(\frac{-1}{\gamma\cdot p-im}\right)\\
&\times\left\{-e\gamma_\sigma(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1-p+k_1)\right\}\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{E_{p_1}}}u_{\mathrm{p}_1s_1}\frac{1}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}_1|}}e^{\sigma}_{\mathbf{k}_1\lambda_1},
\end{aligned}
\tag{11.1}
$$

完成上式中对$p'$、$p$、$q$的积分消去前三个$\delta$函数，这时，第四个$\delta$函数成为$\delta^{(4)}(p_1+k_1-p_2-k_2)$并有$p'=p$和$q=p-k$。利用动量空间电子传播函数的定义（6.94）$b$即可把（11.1）式写为下式：

$$(f|S_4|i)=(2\pi)^4\frac{1}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}_2|}}e^{\tau}_{\mathbf{k}_2\lambda_2}\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{E_{p_2}}}\,\bar{u}_{\mathbf{p}_2s_2}$$

$$\times(-e\gamma_\tau)\,S_F(p)[-e^2\Sigma(p)]S_F(p)\,(-e\gamma_\sigma)\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{E_{p_1}}}$$

$$\times u_{\mathbf{p}_1s_1}\frac{1}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}_1|}}e^{\sigma}_{\mathbf{k}_1\lambda_1}\,\delta^{(4)}(p_1+k_1-p_2-k_2) \tag{11.2}$$

将此式与图11—1对照，我们现在可将Feynman规则稍作形式上的简化：旋量粒子外线和光子外线仍使用表〔9.1〕的规则，但旋量粒子传播子和带电旋量粒子自能部分的规则改变如下：

| 旋量粒子传播子 | $S$矩阵元里的因子 | 旋量粒子自能部分 | $S$矩阵元里的因子 |
|---|---|---|---|
| $p$ (直线) | $\longrightarrow S_F(p)=\dfrac{-1}{\gamma\cdot p-im}$ | $k$, $\gamma_\nu$, $\gamma_\mu$, $p-k$ | $\longrightarrow -e^2\Sigma(p)$ |

此外，一阶光子顶角在$S$矩阵元里就对应一个$\gamma$矩阵与电子电荷的乘积的负值，整个Feynman图在$S$矩阵元里还对应一个全过程的能量、动量守恒因子$(2\pi)^4\delta^{(4)}(\sum\limits_i p_i-\sum\limits_f p_f)$.式(11.2)中的$\Sigma(p)$由（9.84）式定义，它是一个对数性发散积分。这样，（11.2）式的矩阵元就没有意义。我们再来看第二个例子，当不考虑交换散射图时，$e^-e^-\to e^-e^-$散射的四阶过程Feynman图之一是图11—2，大体重复得出（11.2）式的步骤即可写出与此图对应的$S$矩阵元：

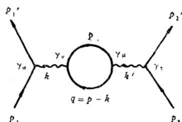



图11—2

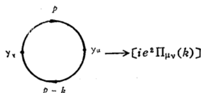
$$(f|S_4|i)=(2\pi)^4\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{E_{p_2'}}}\,\bar{u}_{\mathbf{p}_2's_2'}(-e\gamma_\tau)\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{E_{p_2}}}u_{\mathbf{p}_2s_2}D_{F\tau\mu}(k)$$

$$\times[ie^2\Pi_{\mu\nu}(k)]\,D_{F\nu\sigma}(k)\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{E_{p_1'}}}\,\bar{u}_{\mathbf{p}_1's_1'}(-e\gamma_\sigma)\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{E_{p_1}}}$$

$$\times u_{\mathbf{p}_1s_1}\delta^{(4)}(p_1'+p_2'-p_1-p_2) \tag{11.3}$$

再将此式与图11—2对照，又应对Feynman规则稍作形式上的简化：

| 由两条旋量粒子内线构成的闭合圈 | S矩阵元里的因子 | 光子传播子 | S矩阵元里的因子 |
|---|---|---|---|




$\longrightarrow [ie^2\Pi_{\mu\nu}(k)]$　　　ν 〰〰〰 μ ($k$)　　$\longrightarrow D_{F\mu\nu}(k)=\dfrac{-i\delta_{\mu\nu}}{k^2}$

式（11.3）中的$\Pi_{\mu\nu}(k)$由（9.89）式定义，它是一个平方发散积分，因而（11.3）式的$S$矩阵元没有意义．我们的最后一个例子是$e^-e^-\to e^-e^-$散射的四阶过程图（见图11—3）和六阶过程图（见图11—4）．利用Feynman规则容易写出与此二图对应的$S$矩阵元，

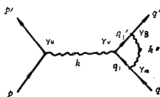



图11—3

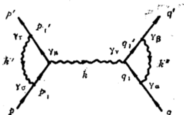



图11—4

经适当整理后分别得到：

$$(f|S_4|i)=(2\pi)^4\frac{1}{V^2}\Big(\frac{m^4}{E_{q'}E_qE_{p'}E_p}\Big)^{\frac{1}{2}}\bar{u}_{q's_2'}[-e\Lambda_\nu(q',q)]u_{qs_2}D_{F\nu\mu}(k)$$

$$\times\,\bar{u}_{p's_1'}(-e\gamma_\mu)u_{ps_1}\delta^{(4)}(p'+q'-p-q),\qquad(11.4)$$

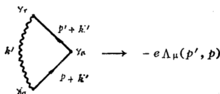
和

$$(f|S_6|i)=(2\pi)^4\frac{1}{V^2}\Big(\frac{m^4}{E_{q'}E_qE_{p'}E_p}\Big)^{\frac{1}{2}}\bar{u}_{q's_2'}[-e\Lambda_\nu(q',\ q)]u_{qs_2}$$

$$\times\,D_{F\nu\mu}(k)\bar{u}_{p's_1'}[-e\Lambda_\mu(p',p)]u_{ps_1}\delta^{(4)}(p'+q'-p-q).\qquad(11.5)$$

将以上二式分别与图11—3和图11—4对照可知，在三阶顶角情形下，$\Lambda_\mu(p',p)$与一阶顶角里的$\gamma_\mu$起着相似的作用．因此，对Feynman规则应作如下补充：

| 三阶光子顶角部分 | S矩阵元里的因子 |
|---|---|




$\longrightarrow\quad -e\Lambda_\mu(p',p)$

$\Lambda_\mu(p', p)$由下式定义：

$$\Lambda_\mu(p', p)=\frac{-ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4k'\frac{\delta_{\tau\sigma}}{k'^2}\gamma_\tau\frac{-1}{\gamma\cdot(p'+k')-im}\gamma_\mu\frac{-1}{\gamma\cdot(p+k')-im}\gamma_\sigma \tag{11.6}$$

此式右边的积分按对数规律发散，因而（11.4）式和(11.5)式的矩阵元同样没有意义．

上面谈到三个单圈图：二阶旋量粒子自能部分、二阶光子自能部分（即由两条旋量粒子内线构成的闭合圈）、三阶光子顶角部分，按照第九章介绍的Wick定理，这三个单圈图总是作为一个组成部分出现在高阶过程的图形中（从前面所举的例子即可看到）．因而使微扰论的高阶近似$S$矩阵元产生普遍的发散困难．

为了解决这一困难，人们在四十年代末五十年代初提出了消除$S$矩阵发散性的数学方法，即重整化方法．所谓重整化包括以下两方面的工作：第一，将电子自能、光子自能等圈图对应的发散积分（即$\Sigma(p)$、$\Pi_{\mu\nu}(k)$等等）定义为某个收敛积分的极限，在此基础上把发散积分分离成发散部分和有限部分．这一工作就是发散积分的正规化；第二，重新定义理论的参数（质量、电荷等）和场算符，把理论里的质量、电荷等定义为相应的实验观测值，这样，就把发散积分的发散部分吸收到参数和场量的新定义里去，使各阶$S$矩阵元和传播函数的各次近似都成为有限的．

在本章中我们就以旋量电动力学的上述三个单圈图为例介绍重整化的基本思想和基本方法．

## §1　Feynman积分的发散性质

所谓Feynman积分就是与包括圈图的Feynman图对应的积分．上述三个单圈图对应的积分$\Sigma(p)$、$\Pi_{\mu\nu}(k)$、$\Lambda_\mu(p', p)$就是Feynman积分的简单例子．除此以外，在$S$矩阵的高阶近似里还包括许多与复杂圈图对应的Feynman积分．

为了判断一个Feynman积分是否收敛以及如果它发散，其发散程度如何，首先要考察该积分的（也称与积分对应的Feynman图的）表观发散度$D$．$D$即是相应圈图里内线动量的标度变数的幂指数之总和．详言之，以标度变数$\lambda$遍乘圈图之所有内线动量，即以$\lambda k_i$代替内线动量$k_i$，当$\lambda\to\infty$时，Feynman积分以$\lambda^\omega$的方式趋向无穷大（对发散积分）或零（对收敛积分）．表观发散度$D$的定义就是：

$$D=\omega. \tag{11.7}$$

以上述三个单圈图为例，对于$\Sigma(p)$，把（9.84）式里的内线动量遍乘以标度变数$\lambda$，由此得到：

$$\Sigma(p, \lambda)=\frac{-1}{(2\pi)^4}\int\lambda^4d^4k\gamma_\mu\frac{-1}{\lambda[\gamma\cdot(\lambda^{-1}p-k)-im\lambda^{-1}]}\gamma_\mu\frac{-i}{\lambda^2k^2}$$

令$k$的积分限保持有限，并令$\lambda\to\infty$，则$\Sigma(p,\lambda)$将以$\lambda^{4-1-2}=\lambda^1$的方式趋向无限大，

因而Feynman积分$\Sigma(p)$的表观发散度即是$D=1$. 用同样的方法可以得到$\Pi_{\mu\nu}(k)$的表观发散度为$D=2$，$\Lambda_\mu(p',p)$的表观发散度为$D=0$。

我们还可以直接从圈图本身来确定$D$：每一条光子内线提供一个因子$\lambda^{-2}$，每一条旋量粒子内线提供一个因子$\lambda^{-1}$，对内线动量的积分$\int d^4q$提供一个因子$\lambda^4$，假定单圈图包含$I_b$条光子内线，$I_f$条旋量粒子内线，则

$$D=4-I_f-2I_b. \tag{11.8}$$

上述对表观发散度$D$的讨论只适用于旋量电动力学里的单圈图，对于更复杂的图形需要作更深入的讨论，公式（11.8）也需进行推广. $D$的名称里"表观"二字之含意也只有在复杂圈图情形下才能给予说明（参阅CLAUDE ITZYKSON, JEAN-BERNARD ZUBER《Quantum Field Theory》pp.379—382；胡瑶光《规范场论》，华东师范大学出版社，1984，pp.194—198）。

知道了Feynman积分的表观发散度$D$，就可以判断积分是否收敛，或者它的发散程度如何. 若$D\geqslant 0$，积分是表观发散的，若$D<0$，则积分是表观收敛的. 但对于我们本章讨论的单圈图，可以肯定当$D\geqslant 0$时相应的Feynman积分发散，而当$D<0$，积分是收敛的. 当$D=0$，1，2……时，分别称积分是对数发散积分、线性发散积分、平方发散积分、……. 例如Feynman积分$\Sigma(p)$，当积分变数$k$很大时，它的渐近行为与积分

$$\int d^4k\,\frac{1}{k^3} \tag{11.9}$$

相同. 此式的积分按线性规律发散，因而$\Sigma(p)$也是一个线性发散积分. 这与它的表观发散度$D=1$之事实一致（但我们后面会看到：$\Sigma(p)$事实上是一个对数发散积分）. 又如，Feynman积分$\Pi_{\mu\nu}(k)$，当$k$很大时，它的渐近行为与积分

$$\int d^4p\,\frac{1}{p^2} \tag{11.10}$$

相同，因而$\Pi_{\mu\nu}(k)$是一个平方发散的积分（与其$D=2$之事实一致）. 类似地，$\Lambda_\mu(p',p)$是一个对数发散积分（与其$D=0$一致）.

观察（11.9）式可知，$\Sigma(p)$的发散性是由于积分限趋于无穷大造成的，换言之是因为在整个动量空间（包括了大动量区域）对虚粒子动量积分而造成的，故$\Sigma(p)$的发散称为紫外发散. 同样，$\Pi_{\mu\nu}(k)$和$\Lambda_\mu(p',p)$的发散也属紫外发散. 紫外发散困难是微扰量子场论本身的根本性困难. 重整化方法的目的就是要消除（吸收）Feynman积分里包含的紫外发散. 在本章后面的计算里，偶尔会遇到另一种发散，红外发散，它来源于能量、动量很小的虚粒子[注1]. 但红外发散不是根本性的困难，它与我们对正规化积分的数学处理方法有关，我们在本章不去讨论它.

---

〔注1〕 详见朱洪元《量子场论》，pp.310—314

## §2 Pauli-Villars正规化

Pauli-Villars正规化（包里—维拉正规化），以下简称P-V正规化，是Pauli和Villars约在四十年代末五十年代初提出来的，由于在QED里Fermi子均具有质量，所以这种方法很适用于QED。

P-V正规化的基本思想是：引入一定数目的辅助场（又称正规子场）：$\phi_1(x_1)$、$\phi_2(x_2)$、……$\phi_n(x_n)$，这些场分别具有一个很大的质量 $M_s(s=1, 2, \cdots\cdots n)$，但这些场不是物理场，与它们相关的场量子并不出现于相互作用过程的初态；又因辅助场质量很大（并且最终要令$M_s\to\infty$)，相应场量子的能量远远超过相互作用场系统的初态能量，由于能量守恒的限制，辅助场量子也必定不出现于过程的终态。这样就保证使辅助场不引起任何可观察的物理效应，它只出现于理论计算的中间步骤里，丝毫不会影响理论的物理结果。此外，辅助场的引入不应破坏理论的规范不变性，因而假定辅助场与物理场之间以及辅助场相互间均按规范不变的方式耦合（回忆第八章§1）。我们不去详述P-V正规化的理论（读者可详阅史天一等译《量子电动力学》，第六章，北京师范大学出版社，1981年），而着重介绍具体方法。

引入辅助场的效果是把各阶$S$矩阵元里的发散积分所包含的传播子用一个相应的线性组合来代替。对Bose子传播子$\Delta(k, m)$〔注1〕，作如下代替：

$$\Delta(k,m)\to\Delta(k,m)+\sum_{s=1}^{n}c_s\Delta(k,,M_s)=\sum_{s=0}^{n}c_s\Delta(k,M_s), \tag{11.11}$$

这里，$c_0=1$，$M_0=m$。对Fermi子传播子作如下代替：

$$S_F(\gamma\cdot p,m)\to\sum_{s=0}^{n}c_sS_F(\gamma\cdot p,M_s) \tag{11.12}$$

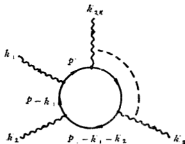


图11—5

同样规定$c_0=1, M_0=m$.通过此种代替手续，发散积分就成为收敛积分（称为原发散积分的正规化积分）。但对于由偶数条Fermi子内线构成的闭合圈，相应的Feynman积分用如下方式正规化：以图11—5为例，相应的Feynman积分是：

$$J(k_1, k_2, \cdots\cdots m)\sim\int d^4p\mathrm{Tr}\Big[\gamma_\mu\frac{1}{\gamma\cdot p-im}\gamma_\nu$$
$$\times\frac{1}{\gamma\cdot(p-k_1)-im}\gamma_\alpha\frac{1}{\gamma\cdot(p-k_1-k_2)-im}\gamma_\beta\cdots\cdots\Big],$$

〔1〕这里把粒子质量明显写出来，只是为了方便。

正规化方法是：

$$J(k_1,\ k_2,\ \cdots\cdots m)\to J^{reg}(k_1,\ k_2,\ \cdots\cdots m)$$

$$=\sum_{s=0}^{n} c_s J(k_1,\ k_2,\ \cdots\cdots M_s). \tag{11.13}$$

同样有$c_0=1$，$M_0=m$。$J^{reg}$是$J$的正规化积分。

此外，在（11.11）式——（11.13）式里的系数$c_1$，$c_2$，……$c_n$尚须满足一定条件，以便使正规化积分是收敛的。如§1所述，Feynman积分的发散性来源于积分限趋于无穷大。下面将通过实例来说明，当对Feynman积分进行P-V正规化后，积分的表观发散度降到$D<0$，只要$M_s$保持有限，积分就是收敛的。因此，我们保持$M_s$有限，并对收敛的正规化积分进行通常的计算，将其发散部分与有限部分分开，待经过重整化吸收其发散部分之后，再令$M_s\to\infty$。这样，在正规化之后，积分的发散性就来源于辅助场质量趋向无穷大。

## （一）二阶电子自能部分的正规化

二阶电子自能部分对应的Feynman积分是$\Sigma(p)$，由（9.84）式：

$$\Sigma(p)=\frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4k\gamma_\mu\frac{-1}{\gamma\cdot(p-k)-im}\gamma_\nu\frac{-i\delta_{\mu\nu}}{k^2}, \tag{11.14}$$

对$\Sigma(p)$进行正规化的方法，就是按（11.11）和（11.12）分别对（11.14）式中的光子传播子和电子传播子进行代替手续。但对$\Sigma(p)$，只须对光子传播子进行此种代替手续，即可得到$\Sigma(p)$的正规化积分$\Sigma^{reg}(p)$：首先引入一个很小的质量参数$\mu$（它的作用是截断红外发散，在计算的末尾令$\mu\to0$），把光子传播子写为$\frac{-i\delta_{\mu\nu}}{k^2+\mu^2}$，然后作代替：

$$\frac{-i\delta_{\mu\nu}}{k^2+\mu^2}\longrightarrow\sum_{s=0}^{n}c_s\frac{-i\delta_{\mu\nu}}{k^2+M_s^2},\quad (c_0=1,\ M_0=\mu),$$

这样就得到$\Sigma(p)$的正规化积分：

$$\Sigma^{reg}(p)=\frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4k\gamma_\mu\frac{-1}{\gamma\cdot(p-k)-im}\gamma_\nu\sum_{s=0}^{n}c_s\frac{-i\delta_{\mu\nu}}{k^2+M_s^2}$$

$$=\frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4k\gamma_\mu\frac{-1}{\gamma\cdot(p-k)-im}\gamma_\nu\Big\{c_0\frac{-i\delta_{\mu\nu}}{k^2+M_0^2}+c_1\frac{-i\delta_{\mu\nu}}{k^2+M_1^2}$$

$$+c_2\frac{-i\delta_{\mu\nu}}{k^2+M_2^2}+\cdots\cdots\Big\},$$

观察上式右方，只要取$c_1=-1$，$c_2=c_3=\cdots\cdots=0$，并把$M_1$记为$M$，则$\Sigma^{reg}(p)$就成为收敛积分。考虑到$c_0=1$，$M_0=\mu$，我们有：

$$\Sigma^{reg}(p)=\frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4k\gamma_\mu\frac{-1}{\gamma\cdot(p-k)-im}\gamma_\nu\left\{\frac{-i\delta_{\mu\nu}}{k^2+\mu^2}\right.$$

$$\left.-\frac{-i\delta_{\mu\nu}}{k^2+M^2}\right\}=\frac{-i}{(2\pi)^4}\int d^4k\frac{\gamma_\mu[\gamma\cdot(p-k)+im]\gamma_\mu}{[(p-k)^2+m^2]}$$

$$\times\frac{M^2-\mu^2}{(k^2+\mu^2)(k^2+M^2)},\tag{11.15}$$

使用§1里介绍的方法，可以求得$\Sigma^{reg}(p)$的表观发散度$D$：

$$D=4+1-6=-1<0$$

因此，只要$M$保持有限，$\Sigma^{reg}(p)$就收敛。至此，我们已完成对Feynman积分$\Sigma(p)$的正规化手续。发散积分$\Sigma(p)$被定义为收敛积分$\Sigma^{reg}(p)$当$M\to\infty$时的极限，事实上，由式（11.15）容易看出$\Sigma^{reg}(p)$的发散性在于$M\to\infty$：

$$\lim_{M\to\infty}\Sigma^{reg}(p)=\Sigma(p).$$

## （二）二阶光子自能部分的正规化

二阶光子自能部分对应的Feynman积分便是（9.89）式定义的$\Pi_{\mu\nu}(k)$。为了明确起见，现在把它记为$\Pi_{\mu\nu}(k,\ m)$，并按（11.13）式进行正规化：

$$\Pi_{\mu\nu}^{reg}(k,m)=\sum_{s=0}^{n}c_s\Pi_{\mu\nu}(k,\ M_s).\tag{11.16}$$

现将（9.89）式的被积式分母有理化：

$$\Pi_{\mu\nu}(k,m)=\frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\frac{\mathrm{Tr}\{\gamma_\mu[\gamma\cdot p+im]\gamma_\nu[\gamma\cdot(p-k)+im]\}}{[p^2+m^2][(p-k)^2+m^2]},$$

完成此式右边积分号下的求迹可得：

$$\Pi_{\mu\nu}(k,m)=\frac{4i}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\frac{p_\mu(p-k)_\nu+p_\nu(p-k)_\mu-p\cdot(p-k)\delta_{\mu\nu}-\delta_{\mu\nu}m^2}{[p^2+m^2][(p-k)^2+m^2]},\tag{11.17}$$

令

$$\left.\begin{aligned}&A=p^2(p-k)^2,\quad B=p^2+(p-k)^2,\\&A_{\mu\nu}=p_\mu(p-k)_\nu+p_\nu(p-k)_\mu-p\cdot(p-k)\delta_{\mu\nu},\end{aligned}\right\}\tag{11.18}$$

并令

$$m^2=y,\tag{11.19}$$

则（11.17）式右边的被积式成为：

$$f(y)=\frac{A_{\mu\nu}-\delta_{\mu\nu}y}{A+By+y^2}\tag{11.20}$$

$f(y)$是$y$的连续可微函数，可在$y=0$点把它展开为泰勒级数：

$$f(y)=f(0)+f'(0)y+\frac{1}{2!}f''(0)y^2+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)y^n+\cdots\cdots \tag{11.21}$$

把$f(0)=\dfrac{A_{\mu\nu}}{A}$、$f'(0)=\dfrac{-\delta_{\mu\nu}A-A_{\mu\nu}B}{A^2}$、$f''(0)=\dfrac{-2A_{\mu\nu}}{A^4}$、…… 代入上式，再把所得式代入（11.17），并令$y=m^2$，这时（11.16）式成为下式：

$$\Pi_{\mu\nu}^{reg}(k,m)=\sum_{s=0}^{n}c_s\Pi_{\mu\nu}(k,\ M_s)$$

$$=\sum_{s=0}^{n}c_s\frac{4i}{(2\pi)^4}\int d^4p\left\{\frac{A_{\mu\nu}}{A}-\frac{\delta_{\mu\nu}A+A_{\mu\nu}B}{A^2}M_s^2-\frac{A_{\mu\nu}}{A^4}M_s^4\right.$$

$$\left.+\cdots\cdots\right\} \tag{11.22}$$

由（11.18）式可知：

$$\left.\frac{A_{\mu\nu}}{A}\right|_{|p|\to\infty}\sim\frac{1}{p^2},\quad \left.\frac{\delta_{\mu\nu}A+A_{\mu\nu}B}{A^2}\right|_{|p|\to\infty}\sim\frac{1}{p^4}$$

$$\left.\frac{A_{\mu\nu}}{A^4}\right|_{|p|\to\infty}\sim\frac{1}{p^{14}},\quad \cdots\cdots$$

进行类似于从（11.9）到（11.10）式的讨论，可以断定（11.22）式右边第一项积分系平方发散，第二项积分为对数发散，而自第三项以后的各项积分均为收敛积分（可以求得$D=\omega\leqslant-10$）．为了使前两项积分不出现，$c_s$必须满足如下条件：

$$\sum_{s=0}^{n}c_s=0, \tag{11.23a}$$

$$\sum_{s=0}^{n}c_sM_s^2=0. \tag{11.23b}$$

现在从(11.23)式来确定$c_s$，我们希望$c_s$的个数应尽可能少．为此，先令$n=1$，则(11.23)式成为：

$$c_0+c_1=0,$$

$$c_0M_0^2+c_1M_1^2=0.$$

因为$c_0=1$，$M_0=m$，故以上二式无解．我们进而令$n=2$，这时，(11.23)式成为：

$$\left.\begin{aligned}&c_0+c_1+c_2=1+c_1+c_2=0,\\&m^2+c_1M_1^2+c_2M_2^2=0.\end{aligned}\right\} \tag{11.24}$$

(11.24) 有以下的解：

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \frac{M_2^2 - m^2}{M_1^2 - M_2^2}, \\ c_2 &= \frac{M_1^2 - m^2}{M_2^2 - M_1^2}. \end{aligned}\right\} \tag{11.25}$$

可令辅助场质量为：

$$M_s^2 = m^2 + s\Lambda^2, \tag{11.26}$$

其中，$s = 1, 2$，$\Lambda \gg 1$；在进行重整化后将令$\Lambda \to \infty$。把(11.26) 代入 (11.25) 就确定了系数$c_s$：

$$c_1 = -2, \quad c_2 = 1. \tag{11.27}$$

把 (11.17)、(11.27) 一并代入 (11.16)，就得到$\Pi_{\mu\nu}(k,m)$的正规化积分：

$$\Pi_{\mu\nu}^{reg}(k,m) = \frac{4i}{(2\pi)^4}\int d^4p$$

$$\times \sum_{s=0}^{2} c_s \frac{p_\mu(p-k)_\nu + p_\nu(p-k)_\mu - \delta_{\mu\nu}[p\cdot(p-k) + m^2 + s\Lambda^2]}{[p^2 + m^2 + s\Lambda^2 - i\varepsilon][(p-k)^2 + m^2 + s\Lambda^2 - i\varepsilon]}, \tag{11.28}$$

其中，$c_0 = 1$，$c_1 = -2$，$c_2 = 1$，分母上的$-i\varepsilon$是$m^2$里隐含的小虚部，现在显示地写出来〔见附录四（7）式及其后面的叙述〕。只要$\Lambda$保持有限，$\Pi_{\mu\nu}^{reg}(k,m)$就收敛，由 (11.28) 式不难看出$\Pi_{\mu\nu}^{reg}(k,m)$的发散性在于$\Lambda \to \infty$：

$$\lim_{\Lambda\to\infty} \Pi_{\mu\nu}^{reg}(k,m) = \Pi_{\mu\nu}(k,m).$$

## （三）三阶顶角部分的正规化

与三阶顶角部分对应的Feynman积分就是 (11.6) 式定义的$\Lambda_\mu(p',p)$。采取与正规化$\Sigma(p)$完全类似的正规化方法，可以求得$\Lambda_\mu(p',p)$的正规化积分：

$$\Lambda_\mu^{reg}(p',p) = \frac{-ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4k' \left\{ r_\tau \frac{-1}{\gamma\cdot(p'+k') - im}\right.$$

$$\left.\times \gamma_\mu \frac{-1}{\gamma\cdot(p+k') - im}\gamma_\tau \frac{M^2 - \mu^2}{(k'^2 + \mu^2)(k'^2 + M^2)}\right\} \tag{11.29}$$

容易看出，上述正规化积分的表观发散度为

$$D = -2 < 0,$$

所以只要$M$保持有限，$\Lambda_\mu^{reg}(p',p)$就是收敛积分，而且显然有：

$$\lim_{M\to\infty} \Lambda_\mu^{reg}(p',p) = \Lambda_\mu(p',p).$$

## §3 在P-V正规化里发散的分离

既然正规化积分收敛，就可对它进行通常的数学处理，把它分离为发散部分和有限部分。发散积分的发散部分仅仅表示积分的发散程度（对数发散或线性发散等等），其具体形式将因所使用的正规化方法不同而有差异。当然，发散部分的发散程度是不因正规化方法不同而改变的。发散积分的有限部分是对相互作用过程的高阶辐射修正，它对应着可观察的物理效应，因而它不应随正规化方法的不同而改变。这一点，在下面的实例里，可以清楚地看到。

### （一）二阶电子自能部分

正规化积分是（11.15）式。按照附录四（5）式合并该式分母后得：

$$\Sigma^{reg}(p)=\frac{-i}{(2\pi)^4}(M^2-\mu^2)\int_0^1 dx\int_0^1 2y\,dy\int d^4k$$

$$\times\frac{\gamma_\mu[\gamma\cdot(p-k)+im]\gamma_\mu}{\{[[(p-k)^2+m^2]x+(k^2+\mu^2)(1-x)]y+(k^2+M^2)(1-y)\}^3} \tag{11.30}$$

将此式分母按 $k$ 的幂指数写为下式：

$$\{k^2-2k\cdot Q+\Delta\}^3$$

其中，

$$\left.\begin{aligned}&Q=pxy,\\&\Delta=(p^2+m^2-\mu^2)xy+(\mu^2-M^2)y+M^2,\end{aligned}\right\} \tag{11.31}$$

于是，（11.30）式成为：

$$\Sigma^{reg}(p)=\frac{-i}{(2\pi)^4}(M^2-\mu^2)\int_0^1 dx\int_0^1 2y\,dy\int d^4k$$

$$\times\frac{\gamma_\mu[\gamma\cdot(p-k)+im]\gamma_\mu}{\{k^2-2k\cdot Q+\Delta\}^3}, \tag{11.32}$$

对于发散积分，一般不能作积分变数原点的平移[注1]，但（11.32）式是收敛积分，可将其积分变数原点作如下平移：

$$k\to k+Q \tag{11.33}$$

〔注1〕 见朱洪元，《量子场论》，pp.254—255，科学出版社，1960年。

把（11.33）代入（11.32）得：

$$\Sigma^{reg}(p)=\frac{-i}{(2\pi)^4}(M^2-\mu^2)\int_0^1 dx\int_0^1 2ydy\int d^4k$$

$$\times\frac{\gamma_\mu[-\gamma\cdot k+\gamma\cdot(p-Q)+im]\gamma_\mu}{\{k^2-Q^2+\Delta\}^3},$$

此式的被积式之分母是 $k$ 的偶函数，故其分子上含有 $k$ 的奇次幂的项对 $\int d^4k$ 不作贡献。将分子化简，消去两个 $\gamma_\mu$，又可把上式写为：

$$\Sigma^{reg}(p)=\frac{-i}{(2\pi)^4}(M^2-\mu^2)\int_0^1 dx\int_0^1 2ydy\int d^4k\frac{-2\gamma\cdot(p-Q)+4im}{\{k^2-Q^2+\Delta\}^3},\tag{11.34}$$

到此为止，虚粒子动量都是四维Minkowski 空间的矢量（闵氏动量）。为了便于完成积分 $\int d^4k$，需要把对闵氏动量的积分（11.34）转变为对欧氏动量（四维Euclid空间矢量）的积分。这就必须借助于如下的Wick转动。

**Wick转动**

首先回顾Δ的定义式（11.31），其中含有 $m^2$，为了进行Wick转动，现在需要把 $m^2$ 中的小虚部显示地写出来：

$$\Sigma^{reg}(p)=\frac{-i}{(2\pi)^4}(M^2-\mu^2)\int_0^1 dx\int_0^1 2ydy\int d^3kdk_0\frac{-2\gamma\cdot(p-Q)+4im}{\{k^2-Q^2+\Delta-i\varepsilon\}^3},\tag{11.35}$$

在此式里已把 $d^4k$ 写成 $d^3kdk_0$。现在来看上式对 $k_0$ 的积分。被积式之极点为：

$$k_0=\pm\sqrt{|\mathbf{k}|^2-Q^2+\Delta-i\varepsilon}\approx\pm\sqrt{|\mathbf{k}|^2-Q^2+\Delta}\mp i\varepsilon.\tag{11.36}$$

如图11—6 所示，被积式极点在二、四象限内，按Cauchy积分定理有：

$$\oint_c dk_0\frac{-2\gamma\cdot(p-Q)+4im}{\{k^2-Q^2+\Delta-i\varepsilon\}^3}=0.\tag{11.37}$$

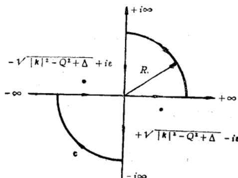



图11—6

小虚部 $-i\varepsilon$ 已帮助我们正确地选择积分围道c，此后它对积分结果不再有影响，我们再次把它隐含到 $m^2$ 里去。当围道c的半径 $R\to\infty$ 时，（11.37）式只剩下沿 $k_0$ 实轴和虚轴的积分：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 \frac{-2\gamma\cdot(p-Q)+4im}{\{k^2-Q^2+\Delta\}^3} + \int_{+i\infty}^{-i\infty} dk_0 \frac{-2\gamma\cdot(p-Q)+4im}{\{k^2-Q^2+\Delta\}^3} = 0, \quad (11.38)$$

在上式左边第二项积分里，令

$$k_0 = i\bar{k}_0$$

并把该项积分的变数代换成$\bar{k}_0$，这样就有

$$k^2 = |\mathbf{k}|^2 - k_0^2 = |\mathbf{k}|^2 - (i\bar{k}_0)^2 = |\mathbf{k}|^2 + (\bar{k}_0)^2. \quad (11.39)$$

由此式定义的$k$不再是闵氏动量而是四维欧氏动量，因此，(11.38) 式左边第二项已转变为对欧氏动量第四分量的积分：

$$\int_{+i\infty}^{-i\infty} dk_0 \frac{-2\gamma\cdot(p-Q)+4im}{\{k^2-Q^2+\Delta\}^3} = i\int_{+\infty}^{-\infty} d\bar{k}_0 \frac{-2\gamma\cdot(p-Q)+4im}{\{k^2-Q^2+\Delta\}^3}$$

$$= -i\int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{k}_0 \frac{-2\gamma\cdot(p-Q)+4im}{\{k^2-Q^2+\Delta\}^3},$$

把此式代入 (11.38) 式就得到对闵氏动量分量$k_0$积分与对欧氏动量分量$\bar{k}_0$积分的相互转换关系：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 \frac{-2\gamma\cdot(p-Q)+4im}{\{k^2-Q^2+\Delta\}^3} = i\int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{k}_0 \frac{-2\gamma\cdot(p-Q)+4im}{\{k^2-Q^2+\Delta\}^3}, \quad (11.40)$$

此式左边的$k$是闵氏动量，而右边的$k$应理解为欧氏动量。利用(11.40)式把 (11.34) 式里对$k_0$的积分代换成对$\bar{k}_0$的积分可得：

$$\Sigma^{reg}(p) = \frac{-ii}{(2\pi)^4}(M^2-\mu^2)\int_0^1 dx \int_0^1 2y\,dy \int d^4k \frac{-2\gamma\cdot(p-Q)+4im}{\{k^2-Q^2+\Delta\}^3} \quad (11.41)$$

(11.41) 式右边的$d^4k = d^3k\,d\bar{k}_0$是四维欧式空间的体积元，而动量$k$便是 (11.39) 式定义的欧氏动量。因此，(11.34) 中对闵氏动量的积分已转变为 (11.41) 中对欧氏动量的积分。我们强调指出，(11.40) 式相当于把对闵氏动量分量$k_0$的积分路经转动一个角度$\frac{\pi}{2}$，从实轴转到虚轴，这种转动手续改变了积分变数空间的度量性质，即把闵氏度量转变为欧氏度量。这便是Wick转动的主要含义。

为了完成（11.41）式里对$k$的积分，可在四维欧氏空间选取球坐标系（见示意图11—7）：

$$\bar{k}_0 = |k|\cos\Phi,$$
$$k_3 = |k|\sin\Phi\cos\theta,$$
$$k_2 = |k|\sin\Phi\sin\theta\sin\varphi,$$
$$k_1 = |k|\sin\Phi\sin\theta\cos\varphi.$$

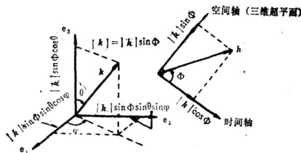



图11—7 四维欧氏空间球坐标示意图

这样就得到四维欧氏空间体积元为

$$d^4k = \underset{|k|\text{方向线度}}{(d|k|)}\underset{\Phi\text{方向线度}}{(|k|d\Phi)}\underset{\theta\text{方向线度}}{(|k|\sin\Phi d\theta)}\underset{\varphi\text{方向线度}}{(|k|\sin\Phi\sin\theta d\varphi)}$$

$$= |k|^3 d|k| d\varphi\sin\theta d\theta\sin^2\Phi d\Phi. \tag{11.42}$$

从图11—7看出，变量$|k|$、$\theta$、$\varphi$、$\Phi$的变化范围如下：

$$0 \leqslant |k| < \infty,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \Phi \leqslant \pi. \tag{11.43}$$

把（11.42）和（11.43）代入（11.41），完成对角度的积分：

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{\pi} \sin^2\Phi d\Phi = 2\pi^2, \tag{11.44}$$

利用附录四积分公式（27）完成对$|k|$的积分：

$$\int_0^{\infty} \frac{|k|^3 d|k|}{\{|k|^2 + (\Delta - Q^2)\}^3} = \frac{1}{4(\Delta - Q^2)}, \tag{11.45}$$

这样，（11.41）式成为：

$$\Sigma^{reg}(p) = \frac{1}{16\pi^2}(M^2 - \mu^2)\int_0^1 dx \int_0^1 2y dy \frac{-\gamma\cdot(p-Q) + 2im}{\Delta - Q^2} \overset{(11.31)\text{式}}{=}$$

$$= \frac{1}{16\pi^2}(M^2-\mu^2)\int_0^1 dx\int_0^1 2ydy\frac{-\gamma\cdot(p-Q)+2im}{(p^2+m^2-\mu^2)xy+(\mu^2-M^2)y+M^2-x^2y^2p^2},$$

因为辅助场质量$M\gg 1$，故上式分母里凡含有$y$的项（$-M^2y$除外）除当$y=1$时的值以外，均可略去不计，故适当整理上式分母后得到：

$$\Sigma^{reg}(p)=\frac{1}{16\pi^2}(M^2-\mu^2)\int_0^1 dx\int_0^1 2ydy\frac{-\gamma\cdot p(1-xy)+2im}{M^2(1-y)+m^2x+\mu^2(1-x)+x(1-x)p^2}, \tag{11.46}$$

对此式再作变数平移：

$$y\to 1-y,$$

并将平移后的分子分成与$y$有关的项和与$y$无关的项之和：

$$\Sigma^{reg}(p)=\frac{1}{8\pi^2}(M^2-\mu^2)\int_0^1 dx\int_0^1 dy\left\{\frac{-\gamma\cdot p(1-x)+2im}{M^2y+m^2x+\mu^2(1-x)+x(1-x)p^2}\right.$$

$$\left.+\frac{[-2\gamma\cdot px+\gamma\cdot p+\gamma\cdot pxy-2im]y}{M^2y+m^2x+\mu^2(1-x)+x(1-x)p^2}\right\}, \tag{11.47}$$

令$m^2x+\mu^2(1-x)+x(1-x)p^2=b(x,p)$则由公式：

$$\int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\ln(ax+b) \tag{11.48}$$

可得（11.47）右边第一项积分为：

$$\int_0^1 dy\frac{-\gamma\cdot p(1-x)+2im}{M^2y+m^2x+\mu^2(1-x)+x(1-x)p^2}$$

$$=\frac{1}{M^2}[-\gamma\cdot p(1-x)+2im]\ln[M^2y+m^2x+\mu^2(1-x)+x(1-x)p^2]\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{M^2}[-\gamma\cdot p(1-x)+2im]\ln\frac{M^2+m^2x+\mu^2(1-x)+x(1-x)p^2}{m^2x+\mu^2(1-x)+x(1-x)p^2}$$

$$\xrightarrow{|M^2\gg 1|}=\frac{1}{M^2}[-\gamma\cdot p(1-x)+2im]\left(\ln M^2-\ln[m^2x+\mu^2(1-x)+x(1-x)p^2]\right)$$

(11.49)a

（11.47）右边第二项积分可再分成两项：

$$\int_0^1 dy\frac{[-2\gamma\cdot px+\gamma\cdot p+\gamma\cdot pxy-2im]y}{M^2y+m^2x+\mu^2(1-x)+x(1-x)p^2}$$

$$=\int_0^1 dy\left\{\frac{[-2\gamma\cdot px+\gamma\cdot p-2im]y}{M^2y+b(x,p)}+\frac{\gamma\cdot pxy^2}{M^2y+b(x,p)}\right\} \tag{11.49$b$}$$

利用附录四（28）式完成（11.49)$b$右边第一项积分，并利用积分公式：

$$\int\frac{x^2dx}{ax+b}=\frac{1}{a^3}\left[\frac{1}{2}(ax+b)^2-2b(ax+b)+b^2\ln(ax+b)\right] \tag{11.50}$$

完成（11.49)$b$右边第二项积分，精确到与$M^{-2}$成比例的项，我们有：

$$\int_0^1 dy\frac{[-2\gamma\cdot px+\gamma\cdot p+\gamma\cdot pxy-2im]y}{M^2y+m^2x+\mu^2(1-x)+x(1-x)p^2}$$

$$=[-2\gamma\cdot px+\gamma\cdot p-2im]\frac{1}{M^2}+\frac{1}{2}\gamma\cdot px\frac{1}{M^2}$$

$$-\frac{b(x,p)}{M^4}\ln[M^2+b(x,p)]$$

$$=\left[\gamma\cdot p-\frac{3}{2}\gamma\cdot px-2im\right]\frac{1}{M^2}-O\left(\frac{1}{M^4}\ln M^2\right) \tag{11.51}$$

把（11.49)$a$和（11.51）代入（11.47），并注意：

$$\frac{M^2-\mu^2}{M^2}\approx 1,$$

和
$$\int_0^1 dx\left[\gamma\cdot p-\frac{3}{2}\gamma\cdot px-2im\right]\equiv\int_0^1 dx\left[\frac{1}{4}\gamma\cdot p-2im\right],$$

就可把（11.47）式写为：

$$\Sigma^{reg}(p)=\frac{1}{8\pi^2}\int_0^1 dx\left\{\left[-\gamma\cdot p(1-x)+2im\right]\left[\ln M^2\right.\right.$$

$$\left.\left.-\ln[m^2x+\mu^2(1-x)+x(1-x)p^2]\right]+\left[\frac{1}{4}\gamma\cdot p-2im\right]\right\} \tag{11.52}$$

上面我们从（11.15）式开始，经过合并分母，积分变数的原点平移、借助Wick转动计算对动量$k$的积分，并计算了对Feynman参数y的积分，从而得到$\Sigma^{reg}$的表示式（11.52）。下面要把（11.52）式右边分离为发散部分和有限部分。

由（11.52）式显见，$\Sigma^{reg}(p)$是$\gamma\cdot p$和$p^2$的函数（Lorentz标量函数），由于$\gamma p\cdot\gamma p=p^2$，故它事实上是$\gamma\cdot p$的唯一确定的函数（只要$M$保持有限）。我们在粒子动量的质壳处，即

$$\gamma\cdot p=im$$

处来分离发散(这样做是进行重整化所必须的)，亦即在动量空间的$\gamma\cdot p=im$点从$\Sigma^{reg}(p)$里把发散部分减除掉，$\gamma\cdot p=im$点就是我们的减除点。令$\Sigma^{reg}(p)$在减除点之值为$A$：

$$A=\Sigma^{reg}(p)|_{\gamma\cdot p=im} \tag{11.53}$$

则极易从（11.52）式得到：

$$A=\frac{1}{8\pi^2}\int_0^1 dx\left\{im(1+x)\left[\ln M^2-\ln[m^2x^2+\mu^2(1-x)]\right]-\frac{7}{4}im\right\} \tag{11.54}$$

在上式中令$\mu^2\to 0$（这样做不会引起红外发散，今后只要不会引起红外发散，均令$\mu^2\to 0$），并利用附录四的（29）式和（30）式完成上式对$x$的积分可得：

$$A=\frac{3im}{16\pi^2}\left(\ln\frac{M^2}{m^2}+\frac{1}{2}\right), \tag{11.55}$$

我们看到，A是一个对数发散常数，它的发散性表现在$M\to\infty$，当$M$保持有限时，它是有限的。由于A只与$M$、$m$有关，故$\Sigma^{reg}(p)-A$仍然是$\gamma\cdot p$的函数，可把它表示为：

$$\Sigma^{reg}(p)-A=(\gamma\cdot p-im)\Sigma^b(p), \tag{11.56}$$

此式右方的因子$(\gamma\cdot p-im)$保证使(11.56）与（11.53)相容。$\Sigma^b(p)$显然也是$\gamma\cdot p$的函数，可以对它再作减除：

$$\Sigma^b(p)-B=(\gamma\cdot p-im)\Sigma^f(p), \tag{11.57}$$

此式给出：

$$B=\Sigma^b(p)|_{\gamma\cdot p=im} \tag{11.58}$$

把（11.58）与（11.56）结合得到

$$B=\frac{\Sigma^{reg}(p)-A}{\gamma\cdot p-im}\Bigg|_{\gamma\cdot p=im}=\frac{\dfrac{d}{d(\gamma\cdot p)}[\Sigma^{reg}(p)-A]}{\dfrac{d}{d(\gamma\cdot p)}(\gamma\cdot p-im)}\Bigg|_{\gamma\cdot p=im}$$

$$=\frac{d}{d(\gamma\cdot p)}[\Sigma^{reg}(p)-A]\Bigg|_{\gamma\cdot p=im}=\frac{d}{d(\gamma\cdot p)}\Sigma^{reg}(p)\Bigg|_{\gamma\cdot p=im}$$

把(11.52)式代入

$$=\frac{1}{8\pi^2}\int_0^1 dx\left\{-(1-x)\left[\ln M^2-\ln[m^2x^2+\mu^2(1-x)]\right]\right.$$

$$\left.-2\frac{x^3-x}{x^2-\dfrac{\mu^2}{m^2}x+\dfrac{\mu^2}{m^2}}+\frac{1}{4}\right\} \tag{11.59}$$

上式右边被积式里的$\ln[m^2x^2+\mu^2(1-x)]$可近似写为$\ln m^2x^2$，并不引起红外发散，这样，利用附录四的（29）—（32）诸式完成上式对$x$的积分可得：

$$\mathrm{B}=\frac{-1}{16\pi^2}\left(\ln\frac{M^2}{m^2}+2\ln\frac{\mu^2}{m^2}+\frac{9}{2}\right), \tag{11.60}$$

可见，B也是一个对数发散常数（其中包含与$\mu^2\to 0$有关的红外发散项，这一点将在后面解释）。现在把我们所作的两次减除〔即（11.56）式和（11.57）式〕结合起来：

$$\Sigma^{reg}(p)=\mathrm{A}+(\gamma\cdot p-im)\mathrm{B}+(\gamma\cdot p-im)^2\Sigma^f(p). \tag{11.61}$$

倘若$\Sigma^f(p)$是发散积分，则减除工作还要继续进行，直至把$\Sigma^f(p)$里的发散部分减除干净，使$\Sigma^{reg}(p)$完全分离为发散部分和有限部分之和为止；而若$\Sigma^f(p)$已是一个收敛积分，则减除工作就告结束，这时按照（11.61）式，$\Sigma^{reg}(p)$包含两个对数发散部分（即右边前两项）和一个有限部分$\Sigma^c(p)$：

$$\Sigma^c(p)=(\gamma\cdot p-im)^2\Sigma^f(p). \tag{11.62}$$

这些部分在（11.61）式里已经完全分开。

下面就来求出$\Sigma^c(p)$，并弄清它是否收敛。由（11.54）式和（11.59）式有：

$$\begin{aligned}\mathrm{A}+(\gamma\cdot p-im)\mathrm{B}=&\frac{1}{8\pi^2}\int_0^1 dx\left\{[-\gamma\cdot p(1-x)+2im]\left[\ln M^2\right.\right.\\&\left.-\ln[m^2x^2+\mu^2(1-x)]\right]-2(\gamma\cdot p-im)\frac{x^3-x}{x^2-\frac{\mu^2}{m^2}x+\frac{\mu^2}{m^2}}\\&\left.+\left(\frac{1}{4}\gamma\cdot p-2im\right)\right\}\end{aligned} \tag{11.63}$$

把（11.52）和（11.63）一并代入（11.61）可得：

$$\begin{aligned}\Sigma^c(p)&=\Sigma^{reg}(p)-[\mathrm{A}+(\gamma\cdot p-im)\mathrm{B}]\\&=\frac{1}{8\pi^2}\int_0^1 dx\left\{[-\gamma\cdot p(1-x)+2im]\ln\left[\frac{m^2x^2+\mu^2(1-x)}{m^2x+\mu^2(1-x)+x(1-x)p^2}\right]\right.\\&\left.+2(\gamma\cdot p-im)\frac{x^3-x}{x^2-\frac{\mu^2}{m^2}x+\frac{\mu^2}{m^2}}\right\}.\end{aligned} \tag{11.64}$$

此式不再含有辅助场质量$M$，因而不再包含紫外发散，我们称它是紫外有限的，它就是$\Sigma^{reg}(p)$的有限部分。由于重整化的需要，$\Sigma^c(p)$在$\gamma\cdot p=im$点应为零。从（11.62）或（11.64）看到，$\Sigma^c(p)$已满足这一要求。但在$\Sigma^c(p)$中尚包含红外发散项：

$$\sim\int_0^1 dx\frac{-x}{x^2-\frac{\mu^2}{m^2}x+\frac{\mu^2}{m^2}}=\frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{m^2}\bigg|_{\mu^2\to 0}\longrightarrow\infty,$$

如前所述，在（11.60）式定义的紫外发散常数B里也包含一个与$\ln\frac{\mu^2}{m^2}$有关的红外发散项，因此，红外发散来源于我们的减除手续：在$\Sigma^{reg}(p)$里并不存在红外发散，但通过两次减除把它分离为（11.61）式右边的发散项与有限项之和时，在B和$\Sigma^{c}(p)$里同时出现红外发散。

至此，我们已完成对$\Sigma^{reg}(p)$的减除手续，它所包含的发散部分与有限部分已完全分开，结果就是（11.61）、（11.55）、（11.60）和（11.64）诸式。

### （二）二阶光子自能部分

正规化积分是（11.28）式。利用附录四（7）式把该式分母倒数表示为对参数$\alpha_1$、$\alpha_2$的积分：

$$\frac{1}{[p^2+m^2+s\Lambda^2-i\varepsilon][(p-k)^2+m^2+s\Lambda^2-i\varepsilon]}$$

$$=i^2\int_0^\infty\int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 \exp\left(-i\alpha_1(p^2+m^2+s\Lambda^2-i\varepsilon)\right)$$

$$\times\exp\left[-i\alpha_2[(p-k)^2+m^2+s\Lambda^2-i\varepsilon]\right] \tag{11.65}$$

对于（11.28）式的被积式分子，可以采用不同的方法来表示它，但我们这里采用一种能自动满足QED规范不变性的方法[注1]。引入辅助四矢$Y$、$Z$，把分子表示为

$$p_\mu(p-k)_\nu+p_\nu(p-k)_\mu-\delta_{\mu\nu}[p\cdot(p-k)+m^2+s\Lambda^2]$$

$$=\left(-\frac{\partial}{\partial Y_\mu}\frac{\partial}{\partial Z_\nu}-\frac{\partial}{\partial Y_\nu}\frac{\partial}{\partial Z_\mu}-\delta_{\mu\nu}\left(-\frac{\partial}{\partial Y}\cdot\frac{\partial}{\partial Z}+m^2+s\Lambda^2\right)\right)$$

$$\times\exp\left[i[Y\cdot p+Z\cdot(p-k)]\right]\Big|_{Y=Z=0} \tag{11.66}$$

把（11.65）、（11.66）代入（11.28）：

$$\Pi_{\mu\nu}^{reg}(k,m)=\frac{4ii^2}{(2\pi)^4}\int_0^\infty\int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2\sum_{s=0}^{2}c_s\left(-\frac{\partial}{\partial Y_\mu}\frac{\partial}{\partial Z_\nu}-\frac{\partial}{\partial Y_\nu}\frac{\partial}{\partial Z_\mu}\right.$$

$$\left.-\delta_{\mu\nu}\left(-\frac{\partial}{\partial Y}\cdot\frac{\partial}{\partial Z}+m^2+s\Lambda^2\right)\right)\exp\left[-i\left((\alpha_1+\alpha_2)(m^2+s\Lambda^2)+\alpha_2k^2+Z\cdot k\right)\right]$$

$$\times\int d^4p\,\exp\left\{i\left[-(\alpha_1+\alpha_2)p^2+2[\alpha_2k+Y/2+Z/2]\cdot p\right]\right\}\Big|_{Y=Z=0}$$

[注] 见CLAUDE ITZYKSON, JEAN-BERNARD ZUBER,《Quantum Field Theory》, p321.

用附录四公式（34）完成对$p$的积分，并适当整理：

$$\Pi_{\mu\nu}^{reg}(k, m)=\frac{-1}{4\pi^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}\sum_{s=0}^{2}c_s\exp\left[-i\left((\alpha_1+\alpha_2)(m^2+s\Lambda^2)+\alpha_2 k^2\right)\right]$$

$$\times\left[-\frac{\partial}{\partial Y_\mu}\frac{\partial}{\partial Z_\nu}-\frac{\partial}{\partial Y_\nu}\frac{\partial}{\partial Z_\mu}-\delta_{\mu\nu}\left(-\frac{\partial}{\partial Y}\cdot\frac{\partial}{\partial Z}+m^2+s\Lambda^2\right)\right]$$

$$\times\exp\left\{-i\left(Z\cdot k-\frac{[\alpha_2 k+Y/2+Z/2]^2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)\right\}\Big|_{Y=Z=0} \qquad (11.67)$$

完成上式的各项导数，结果如下：

$$\frac{\partial}{\partial Y_\mu}\frac{\partial}{\partial Z_\nu}\exp\left\{-i\left(Z\cdot k-\frac{[\alpha_2 k+Y/2+Z/2]^2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)\right\}\Big|_{Y=Z=0}$$

$$=\left\{\frac{i\delta_{\mu\nu}}{2(\alpha_1+\alpha_2)}+\frac{\alpha_1\alpha_2 k_\mu k_\nu}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}\right\}\exp\left\{i\frac{\alpha_2^2 k^2}{\alpha_1+\alpha_2}\right\}, \qquad (11.68)a$$

$$\frac{\partial}{\partial Y_\nu}\frac{\partial}{\partial Z_\mu}\exp\left\{-i\left(Z\cdot k-\frac{[\alpha_2 k+Y/2+Z/2]^2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)\right\}\Big|_{Y=Z=0}$$

$$=\left\{\frac{i\delta_{\mu\nu}}{2(\alpha_1+\alpha_2)}+\frac{\alpha_1\alpha_2 k_\mu k_\nu}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}\right\}\exp\left\{i\frac{\alpha_2^2 k^2}{\alpha_1+\alpha_2}\right\}, \qquad (11.68)b$$

$$\frac{\partial}{\partial Y}\cdot\frac{\partial}{\partial Z}\exp\left\{-i\left(Z\cdot k-\frac{[\alpha_2 k+Y/2+Z/2]^2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)\right\}\Big|_{Y=Z=0}$$

$$=\left\{\frac{2i}{\alpha_1+\alpha_2}+\frac{\alpha_1\alpha_2 k^2}{(\alpha_1+\alpha_1)^2}\right\}\exp\left\{i\frac{\alpha_2^2 k^2}{\alpha_1+\alpha_2}\right\} \qquad (11.68)c$$

在计算上述导数时应注意以下两点：

$$(1)\frac{\partial}{\partial Y_\mu}\left[k_\nu-\frac{[\alpha_2 k+Y/2+Z/2]_\nu}{\alpha_1+\alpha_2}\right]=-\frac{1/2\,\delta_{\mu\nu}}{\alpha_1+\alpha_2},$$

$$(2)\frac{\partial}{\partial Y_\lambda}\left[k_\lambda-\frac{[\alpha_2 k+Y/2+Z/2]_\lambda}{\alpha_1+\alpha_2}\right]=-4\frac{1/2}{\alpha_1+\alpha_2}.$$

把(11.68)$a$、(11.68)$b$、(11.68)$c$代入（11.67）得到：

$$\Pi_{\mu\nu}^{reg}(k, m)=\frac{-1}{4\pi^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}\sum_{s=0}^{2}c_s\left\{\frac{-2\alpha_1\alpha_2 k_\mu k_\nu}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}\right.$$

$$\left.-\frac{i\delta_{\mu\nu}}{\alpha_1+\alpha_2}-\delta_{\mu\nu}\left(\frac{-2i}{\alpha_1+\alpha_2}-\frac{\alpha_1\alpha_2 k^2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}+m^2+s\Lambda^2\right)\right\}$$

$$\times\exp\left\{-i\left[(\alpha_1+\alpha_2)(m^2+s\Lambda^2)+\frac{\alpha_1\alpha_2 k^2}{\alpha_1+\alpha_2}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}\sum_{s=0}^{2} c_s\left\{\frac{2\alpha_1\alpha_2(k_\mu k_\nu-\delta_{\mu\nu}k^2)}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}+\delta_{\mu\nu}\left[\frac{\alpha_1\alpha_2 k^2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{i}{\alpha_1+\alpha_2}+m^2+s\Lambda^2\right]\right\}\exp\left\{-i\left[(\alpha_1+\alpha_2)(m^2+s\Lambda^2)+\frac{\alpha_1\alpha_2 k^2}{\alpha_1+\alpha_2}\right]\right\} \quad (11.69)$$

QED的规范不变性导致微分形式的电荷守恒定律(见第八章§4)，而后者又导致$\Pi_{\mu\nu}^{reg}(k)$要满足如下条件：

$$k_\mu \Pi_{\mu\nu}^{reg}(k,m)=0\text{。}\text{[注1]} \quad (11.70)$$

因$k_\mu(k_\mu k_\nu-\delta_{\nu\mu}k^2)=0$，这就要求（11.69）式右边第二项积分为零，即

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}\sum_{s=0}^{2} c_s\delta_{\mu\nu}\left(\frac{\alpha_1\alpha_2 k^2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}-\frac{i}{(\alpha_1+\alpha_2)}+m^2+s\Lambda^2\right)$$

$$\times\exp\left\{-i\left[(\alpha_1+\alpha_2)(m^2+s\Lambda^2)+\frac{\alpha_1\alpha_2 k^2}{\alpha_1+\alpha_2}\right]\right\}=0 \quad (11.71)$$

可以证明此式的确成立[注2]，因而我们的计算方法能自动满足规范不变性.（11.71）式成立，使得$\Pi_{\mu\nu}^{reg}(k,\ m)$里包含的平方发散项自动被排除掉（见本小节后面），这一点的意义在后面讨论光子质量重整化时便会明了. 如果计算方法不适当，（11.71）式就不会自动成立[注3]，平方发散项便不能自动排除. 现在可以把（11.69）式简化为：

$$\Pi_{\mu\nu}^{reg}(k,\ m)=\frac{1}{2\pi^2}(k_\mu k_\nu-\delta_{\mu\nu}k^2)\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^4}\alpha_1\alpha_2$$

$$\times\left\{\exp\left[-i\left((\alpha_1+\alpha_2)m^2+\frac{\alpha_1\alpha_2 k^2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)\right]-2\exp\left[-i\left((\alpha_1+\alpha_2)(m^2+\Lambda^2)\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{\alpha_1\alpha_2 k^2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)\right]+\exp\left[-i\left((\alpha_1+\alpha_2)(m^2+2\Lambda^2)+\frac{\alpha_1\alpha_2 k^2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)\right]\right\}. \quad (11.72)$$

这里已把（11.28）式的$c_s$之值代入. 为了完成上式对$\alpha_1$、$\alpha_2$的积分，可按附录四（12）—（14）式进行变数替换：

$$\alpha_1=x\eta, \quad (11.73)a$$

$$\alpha_2=(1-x)\eta, \quad (11.73)b$$

---

〔注1〕（11.70）式之证明详见朱洪元，《量子场论》，pp.273—274.

〔注2〕详见CLAUDE ITZYKSON, JEAN-BERNARD ZUBER,《Quantum Field Theory》, pp321—322.

〔注3〕见N. N. BOGOLIUBOV, D. V. SHIRKOV,《Quantum Fields》, p219,(10)式.

$$d\alpha_1 d\alpha_2 = \eta d\eta dx, \tag{11.73c}$$

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \eta < \infty. \tag{11.73d}$$

把（11.73）代入（11.72）并重新组合（11.72）式里的虚指数项：

$$\Pi^{reg}_{\mu\nu}(k, m) = \frac{1}{2\pi^2}(k_\mu k_\nu - \delta_{\mu\nu}k^2)\int_0^1 dx x(1-x)\int_0^\infty \frac{d\eta}{\eta}$$

$$\times\Big\{\Big[\exp\big(-i\eta a(x, k)\big) - \exp\big(-i\eta[a(x,k)+\Lambda^2]\big)\Big]$$

$$+\Big[\exp\big(-i\eta[a(x,k)+2\Lambda^2]\big) - \exp\big(-i\eta[a(x,k)+\Lambda^2]\big)\Big]\Big\} \tag{11.74}$$

其中，

$$a(x, k) = m^2 + x(1-x)k^2. \tag{11.75}$$

利用附录四（33）式完成（11.74）式右边对 $\eta$ 的积分得：

$$\Pi^{reg}_{\mu\nu}(k, m) = \frac{1}{2\pi^2}(k_\mu k_\nu - \delta_{\mu\nu}k^2)\int_0^1 dx x(1-x)\Big\{\ln\frac{a(x,k)+\Lambda^2}{a(x,k)}$$

$$+\ln\frac{a(x,k)+\Lambda^2}{a(x,k)+2\Lambda^2}\Big\}, \tag{11.76}$$

因 $\Lambda \gg 1$，故有：

$$\ln\frac{a(x,k)+\Lambda^2}{a(x,k)} = \ln\frac{(m^2+\Lambda^2)\Big[1+\dfrac{x(1-x)k^2}{m^2+\Lambda^2}\Big]}{m^2\Big[1+\dfrac{x(1-x)k^2}{m^2}\Big]}$$

$$= \ln\frac{\Lambda^2}{m^2} - \ln\Big(1+x(1-x)\frac{k^2}{m^2}\Big), \tag{11.77a}$$

$$\ln\frac{a(x,k)+\Lambda^2}{a(x,k)+2\Lambda^2} \approx \ln\frac{1}{2} = -\ln 2. \tag{11.77b}$$

把（11.77）代入（11.76）便得到 $\Pi^{reg}_{\mu\nu}(k,m)$ 的如下表示式：

$$\Pi^{reg}_{\mu\nu}(k, m) = \frac{1}{12\pi^2}(k_\mu k_\nu - \delta_{\mu\nu}k^2)\Big[\ln\frac{\Lambda^2}{m^2} - \ln 2\Big]$$

$$-\frac{1}{2\pi^2}(k_\mu k_\nu - \delta_{\mu\nu}k^2)\int_0^1 dx x(1-x)\ln\Big(1+x(1-x)\frac{k^2}{m^2}\Big) \tag{11.78}$$

现在可以把 $\Pi_{\mu\nu}^{reg}(k, m)$ 中的发散部分与有限部分分开。为了重整化手续的需要，我们仍然选择光子动量的质壳，$k^2=0$，作为分离发散的减除点。首先把（11.78）式写为：

$$\Pi_{\mu\nu}^{reg}(k,m)=(k_\mu k_\nu-\delta_{\mu\nu}k^2)\Pi(k^2), \tag{11.79}$$

其中，

$$\Pi(k^2)=\frac{1}{12\pi^2}\ln\frac{\Lambda^2}{2m^2}-\frac{1}{2\pi^2}\int_0^1 dx\ \ x(1-x)\ln\left(1+x(1-x)\frac{k^2}{m^2}\right), \tag{11.80}$$

令$\Pi(k^2)$在减除点之值为D，则有

$$\Pi(k^2)\Big|_{k^2=0}=\mathrm{D}=\frac{1}{12\pi^2}\ln\frac{\Lambda^2}{2m^2}, \tag{11.81}$$

因此，（11.78）式又可写为：

$$\Pi_{\mu\nu}^{reg}(k,\ m)=\mathrm{D}_{\mu\nu}+\Pi_{\mu\nu}^{f}(k), \tag{11.82}$$

其中，

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_{\mu\nu}&=(k_\mu k_\nu-\delta_{\mu\nu}k^2)\mathrm{D}\\&=\frac{1}{12\pi^2}(k_\mu k_\nu-\delta_{\mu\nu}k^2)\ln\frac{\Lambda^2}{2m^2}\end{aligned} \tag{11.83}$$

便是 $\Pi_{\mu\nu}^{reg}(k, m)$ 里所包含的对数发散部分。在（11.78）式里把这一部分减除掉，就得到：

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}^{f}(k)&=\Pi_{\mu\nu}^{reg}(k,\ m)-\mathrm{D}_{\mu\nu}\\&=-\frac{1}{2\pi^2}(k_\mu k_\nu-\delta_{\mu\nu}k^2)\int_0^1 dx\ \ x(1-x)\ln\left(1+x(1-x)\frac{k^2}{m^2}\right).\end{aligned} \tag{11.84}$$

由此式看到，在 $\Pi_{\mu\nu}^{f}(k)$ 里既不含有紫外发散，也不含有红外发散，它就是 $\Pi_{\mu\nu}^{reg}(k, m)$ 里所包含的有限部分。由（11.84）式看出，$\Pi_{\mu\nu}^{f}(k)$满足如下条件：

$$\Pi_{\mu\nu}^{f}(k)\Big|_{k^2=0}=0 \tag{11.85}$$

这一点与重整化的要求是符合的。

现在，正规化手续已告完成，$\Pi_{\mu\nu}^{reg}(k, m)$已按(11.82)、(11.83)、(11.84)诸式分离为发散部分和有限部分之和，因而我们仍回到原来的记号，把 $\Pi_{\mu\nu}^{reg}(k, m)$记为 $\Pi_{\mu\nu}^{reg}(k)$：

$$\Pi_{\mu\nu}^{reg}(k) = D_{\mu\nu} + \Pi_{\mu\nu}^{f}(k)$$

$$= (k_\mu k_\nu - \delta_{\mu\nu}k^2)\left(\Pi(0) + \Pi^f(k^2)\right), \qquad (11.86)a$$

其中，$\Pi(0)$便是（11.81）式里的对数发散常数D.$\Pi^f(k^2)$满足条件（11.85）：

$$\Pi^f(k^2)\Big|_{k^2=0} = 0. \qquad (11.86)b$$

应当注意，在（11.86）$a$式里不含有平方发散部分，而在正规化以前，$\Pi_{\mu\nu}(k)$ 是一个平方发散的Feymman积分，这是由于 QED 的规范不变性所导致的。规范不变性导致（11.70）式，从而就有（11.71）式，因而$\Pi_{\mu\nu}^{reg}(k)$里的平方发散项被排除了。

## （三）三阶顶角部分

正规化积分是（11.29）式，为了便于计算，现在把该式写为：

$$\Lambda_\mu^{reg}(p', p) = \frac{-ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4k'\left\{\left(\frac{1}{k'^2+\mu^2} - \frac{1}{k'^2+M^2}\right)\right.$$

$$\left.\times\frac{\gamma_\tau[\gamma\cdot(p'+k')+im]\gamma_\mu[\gamma\cdot(p+k')+im]\gamma_\tau}{[(p'+k')^2+m^2][(p+k')^2+m^2]}\right\}, \qquad (11.87)$$

利用附录一（9）式可得：

$$\gamma_\tau[\gamma\cdot(p'+k')+im]\gamma_\mu[\gamma\cdot(p+k')+im]\gamma_\tau = -2\gamma\cdot(p+k')\gamma_\mu\gamma\cdot(p'+k')$$

$$+4im(p+k')_\mu + 4im(p'+k')_\mu + 2m^2\gamma_\mu. \qquad (11.88)$$

类似第（二）小节的做法，把（11.87）式分母的倒数表示为对参数$\alpha_1$、$\alpha_2$、$\alpha_3$的积分：

$$\frac{1}{(k'^2+\mu^2-i\varepsilon)[(p'+k')^2+m^2-i\varepsilon][(p+k')^2+m^2-i\varepsilon]}$$

$$= i^3\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \exp\left\{-i\alpha_1(k'^2+\mu^2)-\varepsilon\alpha_1\right\}$$

$$\times\exp\left\{-i\alpha_2[(p'+k')^2+m^2]-\varepsilon\alpha_2\right\}\exp\left\{-i\alpha_3[(p+k')^2+m^2]-\varepsilon\alpha_3\right\}$$

$$(11.89)a$$

$$\frac{1}{(k'^2+M^2-i\varepsilon)[(p'+k')^2+m^2-i\varepsilon][(p+k')^2+m^2-i\varepsilon]}$$

$$= i^3\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \exp\left\{-i\alpha_1(k'^2+M^2)-\varepsilon\alpha_1\right\}$$

$$\times\exp\left\{-i\alpha_2[(p'+k')^2+m^2]-\varepsilon\alpha_2\right\}\exp\left\{-i\alpha_3[(p+k')^2+m^2]-\varepsilon\alpha_3\right\}$$

$$(11.89)b$$

(11.87) 式的分子表示为如下的导数：

$$\left[2\gamma\cdot\frac{\partial}{\partial Y}\gamma_\mu\gamma\cdot\frac{\partial}{\partial Z}+4m\frac{\partial}{\partial Y_\mu}+4m\frac{\partial}{\partial Z_\mu}+2m^2\gamma_\mu\right]$$

$$\times\exp\left\{i\left[Y\cdot(p+k')+Z\cdot(p'+k')\right]\right\}\Big|_{Y=Z=0}, \tag{11.90}$$

其中，$Y$、$Z$是 4 维矢量.把 (11.89) 和 (11.90) 代入 (11.87)，并按积分和求导数的顺序进行整理：

$$\Lambda_\mu^{reg}(p',\ p)=\frac{-e^2}{(2\pi)^4}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3$$

$$\times\left\{\left[\exp\left(-i[\alpha_1\mu^2+\alpha_2(p'^2+m^2)+\alpha_3(p^2+m^2)]\right)\right.\right.$$

$$\left.-\exp\left(-i[\alpha_1 M^2+\alpha_2(p'^2+m^2)+\alpha_3(p^2+m^2)]\right)\right]$$

$$\times\left[2\gamma\cdot\frac{\partial}{\partial Y}\gamma_\mu\gamma\cdot\frac{\partial}{\partial Z}+4m\frac{\partial}{\partial Y_\mu}+4m\frac{\partial}{\partial Z_\mu}+2m^2\gamma_\mu\right]\exp\left(iY\cdot p+iZ\cdot p'\right)$$

$$\times\int d^4k'\exp\left[i\left(-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)k'^2+2[-\alpha_2 p'-\alpha_3 p+Y/2+Z/2]\cdot k'\right)\right]\Big\}\Big|_{Y=Z=0}, \tag{11.91}$$

先完成对$k'$的积分〔利用附录四公式 (34)〕，然后求出对$Y$、$Z$的各项导数〔只需注意(11.68)$c$式后面提到的两点〕，并适当整理即得：

$$\Lambda_\mu^{reg}(p',\ p)=\frac{ie^2}{16\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2}\left\{\frac{-2i\gamma_\mu}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\right.$$

$$-2\gamma\cdot\left(p-\frac{\alpha_2 p'+\alpha_3 p}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\right)\gamma_\mu\gamma\cdot\left(p'-\frac{\alpha_2 p'+\alpha_3 p}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\right)+4im\left(p_\mu-\frac{\alpha_2 p'_\mu+\alpha_3 p_\mu}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\right)$$

$$\left.+4im\left(p'_\mu-\frac{\alpha_2 p'_\mu+\alpha_3 p_\mu}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\right)+2m^2\gamma_\mu\right\}$$

$$\times\left\{\exp\left[-i\left(\alpha_1\mu^2+\alpha_2(p'^2+m^2)+\alpha_3(p^2+m^2)-\frac{(\alpha_2 p'+\alpha_3 p)^2}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\right)\right]\right.$$

$$\left.-\exp\left[-i\left(\alpha_1 M^2+\alpha_2(p'^2+m^2)+\alpha_3(p^2+m^2)-\frac{(\alpha_2 p'+\alpha_3 p)^2}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\right)\right]\right\} \tag{11.92}$$

为了完成上式对$\alpha_1$、$\alpha_2$、$\alpha_3$的积分，按附录四 (12) 式— (14) 式进行变数替换：

$$\alpha_1 = x_1\eta, \tag{11.93a}$$

$$\alpha_2 = x_2\eta, \tag{11.93b}$$

$$\alpha_3 = (1 - x_1 - x_2)\eta \tag{11.93c}$$

$$d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 = \eta^2 d\eta dx_1 dx_2, \tag{11.93d}$$

$$0 \leqslant x_1 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant 1 - x_1, \quad 0 \leqslant \eta < \infty \tag{11.93e}$$

把 (11.93) 代入 (11.92)：

$$\Lambda_\mu^{reg}(p', p) = \frac{ie^2}{16\pi^2}\int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \int_0^\infty d\eta \Big\{\frac{-2i\gamma_\mu}{\eta}$$

$$-2\gamma\cdot\big(p - x_2 p' - (1 - x_1 - x_2)\ p\big)\gamma_\mu\gamma\cdot\big(p' - x_2 p' - (1 - x_1 - x_2)\ p\big)$$

$$+ 4im\ (\ p_\mu - x_2 p'_\mu - (1 - x_1 - x_2)\ p_\mu) + 4im\ (p'_\mu - x_2\ p'_\mu - (1 - x_1 - x_2)\ p_\mu)$$

$$+ 2m^2\gamma_\mu\Big\}\Big\{\exp\Big[-i\eta\big(x_1\mu^2 + x_2(p'^2 + m^2) + (1 - x_1 - x_2)(p^2 + m^2)$$

$$-[x_2 p' + (1 - x_1 - x_2)\ p]^2\big)\Big] - \exp\Big[-i\eta\big(x_1 M^2 + x_2(p'^2 + m^2)$$

$$+ (1 - x_1 - x_2)(p^2 + m^2) - [x_2 p' + (1 - x_1 - x_2)\ p]^2\big)\Big]\Big\} \tag{11.94}$$

分别完成上式右边对 $\eta$ 的各项积分．先计算第一项：

$$-2i\gamma_\mu\int_0^\infty \frac{d\eta}{\eta}\Big\{\exp\Big[i\eta\big(-x_1\mu^2 - A_1(x_1, x_2, p', p)\ \big)\Big]$$

$$-\exp\Big[i\eta\big(-x_1 M^2 - A_1(x_1, x_2, p', p)\ \big)\Big]\Big\}$$

附录四公式(33)

$$= -2i\gamma_\mu \ln\frac{-x_1 M^2 - A_1(x_1, x_2, p', p)}{-x_1\mu^2 - A_1(x_1, x_2, p', p)}, \tag{11.95a}$$

其中，

$$A_1(x_1, x_2, p', p) = x_2(p'^2 + m^2) + (1 - x_1 - x_2)(p^2 + m^2)$$
$$-[x_2 p' + (1 - x_1 - x_2)p]^2, \tag{11.95b}$$

因 $M \gg 1$，故有

$$\ln\frac{-x_1 M^2 - A_1(x_1, x_2, p', p)}{-x_1\mu^2 - A_1(x_1, x_2, p', p)} = \ln\frac{-x_1 M^2\Big(1 + \dfrac{A_1(x_1, x_2, p', p)}{+x_1 M^2}\Big)}{-x_1\mu^2\Big(1 + \dfrac{A_1(x_1, x_2, p', p)}{+x_1\mu^2}\Big)}$$

$$= \ln M^2 - \ln\mu^2 - \ln\left(x_1\mu^2 + A_1(x_1, x_2, p', p)\right) + \ln x_1\mu^2$$

$$= \ln M^2 + \ln x_1 - \ln\left(x_1\mu^2 + A_1(x_1, x_2, p', p)\right),$$

将此式代入(11.95)$a$，即得第一项积分的计算结果：

$$-2i\gamma_\mu\int_0^\infty \frac{d\eta}{\eta}\left\{\exp\left[i\eta\left(-x_1\mu^2 - A_1(x_1, x_2, p', p)\right)\right]\right.$$

$$\left.-\exp\left[i\eta\left(-x_1M^2 - A_1(x_1, x_2, p', p)\right)\right]\right\} = -2i\gamma_\mu\left[\ln M^2 + \ln x_1\right.$$

$$\left.-\ln\left(x_1\mu^2 + A_1(x_1, x_2, p', p)\right)\right]. \tag{11.96}$$

再来计算后四项积分．利用附录四（7）式（把该公式倒过来用）可得：

$$\left[-2\gamma\cdot(p - x_2p' - (1-x_1-x_2)p)\gamma_\mu\gamma\cdot(p' - x_2p' - (1-x_1-x_2)p)\right.$$

$$+4im\left(p_\mu - x_2p'_\mu - (1-x_1-x_2)p_\mu\right) + 4im\left(p'_\mu - x_2p'_\mu - (1-x_1-x_2)p_\mu\right)$$

$$\left.+2m^2\gamma_\mu\right]\int_0^\infty d\eta\left\{\exp\left[-i\eta\left(x_1\mu^2 + A_1(x_1, x_2, p', p)\right) - \eta\varepsilon\right]\right.$$

$$\left.-\exp\left[-i\eta\left(x_1M^2 + A_1(x_1, x_2, p', p)\right) - \eta\varepsilon\right]\right\} = \left[2\left(x_2(\gamma\cdot p' - \gamma\cdot p)\right.\right.$$

$$\left.-x_1\gamma\cdot p\right)\gamma_\mu\left(\gamma\cdot p' - \gamma\cdot p - x_2(\gamma\cdot p' - \gamma\cdot p) + x_1\gamma\cdot p\right)$$

$$\left.+4im\left(2x_1p_\mu - 2x_2(p'_\mu - p_\mu) + (p'_\mu - p_\mu)\right) + 2m^2\gamma_\mu\right]$$

$$\times\left[\frac{1}{i\left(\left(x_1\mu^2 + A_1(x_1, x_2, p', p)\right)\right)} - \frac{1}{i\left(x_1M^2 + A_1(x_1, x_2, p', p)\right)}\right]$$

$$\tag{11.97}$$

因为$M \gg 1$，上式右边第二个方括号内的第二项可以忽略．把（11.96）、（11.97）代入（11.94）并令：

$$A(x_1, x_2, p', p) = x_1\mu^2 + A_1(x_1, x_2, p', p), \tag{11.98a}$$

$$B_\mu(x_1, x_2, p', p) = \left(x_2(\gamma\cdot p' - \gamma\cdot p) - x_1\gamma\cdot p\right)\gamma_\mu\left((1-x_2)(\gamma\cdot p' - \gamma\cdot p)\right.$$

$$+x_1\gamma\cdot p)+2im\left((1-2x_2)\ (p'_\mu-p_\mu)+2x_1p_\mu\right)+m^2\gamma_\mu, \tag{11.98)b}$$

即得$\Lambda_\mu^{reg}(p',p)$的如下表示式：

$$\Lambda_\mu^{reg}(p',\ p)=\frac{ie^2}{16\pi^2}\int_0^1 dx_1\int_0^{1-x_1}dx_2\Big\{(-2i\gamma_\mu)\Big[\ln M^2+\ln x_1$$

$$-\ln A(x_1,\ x_2,\ p',\ p)\Big]+\frac{2B_\mu(x_1,x_2,p',p)}{iA(x_1,x_2,p',p)}\Big\}. \tag{11.99}$$

现在把 $\Lambda_\mu^{reg}(p',p)$ 里的发散部分与有限部分分开。为此，首先要选择适当之减除点。类似前面两小节的讨论〔见（11.64）式后面的叙述和（11.85）式〕，我们要求$\Lambda_\mu^{reg}(p',p)$ 的有限部分在减除点之值为零。据此，可令发散部分是：

$$L_\mu=\Lambda_\mu^{reg}(p'p)\Big|_{减除点} \tag{11.100}$$

把有限部分记为$\Lambda_\mu^c(p',p)$，则（11.99）式应具有如下的形式：

$$\Lambda_\mu^{reg}(p',\ p)=L_\mu+\Lambda_\mu^c(p',p). \tag{11.101}$$

在$\Sigma^{reg}(p)$和$\Pi_{\mu\nu}^{reg}$ $(k)$ 的情况下， 我们都选择粒子动量的质壳作为减除点，这分别相应于图 9—10和 9—11所示的情况。因此，我们这里仍选定粒子动量的质壳作为减除点，即

$$\gamma\cdot p'=im,\ \ \gamma\cdot p=im,$$

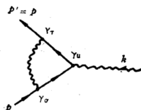



图11——8

此外，假定$p'=p$。这样， 与图11—8对应的$S$矩阵元为：

$$(f|S_3|i)\sim\bar{u}_{ps}\ [-e\Lambda_\mu^{reg}(p,\ p)]\ u_{ps}e_{k\lambda}^\mu\ \delta^{(4)}(p'-p-k). \tag{11.102}$$

我们指出，由于$p'=p$，所以按照能量、动量守恒的要求，必有$k=0$，而这一等式又包含$k^2=0$。因此，三阶顶角的三条外线都在质壳上，我们的减除点事实上是：

$$\gamma\cdot p'=\gamma\cdot p=im,(包含p'=p) \tag{11.103)a}$$

$$k^2=0,(且k也为零) \tag{11.103)b}$$

正如一阶电磁过程（即一阶光子顶角描写的过程）不能实现一样，图11—8 所描写的三阶电磁过程也不存在，因而(11.103)式的减除点是一个非物理的减除点。

现在，把(11.103)代入(11.100)，计算发散部分$L_\mu$:

$$L_\mu = \Lambda_\mu^{reg}(p', p)\Big|_{\substack{\gamma\cdot p'=\gamma\cdot p=im\\ p'=p}}$$

$$\overset{(11.99),(11.98),(11.95)b}{=} \frac{ie^2}{16\pi^2}\int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2\Big\{(-2i\gamma_\mu)\Big[\ln M^2+\ln x_1-\ln\big(x_1\mu^2+m^2(1-x_1)^2\big)\Big]$$

$$+(-2i\gamma_\mu)\frac{m^2(x_1^2-4x_1+1)}{x_1\mu^2+m^2(1-x_1)^2}\Big\} = \frac{ie^2}{16\pi^2}\int_0^1 dx_1\int_0^{1-x_1} dx_2\Big\{(-2i\gamma_\mu)\Big[\ln\frac{M^2}{m^2}$$

$$+\ln x_1+\ln\frac{m^2}{x_1\mu^2+m^2(1-x_1)^2}\Big]+(-2i\gamma_\mu)m^2\frac{x_1^2-4x_1+1}{x_1\mu^2+m^2(1-x_1)^2}\Big\} \tag{11.104}$$

在上式的推算里曾使用了如下公式[注1]:

$$\bar{u}_{ps}p_\mu u_{ps} = im\bar{u}_{ps}\gamma_\mu u_{ps} \tag{11.105}$$

即在电子动量的质壳处($\gamma\cdot p'=\gamma\cdot p=im$)，可把$p_\mu$换成$im\gamma_\mu$。

把(11.104)代入(11.101)，即可求得$\Lambda_\mu^c(p', p)$:

$$\Lambda_\mu^c(p', p)=\Lambda_\mu^{reg}(p', p)-L_\mu=\frac{ie^2}{16\pi^2}\int_0^1 dx_1\int_0^{1-x_1}dx_2\Big\{(-2i\gamma_\mu)\Big[\ln\frac{M^2}{m^2}$$

$$+\ln x_1+\ln\frac{m^2}{A(x_1,x_2,p',p)}\Big]+(-2i)\frac{B_\mu(x_1,x_2,p',p)}{A(x_1,x_2,p',p)}\Big\}-$$

---

[注1] 对(11.105)式证明如下：由(1.143)$a$式可得

$$\bar{u}_{ps'}\gamma_\mu p_\mu u_{ps} \overset{(1.180)a}{=} im\delta_{s's}, \quad 即\ \bar{u}_{ps}\gamma_\mu p_\mu u_{ps}=im,$$

在上式里$\gamma_\mu$和$p_\mu$之间插入(1.202)式:

$$\bar{u}_{ps}\gamma_\mu\sum_{s'=1}^{2}(u_{ps'}\bar{u}_{ps'}-v_{ps'}\bar{v}_{ps'})p_\mu u_{ps}=im.$$

考虑到(1.181)$b$，上式简化为:

$$\sum_{s'=1}^{2}\bar{u}_{ps}\gamma_\mu u_{ps'}\bar{u}_{ps'}p_\mu u_{ps}=im,$$

此式左边仅当$s'=s$时非零，故有

$$\bar{u}_{ps}\gamma_\mu u_{ps}\bar{u}_{ps}p_\mu u_{ps}=im.$$

考虑到$p_\mu$具有质量量纲，所以上式成立的条件即是(11.105)式。

$$-\frac{ie^2}{16\pi^2}\int_0^1 dx_1\int_0^{1-x_1}dx_2\Big\{(-2i\gamma_\mu)\Big(\ln\frac{M^2}{m^2}+\ln x_1+\ln\frac{m^2}{x_1\mu^2+m^2(1-x_1)^2}\Big)$$

$$+(-2i\gamma_\mu)\frac{x_1^2-4x_1+1}{x_1\frac{\mu^2}{m^2}+(1-x_1)^2}\Big\},$$

即

$$\Lambda_\mu^0(p',p)=\frac{e^2}{8\pi^2}\int_0^1 dx_1\int_0^{1-x_1}dx_2\Big\{\gamma_\mu\ln\frac{x_1\mu^2+m^2(1-x_1)^2}{A(x_1,x_2,p',p)}$$

$$+\frac{B_\mu(x_1,x_2,p',p)}{A(x_1,x_2,p',p)}-\gamma_\mu\frac{x_1^2-4x_1+1}{x_1\frac{\mu^2}{m^2}+(1-x_1)^2}\Big\}. \tag{11.106}$$

注意到(11.95)$b$和(11.98)式，我们显然有：

$$\Lambda_\mu^0(p',p)\Big|_{\substack{\gamma\cdot p'=\gamma\cdot p=im\\ p'=p}}=0. \tag{11.107}$$

至此，我们已把$\Lambda_\mu^{reg}(p',p)$分离为发散部分$L_\mu$和有限部分$\Lambda_\mu^0(p',p)$，结果就是(11.101)、(11.104)和(11.106)。

由(11.104)看出：

$$L_\mu=L\gamma_\mu, \tag{11.108}$$

其中，

$$L=\frac{e^2}{8\pi^2}\int_0^1 dx_1\int_0^{1-x_1}dx_2\Big\{\Big(\ln\frac{M^2}{m^2}+\ln x_1+\ln\frac{m^2}{x_1\mu^2+m^2(1-x_1)^2}\Big)$$

$$+\frac{x_1^2-4x_1+1}{x_1\frac{\mu^2}{m^2}+(1-x_1)^2}\Big\}, \tag{11.109}$$

利用附录四(29)—(32)式完成上式中对$x_2$、$x_1$的积分，并注意：

(1) $\ln\frac{m^2}{x_1\mu^2+m^2(1-x_1)^2}\approx-\ln(1-x_1)^2$,，（不引起红外发散）；

(2) $\int_0^1 dx_1\int_0^{1-x_1}dx_2\ln(1-x_1)^2=\int_0^1 dx_1(1-x_1)\ln(1-x_1)^2$

$$= \frac{-1}{2}\int_0^1 d(x_1-1)^2\ln(x_1-1)^2 = \frac{-1}{2}\int_1^0 dy\ln y = \frac{1}{2}\int_0^1 dy\ln y$$

$$\overset{(29)式}{\searrow} = -\frac{1}{2}, \quad \left(\int_0^1 dx_1(1-x_1)\ln(1-x_1)^2 = 2\int_0^1 dx_1(1-x_1)\ln(1-x_1),\right.$$

此种做法是奇异的)；

（3） $\dfrac{x_1^2-4x_1+1}{x_1\dfrac{\mu^2}{m^2}+(1-x_1)^2}$，分母上的$\mu^2$不可令为零，否则引起红外发散，

这样，即可得到：

$$L = \frac{e^2}{16\pi^2}\left(\ln\frac{M^2}{m^2}+2\ln\frac{\mu^2}{m^2}+\frac{9}{2}\right) \tag{11.110}$$

## §4 维数正规化

P—V正规化方法在QED里获得了成功的应用，但在非Abel 规范理论里包含着无质量Fermi场（ghost field，鬼场），P—V正规化便不再适用[注1]。在非Abel规范理论里使用的正规化方法之一是维数正规化．这种方法便于处理具体的发散积分，并且不破坏理论的规范对称性．维数正规化方法对QED也同样适用．我们在此作一初步介绍，希望对读者深入学习有益．

维数正规化的基本思想是：

（1）为了处理4维闵氏空间M的发散积分$F(p)=\int d^4kf(k,p)$，首先考虑一个在较小维数的$n$维空间$M_n$的积分。这里$n=4-2\epsilon$，$\epsilon>0$是一个小正数，不一定是整数，因而$n$是一个小于4的正数（不一定是整数）．$M_n$空间的前（$n-1$）维是空间，第$n$维是时间[注2]，因而为了保证空间具有正数维，就要求$n\geqslant 1$；

（2）把在较小维数的空间$M_n$定义的Feynman积分记为$F^{(n)}(p)=\int d^nkf(k,p)$，它是维数$n$的函数。而且总可以找到一个足够小的维数值$N<4$，使得在$n\leqslant N$的区域（维数空间的一个区域）里，所论小$n$区域的Feynman积分$F^{(n)}(p)$收敛；

（3）这个在$n\leqslant N$区域的收敛积分$F^{(n)}(p)$可以解析延拓到$n$为任意正数值的区

〔注1〕 参见《基本粒子译文集》，第四集，p180，科技文献出版社重庆分社，1981年；刘连寿译，《规范场的量子理论导引》，p129，华中工学院出版社，1982。

〔注2〕 在B—D度规里结论正相反：第零维是时间，以后的（$n-1$）维是空间。

域（包括$n>4$的区域）里去。因而我们就具有一个在维数空间任意大区域里收敛的$n$维Feynman积分；

（4）这个在维数空间任意大区域里收敛的$n$维Feynman积分是维数$n$的亚纯函数，在$n$取某些正整数值（包括$n=4$）处是这个积分的极点。当$n\to 4$时，这个$n$维Feynman积分就回到原来4维空间的发散积分，而这时，原来积分的紫外发散性就表现为$n$维收敛积分在$n=4$处的极点型奇异性。我们把这个在任意$n$值下收敛的Feynman积分记为$F^{\epsilon}(p)=\int d^n k f(k,p)$，它就是原来发散积分的正规化积分。因此，维数正规化的基本思想归结到一点就是：把4维闵氏空间M的发散积分$F(p)$定义为$n$维闵氏空间$M_n$的收敛积分$F^{\epsilon}(p)$当$n\to 4$时的极限：

$$\left(F(p)=\int d^4 k f(k,p)\right)=\lim_{n\to 4}\left(F^{\epsilon}(p)=\int d^n k f(k,p)\right), \tag{11.111}$$

此式左边的$k$是4维矢量，而右边的$k$是$n$维矢量。

怎样把$n\leqslant N$区域的收敛积分$F^{(n)}(p)$解析延拓到$n$取任意值的区域里去呢？换言之，怎样从$F^{(n)}(p)$开始，借助于解析延拓而得到正规化积分$F^{\epsilon}(p)$？一个极好的办法就是对$F^{(n)}(p)$施行"偏$p$手续"（Partial p）〔注1〕。下面通过实例来说明。设与某个单圈图对应的Feynman积分是：

$$F(p)=\mathrm{N}(4)\int d^4 k\frac{k_{\mu_1}^{\lambda_1}k_{\mu_2}^{\lambda_2}\cdots\cdots k_{\mu_j}^{\lambda_j}}{\prod_{l=1}^{L}(q_l^2+m_l^2-i\varepsilon)} \tag{11.112}$$

其中N(4)是一个常系数，$L$是单圈图的内线总数；$q_l$是传播子动量，它是积分变量$k$与外线动量$p$的线性组合；$\mu_1$、$\mu_2$、$\cdots\mu_j$是动量$k$的矢量指标，它们都取1，2，3，4之值、$\lambda_1,\lambda_2\cdots\cdots\lambda_j$是动量分量$k_{\mu_1},k_{\mu_2},\cdots\cdots k_{\mu_j}$的幂次，$\lambda_j\geqslant 0$。利用附录四的公式〔例如（6）式以后某一式〕合并上式分母的$L$个因子得：

$$F(p)=\mathrm{N}(4)\int_0^1 dx\int_0^1 2y\,dy\cdots\cdots\int d^4 k\frac{k_{\mu_1}^{\lambda_1}k_{\mu_2}^{\lambda_2}\cdots\cdots k_{\mu_j}^{\lambda_j}}{[k^2-2k\cdot Q+\Delta]^L}, \tag{11.113}$$

这里，

$$Q=\varphi_1(p,x,y,z,\cdots\cdots)$$

$$\Delta=\varphi_2(p,m_l,x,y,z,\cdots\cdots)$$

为了便于讨论，把上式对Feynman参数的积分省去不写：

〔注1〕偏$p$手续主要取自杨炳麟，《量子场论导引》，pp295—297，科学出版社，1988年。

$$F(p)=\mathrm{N}(4)\int d^4k\frac{k_{\mu_1}^{\lambda_1}\,k_{\mu_2}^{\lambda_2}\cdots\cdots k_{\mu_j}^{\lambda_j}}{[k^2-2k\cdot Q+\Delta]^L}. \tag{11.114}$$

如本章开始所述，单圈图对应的Feynman积分是紫外发散的，即$F(p)$的表观发散度大于或等于零：

$$D=4+\lambda_1+\lambda_2+\cdots\cdots+\lambda_j-2L\geqslant 0. \tag{11.115}$$

现在考虑$n$维空间的Feynman积分：

$$F^{(n)}(p)=\mathrm{N}(n)\int d^nk\frac{k_{\mu_1}^{\lambda_1}\,k_{\mu_2}^{\lambda_2}\cdots\cdots k_{\mu_j}^{\lambda_j}}{[k^2-2k\cdot Q+\Delta]^L}, \tag{11.116}$$

式中，$n=4-2\in$，即$n<4$，动量$k$是$n$维矢量：

$$k^2=k_\mu k_\mu=\sum_{i=1}^{n-1}k_ik_i+k_nk_n\overset{k_n=ik_0}{=}\sum_{i=1}^{n-1}k_ik_i-k_0k_0, \tag{11.117}$$

$\gamma$矩阵也相应地推广为$n$维矩阵[注1]。选择足够小的$n(n\leqslant \mathrm{N})$，使$F^{(n)}(p)$的表观发散度小于零：

$$D=n+\lambda_1+\lambda_2+\cdots\cdots+\lambda_j-2L<0, \tag{11.118}$$

这时，$F^{(n)}(p)$是一个在$n\leqslant N$区域的收敛积分。我们的解析延拓办法是对$F^{(n)}(p)$反复施行偏$p$手续，使$F^{(n)}(p)$在维数空间的收敛区域逐渐扩大。为此，引入解析延拓算符$A^0$，它的定义是：

$$A^0F^{(n)}(p)=\mathrm{N}(n)\int d^nk\left(\frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n}\frac{\partial}{\partial k_\mu}k_\mu\right)\frac{k_{\mu_1}^{\lambda_1}\,k_{\mu_2}^{\lambda_2}\cdots\cdots k_{\mu_j}^{\lambda_j}}{[k^2-2k\cdot Q+\Delta]^L}, \tag{11.119}$$

这里，

$$\frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n}\frac{\partial}{\partial k_\mu}k_\mu=1. \tag{11.120}$$

因此，按照(11.119)式，$A^0$作用于$n$维Feynman积分，只是在其积分号下插入因子1，并不改变积分结果。由于$F^{(n)}(p)$是收敛积分，故可把(11.119)式之求和号提到积分号外：

$$A^0F^{(n)}(p)=\frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n}\mathrm{N}(n)\int d^nk\left(\frac{\partial}{\partial k_\mu}k_\mu\right)\frac{k_{\mu_1}^{\lambda_1}\,k_{\mu_2}^{\lambda_2}\cdots\cdots k_{\mu_j}^{\lambda_j}}{[k^2-2k\cdot Q+\Delta]^L} \tag{11.121}$$

---

[注1] 关于$\gamma_\mu$矩阵推广到$n$维后，它们的代数关系详见附录四(15)—(26)式；但$\gamma_5$矩阵无法推广到$n$维，见刘连寿译《规范场的量子理论导引》，p140。

现将上式对$k_\mu$进行部分积分：

$$A^0 F^{(n)}(p)=\frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n}\mathrm{N}(n)\int d^{n-1}k\int dk_\mu\left(\frac{\partial}{\partial k_\mu}k_\mu\right)\frac{k_{\mu_1}^{\lambda_1}k_{\mu_2}^{\lambda_2}\cdots\cdots k_{\mu_j}^{\lambda_j}}{[k^2-2k\cdot Q+\Delta]^L}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n}\mathrm{N}(n)\int d^{n-1}k\left\{\left(\frac{k_\mu k_{\mu_1}^{\lambda_1}k_{\mu_2}^{\lambda_2}\cdots\cdots k_{\mu_j}^{\lambda_j}}{[k^2-2k\cdot Q+\Delta]^L}\right)_{k_\mu=-\infty}^{k_\mu=+\infty}\right.$$

$$\left.-\int dk_\mu k_\mu\frac{\partial}{\partial k_\mu}\frac{k_{\mu_1}^{\lambda_1}k_{\mu_2}^{\lambda_2}\cdots\cdots k_{\mu_j}^{\lambda_j}}{[k^2-2k\cdot Q+\Delta]^L}\right\},\tag{11.122}$$

因为$1+\lambda_1+\lambda_2+\cdots\cdots+\lambda_j\leqslant n+\lambda_1+\lambda_2+\cdots\cdots+\lambda_j<2L$，所以必定有：

$$1+\lambda_k<2L,\ \text{当}1\leqslant k\leqslant j;$$

或

$$1<2L,\ \text{当}k\text{不取从}1\text{—}j\text{的任何值。}$$

换言之，在(11.122)式右边积分号下的第一项里，$k_\mu$的幂指数为负数，因此，

$$\left(\frac{k_\mu k_{\mu_1}^{\lambda_1}k_{\mu_2}^{\lambda_2}\cdots\cdots k_{\mu_j}^{\lambda_j}}{[k^2-2k\cdot Q+\Delta]^L}\right)_{k_\mu=-\infty}^{k_\mu=+\infty}=0,$$

这样，(11.122)式简化为下式：

$$A^0 F^{(n)}(p)=-\frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n}\mathrm{N}(n)\int d^n k\ k_\mu\frac{\partial}{\partial k_\mu}\left(\frac{k_{\mu_1}^{\lambda_1}k_{\mu_2}^{\lambda_2}\cdots\cdots k_{\mu_j}^{\lambda_j}}{[k^2-2k\cdot Q+\Delta]^L}\right)$$

$$=-\frac{1}{n}\mathrm{N}(n)\int d^n k\left(k_1\frac{\partial}{\partial k_1}+k_2\frac{\partial}{\partial k_2}+\cdots\cdots+k_n\frac{\partial}{\partial k_n}\right)\left(\frac{k_{\mu_1}^{\lambda_1}k_{\mu_2}^{\lambda_2}\cdots\cdots k_{\mu_j}^{\lambda_j}}{[k^2-2k\cdot Q+\Delta]^L}\right)$$

$$=-\frac{\lambda_1+\lambda_2+\cdots\cdots+\lambda_j}{n}F^{(n)}(p)+\frac{2L}{n}F^{(n)}(p)$$

$$+\frac{2L}{n}\mathrm{N}(n)\int d^n k\frac{k_{\mu_1}^{\lambda_1}k_{\mu_2}^{\lambda_2}\cdots\cdots k_{\mu_j}^{\lambda_j}}{[k^2-2k\cdot Q+\Delta]^{L+1}}(k\cdot Q-\Delta),\tag{11.123}$$

按照$A^0$的定义(11.119)，$A^0F^{(n)}(p)\equiv F^{(n)}(p)$，因而上式给出：

$$A^0F^{(n)}(p)=\frac{2L}{n+\lambda_1+\lambda_2+\cdots\cdots+\lambda_j-2L}\mathrm{N}(n)\int d^n k\frac{k_{\mu_1}^{\lambda_1}k_{\mu_2}^{\lambda_2}\cdots\cdots k_{\mu_j}^{\lambda_j}}{[k^2-2k\cdot Q+\Delta]^{L+1}}(k\cdot Q-\Delta),\tag{11.124}$$

此式右边的积分收敛的条件是：

$$D=n+\lambda_1+\lambda_2+\cdots\cdots+\lambda_j+1-2(L+1)<0$$

即
$$n<2L-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots\cdots+\lambda_j)+1, \tag{11.125a}$$

而从(11.118)式可知，在进行偏$p$手续以前的$F^{(n)}(p)$收敛的条件是：

$$n<2L-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots\cdots+\lambda_j), \tag{11.125b}$$

因此，经过一次偏$p$手续以后的积分$A^oF^{(n)}(p)$，在维数空间的收敛区域比原来(11.116)式定义的积分$F^{(n)}(p)$扩大了"＋1"。对(11.124)式的$A^oF^{(n)}(p)$再施行偏$p$手续：

$$A^oA^oF^{(n)}(p)=\frac{2L}{n+\lambda_1+\lambda_2+\cdots\cdots+\lambda_j-2L}$$

$$\times \mathrm{N}(n)\int d^nk\left(\frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n}\frac{\partial}{\partial k_\mu}k_\mu\right)\frac{k_{\mu_1}^{\lambda_1}k_{\mu_2}^{\lambda_2}\cdots\cdots k_{\mu_j}^{\lambda_j}}{[k^2-2k\cdot Q+\Delta]^{L+1}}(k\cdot Q-\Delta)$$

类似从(11.121)—(11.123)的做法

$$=\frac{2(L+1)-\lambda_1-\lambda_2-\cdots\cdots-\lambda_j-1}{n}F^{(n)}(p)$$

$$+\frac{2L}{n+\lambda_1+\lambda_2+\cdots\cdots+\lambda_j-2L}\frac{2(L+1)}{n}\mathrm{N}(n)\int d^nk\ \frac{k_{\mu_1}^{\lambda_1}k_{\mu_2}^{\lambda_2}\cdots\cdots k_{\mu_j}^{\lambda_j}}{[k^2-2k\cdot Q+\Delta]^{L+2}}(k\cdot Q-\Delta)^2$$

$$-\frac{2L}{n+\lambda_1+\lambda_2+\cdots\cdots+\lambda_j-2L}\frac{1}{n}\mathrm{N}(n)\int d^nk\ \frac{k_{\mu_1}^{\lambda_1}k_{\mu_2}^{\lambda_2}\cdots\cdots k_{\mu_j}^{\lambda_j}}{[k^2-2k\cdot Q+\Delta]^{L+1}}\Delta, \tag{11.126}$$

因为$A^oA^oF^{(n)}(p)\equiv F^{(n)}(p)$，故上式给出：

$$A^oA^oF^{(n)}(p)=\frac{1}{[n+\lambda_1+\lambda_2+\cdots\cdots+\lambda_j-2L][n+\lambda_1+\lambda_2+\cdots\cdots+\lambda_j-2L-1]}$$

$$\times\left\{2L(2L+2)\mathrm{N}(n)\int d^nk\frac{k_{\mu_1}^{\lambda_1}k_{\mu_2}^{\lambda_2}\cdots\cdots k_{\mu_j}^{\lambda_j}}{[k^2-2k\cdot Q+\Delta]^{L+2}}(k\cdot Q-\Delta)^2\right.$$

$$\left.-2L\mathrm{N}(n)\int d^nk\frac{k_{\mu_1}^{\lambda_1}k_{\mu_2}^{\lambda_2}\cdots\cdots k_{\mu_j}^{\lambda_j}}{[k^2-2k\cdot Q+\Delta]^{L+1}}\Delta\right\}. \tag{11.127}$$

根据表观发散度$D<0$的要求，不难得出上式右边的两项积分收敛的条件均为：

$$n<2L-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots\cdots+\lambda_j)+2 \tag{11.128}$$

此式与（11.125)$a$式比较可知：经过两次偏$p$手续以后的$A^oA^oF^{(n)}(p)$在维数空间的收剑区域，又比只经过一次偏$p$手续的$A^oF^{(n)}(p)$扩大了"＋1。对（11.116）式的$F^{(n)}(p)$连续施行$(\beta+1)$次偏$p$手续就得到：

$$\overbrace{A^\circ A^\circ\cdots\cdots A^\circ}^{\beta+1} F^{(n)}(p)$$

$$=\frac{1}{[n+\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_j-2L][n+\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_j-2L-1]\cdots[n+\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_j-2L-\beta]}$$

$$\times\sum_{i=1}^{\beta+1}\mathrm{N}_i(L)\mathrm{N}(n)\mathrm{I}_i(p). \tag{11.129}$$

式中，$\beta$是任意正整数，$\mathrm{N}_i(L)$是一些常系数，$\mathrm{I}_i(p)$是一些收敛积分，这些积分在维数空间的收敛区域是：

$$n<2L-\lambda_1-\lambda_2\cdots\cdots-\lambda_j+\beta+1 \tag{11.130}$$

当$\beta\to\infty$时，Feynman积分$\overbrace{A^\circ A^\circ\cdots\cdots A^\circ}^{\beta+1} F^{(n)}(p)|_{\beta\to\infty}$的收敛区域就扩大到整个维数空间。

此外，观察(11.129)式右边的($\beta+1$)个分母因子，并注意(11.115)式可知，对于任意给定的$n$，总可以在这些因子中找到一个因子：

$$n+\lambda_1+\lambda_2+\cdots\cdots+\lambda_j-2L-\beta',\quad 0\leqslant\beta'<\beta$$

它满足：

$$\lim_{n\to4}(n+\lambda_1+\lambda_2+\cdots\cdots+\lambda_j-2L-\beta')=0, \tag{11.131}$$

综合(11.129)—(11.131)诸式，我们已将(11.116)式的$F^{(n)}(p)$经过偏$p$手续解析延拓到整个维数空间，使之成为$\overbrace{A^\circ A^\circ\cdots\cdots A^\circ}^{\beta+1} F^{(n)}(p)|_{\beta\to\infty}$，它是一个对任意维数值$n$均收敛的积分，但在$n=4$和$n$取某些正整数值处存在极点型奇异性〔$n=4$以外的极点同样可从(11.129)式的一系列分母因子看出来〕.因此，$\overbrace{A^\circ A^\circ\cdots\cdots A^\circ}^{\beta+1} F^{(n)}(p)|_{\beta\to\infty}$就是4维空间发散积分$F(p)$的正规化积分，我们把它记为$F^\epsilon(p)$。如前所述：

$$A^\circ F^{(n)}(p)=F^{(n)}(p),$$

因此，

$$F^\epsilon(p)=\overbrace{A^\circ A^\circ\cdots\cdots A^\circ}^{\beta+1} F^{(n)}(p)\Big|_{\beta\to\infty}=F^{(n)}(p), \tag{11.132}$$

此式右边的$F^{(n)}(p)$在形式上与(11.116)式的$F^{(n)}(p)$一致，但它们的收敛区域并不相同. (11.116)式的$F^{(n)}(p)$只在$n\leqslant N$的区域收敛；而(11.132)右边的$F^{(n)}(p)$则在整个维数空间收敛。因此，在进行实际计算时，我们就取下式作为$F(p)$的正规化积分：

$$F^\epsilon(p)=\mathrm{N}(n)\int d^nk\,\frac{k_{\mu_1}^{\lambda_1}k_{\mu_2}^{\lambda_2}\cdots\cdots k_{\mu_j}^{\lambda_j}}{[k^2-2k\cdot Q+\Delta]^L} \tag{11.133}$$

其中的$n$可以是任意的正数。〔注1〕

〔注1〕 $n$也可以是复数，详见刘连寿译，《规范场的量子理论导引》和《基本粒子译文集》，第二集或第四集。

## §5 在维数正规化里发散的分离

在本节里，我们将详细介绍怎样用维数正规化处理$\Sigma(p)$和$\Lambda_\mu(p'p)$，而把$\Pi_{\mu\nu}(k)$留给读者去做。

### （一）二阶电子自能部分

为了截断红外发散，在(9.84)式右边的光子传播子里引入质量参数$\mu$（在重整化后令$\mu\to 0$），由此得下式：

$$\Sigma(p)=\frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4k\ \gamma_\mu\frac{-1}{\gamma\cdot(p-k)-im}\gamma_\mu\frac{-i}{k^2+\mu^2},$$

将此式分母有理化：

$$\Sigma(p)=\frac{-i}{(2\pi)^4}\int d^4k\frac{\gamma_\mu[\gamma\cdot(p-k)+im]\gamma_\mu}{(p-k)^2+m^2}\frac{1}{k^2+\mu^2},\tag{11.134}$$

按照(11.133)式，$\Sigma(p)$的正规化积分是：

$$\Sigma^\epsilon(p)=\frac{-i}{(2\pi)^n}\int d^nk\frac{\gamma_\mu[\gamma\cdot(p-k)+im]\gamma_\mu}{[(p-k)^2+m^2]}\frac{1}{k^2+\mu^2},\tag{11.135}$$

对于任意的正数值$n$，$\Sigma^\epsilon(p)$均是收敛积分(除极点外)，因此，原则上可对任意的维数$n$来计算$\Sigma^\epsilon(p)$，但为了便于计算，我们对小于4的某个整数$n$（这时，$n=4-2\epsilon$）来计算$\Sigma^\epsilon(p)$（今后也都如此）．由附录四公式（16）和（17）$b$易得：

$$\gamma_\mu[\gamma\cdot(p-k)+im]\gamma_\mu=2(\epsilon-1)\gamma\cdot(p-k)+nim,$$

将此式代入(11.135)，并注意$n=4-2\epsilon$：

$$\Sigma^\epsilon(p)=\frac{-2i\epsilon}{(2\pi)^n}\int d^nk\frac{\gamma\cdot(p-k)-im}{[(p-k)^2+m^2](k^2+\mu^2)}$$

$$+\frac{2i}{(2\pi)^n}\int d^nk\frac{\gamma\cdot(p-k)-2im}{[p-k)^2+m^2](k^2+\mu^2)},\tag{11.136}$$

类似§3的做法，使用附录四公式(7)把分母倒数表示为对参数$\alpha_1$、$\alpha_2$的积分（这时，$m^2$和$\mu^2$里的小虚部$-i\varepsilon$均要明显地写出来)，并引入$n$维辅助矢量$Y$，把分子表示为如下的导数：

$$\gamma\cdot(p-k)-2im=\left(-i\gamma\cdot\frac{\partial}{\partial Y}-2im\right)\exp\left(iY\cdot(p-k)\right)\Big|_{Y=0},$$

这样，(11.136)式成为：

$$\Sigma^\epsilon(p)=\frac{-2\epsilon ii^2}{(2\pi)^n}\int_0^\infty\int_0^\infty d\alpha_1d\alpha_2\exp\left[-i\left(\alpha_1(p^2+m^2)+\alpha_2\mu^2\right)\right]$$

$$\times\left[-i\gamma\cdot\frac{\partial}{\partial Y}-im\right]\exp\left[iY\cdot p\right]\int d^n k\exp\left[i\left(-(\alpha_1+\alpha_2)k^2\right.\right.$$

$$\left.\left.+2[\alpha_1 p-Y/2]\cdot k\right)\right]\Big|_{Y=0}$$

$$+\frac{2ii^2}{(2\pi)^n}\int_0^\infty\int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2\exp\left[-i\left(\alpha_1(p^2+m^2)+\alpha_2\mu^2\right)\right]$$

$$\times\left[-i\gamma\cdot\frac{\partial}{\partial Y}-2im\right]\exp\left[iY\cdot p\right]\int d^n k\exp\left[i\left(-(\alpha_1+\alpha_2)k^2+2[\alpha_1 p\right.\right.$$

$$\left.\left.-Y/2]\cdot k\right)\right]\Big|_{Y=0}.$$

利用附录四公式（35）完成上式中对 $k$ 的积分：

$$\Sigma^\epsilon(p)=\frac{2i\in}{(2\pi)^n}\left(\frac{i}{\pi}\right)^\epsilon\frac{\pi^2}{i}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^{2-\epsilon}}$$

$$\times\exp\left[-i\left(\alpha_1(p^2+m^2)+\alpha_2\mu^2\right)\right]$$

$$\times\left[-i\gamma\cdot\frac{\partial}{\partial Y}-im\right]\exp\left[i\left(Y\cdot p+\frac{[\alpha_1 p-Y/2]^2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)\right]\Big|_{Y=0}$$

$$+\frac{-2i}{(2\pi)^n}\left(\frac{i}{\pi}\right)^\epsilon\frac{\pi^2}{i}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^{2-\epsilon}}\exp\left[-i\left(\alpha_1(p^2+m^2)+\alpha_2\mu^2\right)\right]$$

$$\times\left[-i\gamma\cdot\frac{\partial}{\partial Y}-2im\right]\exp\left[i\left(Y\cdot p+\frac{[\alpha_1 p-Y/2]^2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)\right]\Big|_{Y=0},\qquad(11.137)$$

求出上式中对 $Y$ 的导数，然后作变数替换：

$$\alpha_1=x\eta,$$

$$\alpha_2=(1-x)\eta,$$

则（11.137）式成为：

$$\Sigma^\epsilon(p)=\frac{2\in\pi^2}{(2\pi)^n}\left(\frac{i}{\pi}\right)^\epsilon\int_0^1 dx\left\{\left[(1-x)\gamma\cdot p-im\right]\right.$$

$$\left.\times\int_0^\infty\eta^{\epsilon-1}\exp\left[-i\eta\left(x(p^2+m^2)+(1-x)\mu^2-x^2p^2\right)\right]d\eta\right\}$$

$$+\frac{-2\pi^2}{(2\pi)^n}\left(\frac{i}{\pi}\right)^{\epsilon}\int_0^1 dx\left\{\left[(1-x)\gamma\cdot p-2im\right]\int_0^{\infty}\eta^{\epsilon-1}\right.$$

$$\left.\times\exp\left[-i\eta\left(x(p^2+m^2)+(1-x)\mu^2-x^2p^2\right)\right]d\eta\right\}, \tag{11.138}$$

为了完成上式右边对η的积分，我们令

$$x(p^2+m^2)+(1-x)\mu^2-x^2p^2=D(x,p), \tag{11.139a}$$

并令

$$i\eta D(x,p)=\rho, \tag{11.139b}$$

因此，

$$\eta=\frac{\rho}{iD(x,p)},\quad d\eta=\frac{d\rho}{iD(x,p)}, \tag{11.139c}$$

为了确定ρ的积分限，必须把$m^2$里的虚部$-i\varepsilon$显示地写出来。这样，就要用$D(x,p)-i\varepsilon$去代替（11.139）c式中的$D(x,p)$：

$$\eta=\frac{\rho}{i[D(x,p)-i\varepsilon]}=\frac{\rho}{D(x,p)}\frac{1}{i}\frac{1}{[1-i\varepsilon/D(x,p)]}$$

$$=-i(1+i\varepsilon')\frac{\rho}{D(x,p)}, \tag{11.140a}$$

因为$-i=\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}$；$1+i\varepsilon'=\cos\delta\theta+i\sin\delta\theta$，$(\delta\theta\to0^+)$，故有

$$-i(1+i\varepsilon')=e^{-i(\frac{\pi}{2}-\delta\theta)}\Big|_{\delta\theta\to0^+}=e^{-i\theta} \tag{11.140b}$$

其中，$|\theta|<\frac{\pi}{2}$。把（11.140）b代入（11.140）a可得：

$$\eta=e^{-i\theta}\frac{\rho}{D(x,p)}, \tag{11.140c}$$

即当$\eta=0$，$\rho=\eta D(x,p)e^{i\theta}=0$；而当$\eta\to\infty$，$\rho=\infty e^{i\theta}$。这样，根据附录四（41）式，可把（11.138）右边对η的积分写为：

$$\int_0^{\infty}\eta^{\epsilon-1}e^{-i\eta D(x,p)}d\eta=\int_0^{\infty e^{i\theta}}\frac{\rho^{\epsilon-1}}{[iD(x,p)]^{\epsilon-1}}e^{-\rho}\frac{d\rho}{iD(x,p)}$$

$$=\frac{1}{[iD(x,p)]^{\epsilon}}\int_0^{\infty e^{i\theta}}\rho^{\epsilon-1}e^{-\rho}d\rho=\frac{\Gamma(\epsilon)}{[iD(x,p)]^{\epsilon}}, \tag{11.141}$$

将此式代入（11.138）就得到：

$$\Sigma^{\epsilon}(p)=\frac{2\epsilon\pi^{2}}{(2\pi)^{n}}\left(\frac{i}{\pi}\right)^{\epsilon}\frac{1}{i^{\epsilon}}\Gamma(\epsilon)\int_{0}^{1}dx\,\frac{(1-x)\gamma\cdot p-im}{[x(p^{2}+m^{2})+(1-x)\mu^{2}-x^{2}p^{2}]^{\epsilon}}$$

$$-\frac{2\pi^{2}}{(2\pi)^{n}}\left(\frac{i}{\pi}\right)^{\epsilon}\frac{1}{i^{\epsilon}}\Gamma(\epsilon)\int_{0}^{1}dx\,\frac{(1-x)\gamma\cdot p-2im}{[x(p^{2}+m^{2})+(1-x)\mu^{2}-x^{2}p^{2}]^{\epsilon}},\quad(11.142)$$

由上式显见，当$\epsilon\neq0,-1,-2\cdots\cdots$时，$\Sigma^{\epsilon}(p)$是收敛积分，$\epsilon=0$点就对应于$n=4$点，在此点$\Gamma(\epsilon)=\frac{1}{\epsilon}$导致$\Sigma^{\epsilon}(p)$有极点型奇异．因此，应当在$\epsilon\to0$点来减除发散．（11.142）式右边与$\epsilon$成比例的项可以忽略：

$$\Sigma^{\epsilon}(p)=\frac{-1}{8\pi^{2}}\frac{1}{\epsilon}\int_{0}^{1}dx\,\frac{(1-x)\gamma\cdot p-2im}{[x(p^{2}+m^{2})+(1-x)\mu^{2}-x^{2}p^{2}]^{\epsilon}},\qquad(11.143)$$

为了把$\Sigma^{\epsilon}(p)$里的发散部分和有限部分分开，我们选择粒子动量的质壳

$$\gamma\cdot p=im$$

作为分离发散的减除点（理由见§3）．令$\Sigma^{\epsilon}(p)$在减除点之值为A：

$$A=\Sigma^{\epsilon}(p)\Big|_{\substack{\epsilon\to0\\ \gamma\cdot p=im}}=-\frac{1}{8\pi^{2}}\cdot\frac{1}{\epsilon}\int_{0}^{1}dx\,\frac{-im(1+x)}{[(1-x)\mu^{2}+m^{2}x^{2}]^{\epsilon}}\Bigg|_{\epsilon\to0},\qquad(11.144)a$$

完成上式对$x$的积分（注意被积式分母趋于1）可得：

$$A=\frac{3im}{16\pi^{2}}\frac{1}{\epsilon},\qquad(11.144)b$$

应注意，我们在$\epsilon\to0$（$n\to4$）点来分离发散，但在重整化以前，发散部分要保持有限，（11.144）$b$式里的$\epsilon$不趋于零．类似（11.56）—（11.59）的讨论，我们现在有以下二式：

$$\left[\Sigma^{\epsilon}(p)-A\right]_{\epsilon\to0}=(\gamma\cdot p-im)\Sigma^{b}(p)|_{\epsilon\to0},\qquad(11.145)$$

$$\left[\Sigma^{b}(p)-B\right]_{\epsilon\to0}=(\gamma\cdot p-im)\Sigma^{f}(p)|_{\epsilon\to0},\qquad(11.146)$$

因此，在$\epsilon\to0$点有：

$$\Sigma^{\epsilon}(p)=A+(\gamma\cdot p-im)B+(\gamma\cdot p-im)^{2}\Sigma^{f}(p),\qquad(11.147)$$

由（11.146）式可得：

$$B=\Sigma^{b}(p)\Big|_{\substack{\epsilon\to0\\ \gamma\cdot p=im}},$$

将此式代入（11.145）：

$$\mathrm{B}=\frac{d}{d(\gamma\cdot p)}\Sigma^{\epsilon}(p)\Big|_{\substack{\epsilon\to 0\\ \gamma\cdot p=im}}$$

$$=\frac{-1}{8\pi^2}\int_0^1 dx\left\{\frac{1-x}{\epsilon[(1-x)\mu^2+x^2m^2]^{\epsilon}}+\frac{-2m^2(x-x^3)}{[(1-x)\mu^2+x^2m^2]^{\epsilon+1}}\right\}\Big|_{\epsilon\to 0}$$

(11.148)$a$

利用附录四（31）式和（32）式完成上式对$x$的积分：

$$\mathrm{B}=\frac{-1}{16\pi^2}\left(\frac{1}{\epsilon}+2\ln\frac{\mu^2}{m^2}+2\right). \tag{11.148$b$}$$

如同在（11.144)$b$式里一样，上式右边的$\epsilon$在重整化完成以前不趋于零．按照(11.147)式，在$\epsilon\to 0$点把发散部分$\mathrm{A}+(\gamma\cdot p-im)\mathrm{B}$从$\Sigma^{\epsilon}(p)$里减除掉，剩下的就是有限部分$\Sigma^{c}(p)=(\gamma\cdot p-im)^2\Sigma^{f}(p)$，因此，

$$\Sigma^{c}(p)=\Big[\Sigma^{\epsilon}(p)-\mathrm{A}-(\gamma\cdot p-im)\,\mathrm{B}\Big]_{\epsilon\to 0},$$

把（11.143)、（11.144)$a$、（11.148)$a$代入此式，并令

$$\sigma\equiv\sigma(x)=(1-x)\mu^2+m^2x^2, \tag{11.149$a$}$$

$$\tau\equiv\tau(x,p)=x(p^2+m^2)+(1-x)\mu^2-x^2p^2, \tag{11.149$b$}$$

即得：

$$\Sigma^{c}(p)=\frac{-1}{8\pi^2}\int_0^1 dx\left\{\frac{(1-x)\gamma\cdot p-2im}{\epsilon\,\tau^{\epsilon}}+\frac{im(1+x)}{\epsilon\,\sigma^{\epsilon}}-\frac{(\gamma\cdot p-im)(1-x)}{\epsilon\,\sigma^{\epsilon}}\right.$$

$$\left.+\frac{2m^2(\gamma\cdot p-im)(x-x^3)}{\sigma^{\epsilon+1}}\right\}\Big|_{\epsilon\to 0}=$$

$$=\frac{-1}{8\pi^2}\int_0^1 dx\frac{1}{\epsilon\,\tau^{\epsilon}\sigma^{\epsilon+1}}\Big\{[(1-x)\gamma\cdot p-2im]\sigma^{\epsilon+1}+im(1+x)\sigma\tau^{\epsilon}$$

$$-(\gamma\cdot p-im)(1-x)\sigma\tau^{\epsilon}+2m^2(\gamma\cdot p-im)(x-x^3)\,\epsilon\,\tau^{\epsilon}\Big\}\Big|_{\epsilon\to 0}$$

上式之被积式是一个$\frac{0}{0}$型，我们采用罗毕达法则来确定它，将分子、分母分别对$\epsilon$求导，并对求导结果取极限$\epsilon\to 0$，由此得到：

$$\Sigma^{c}(p)=\frac{-1}{8\pi^2}\int_0^1 dx\Big\{[(1-x)\gamma\cdot p-2im]\ln\sigma+im(1+x)\ln\tau$$

$$-(\gamma\cdot p-im)(1-x)\ln\tau+\frac{2m^2(\gamma\cdot p-im)(x-x^3)}{\sigma}\Big\}$$

$$=\frac{-1}{8\pi^2}\int_0^1 dx\Big\{[(1-x)\gamma\cdot p-2im]\ln\frac{\sigma}{\tau}-2(\gamma\cdot p-im)\frac{x^3-x}{\frac{1}{m^2}\sigma}\Big\},\qquad(11.150)$$

把（11.149)代回此式，就得到$\Sigma^c(p)$的明显表示式，所得结果与（11.64）式相同．这说明，无论用什么方式正规化，发散积分的有限部分是唯一的，不因正规化方法不同而改变．但发散部分的形式则可以有差异．选择$\in\to0$的适当方式，使得：

$$\frac{1}{\in}\Big|_{\in\to0}=\ln\frac{M^2}{m^2}\Big|_{M\to\infty}$$

则（11.144)$b$和（11.148)$b$分别成为：

$$A=\frac{3im}{16\pi^2}\ln\frac{M^2}{m^2},\qquad(11.151)$$

和

$$B=\frac{-1}{16\pi^2}\Big(\ln\frac{M^2}{m^2}+2\ln\frac{\mu^2}{m^2}+2\Big).\qquad(11.152)$$

此二式分别与（11.55）和（11.60）相差一个常数项，对A这个常数项是：

$$\frac{3im}{16\pi^2}\frac{1}{2},$$

对B，这个常数项是：

$$\frac{-1}{16\pi^2}\frac{5}{2}.$$

但这种差异并不改变发散常数A和B的发散程度，正如§3开始所述，这种差异是允许的．

{注意：严格说来$\Gamma(\in)\neq\frac{1}{\in}$，因为$\frac{1}{\Gamma(\in)}=\in e^{\gamma\in}\prod_{n=1}^{\infty}\Big\{(1+\frac{\in}{n})e^{-\in/n}\Big\}$〔注1〕，当$\in\to0$时，此式给出：$\Gamma(\in)|_{\in\to0}=\frac{1}{\in}(1-\gamma\in)|_{\in\to0}=(\frac{1}{\in}-\gamma)|_{\in\to0}$．其中，$\gamma=0.5772\cdots\cdots$称为Euler常数．这样，在$\Sigma(p)$里就加入常数$\gamma$，使其有限部分具有不确定性．这种不确定性与正规化无关，事实上，在原来发散积分里，有限部分就具有不确定性．要消除这种不确定性，必须依靠重整化约定．参见杨炳麟，《量子场论导引》，p 302，科学出版社，1988年}．

〔注1〕 见王竹溪、郭敦仁《特殊函数概论》，p110．

## （二）三阶顶角部分

在（11.6）式里引入截断红外发散的质量参数 $\mu$：

$$\Lambda_\mu(p',p)=\frac{-ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4k'\frac{1}{k'^2+\mu^2}\gamma_\tau\frac{-1}{\gamma\cdot(p'+k')-im}\gamma_\mu\frac{-1}{\gamma\cdot(p+k')-im}\gamma_\tau$$

$$=\frac{-ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4k'\frac{\gamma_\tau[\gamma\cdot(p'+k')+im]\gamma_\mu[\gamma\cdot(p+k')+im]\gamma_\tau}{(k'^2+\mu^2)[(p'+k')^2+m^2][(p+k')^2+m^2]},\qquad(11.153)$$

按照（11.133）式，相应的正规化积分是：

$$\Lambda_\mu^\epsilon(p',p)=\frac{-ie^2}{(2\pi)^n}\int d^nk'\frac{\gamma_\tau[\gamma\cdot(p'+k')+im]\gamma_\mu[\gamma\cdot(p+k')+im]\gamma_\tau}{(k'^2+\mu^2-i\varepsilon)[(p'+k')^2+m^2-i\varepsilon][(p+k')^2+m^2-i\varepsilon]},$$

$$(11.154)$$

这里把质量平方中的虚部写出是为了把传播子分母的倒数参数化：

$$\frac{1}{(k'^2+\mu^2-i\varepsilon)[(p'+k')^2+m^2-i\varepsilon][(p+k')^2+m^2-i\varepsilon]}=i^3\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty d\alpha_1d\alpha_2d\alpha_3$$

$$\times\exp\Big[-i\alpha_1\big(k'^2+\mu^2-i\varepsilon\big)\Big]\exp\Big[-i\alpha_2\big((p'+k')^2+m^2-i\varepsilon\big)\Big]$$

$$\times\exp\Big[-i\alpha_3\big((p+k')^2+m^2-i\varepsilon\big)\Big],\qquad(11.155)$$

利用附录四(17)$a$、(18)$a$、(19)$a$三式可将（11.154）式之分子化简如下：

$$\gamma_\tau[\gamma\cdot(p'+k')+im]\gamma_\mu[\gamma\cdot(p+k')+im]\gamma_\tau=-2\gamma\cdot(p+k')\gamma_\mu\gamma\cdot(p'+k')$$

$$+4im(p+k')_\mu+4im(p'+k')_\mu-2m^2(\in-1)\gamma_\mu+2\in\gamma\cdot(p'+k')\gamma_\mu\gamma\cdot(p+k')$$

$$-2\in im\gamma_\mu\gamma\cdot(p+k')-2\in im\gamma\cdot(p'+k')\gamma_\mu,\qquad(11.156)$$

并通过对辅助矢量$Y$、$Z$（$n$维矢量）的导数来表示分子：

$$(11.156)\text{ 式右边}=\Big[2\gamma\cdot\frac{\partial}{\partial Y}\gamma_\mu\gamma\cdot\frac{\partial}{\partial Z}+4m\frac{\partial}{\partial Y_\mu}+4m\frac{\partial}{\partial Z_\mu}-2m^2(\in-1)\gamma_\mu$$

$$-2\in\gamma\cdot\frac{\partial}{\partial Z}\gamma_\mu\gamma\cdot\frac{\partial}{\partial Y}-2\in m\gamma_\mu\gamma\cdot\frac{\partial}{\partial Y}-2\in m\gamma\cdot\frac{\partial}{\partial Z}\gamma_\mu\Big]$$

$$\times\exp\Big[i\big(Y\cdot(p+k')+Z\cdot(p'+k')\big)\Big]\Big|_{Y=Z=0}.\qquad(11.157)$$

把（11.155）、（11.157）代入（11.154），利用附录四公式（35）完成积分$\int d^nk'$，然后求出对$Y$、$Z$的各项导数〔注意把（11.68）$c$ 式后面指出的两点推广到 $n$ 维情形使用〕，并按附录四（12）—（14）式作变数替换，由此得到：

$$\Lambda_\mu^\in(p',p)=\frac{ie^2\pi^2}{(2\pi)^n}\left(\frac{i}{\pi}\right)^\in\int_0^1 dx_1\int_0^{1-x_1}dx_2\int_0^\infty\eta^\in d\eta\left\{\frac{2i(\in-1)}{\eta}\gamma_\mu\right.$$

$$+2\gamma\cdot[x_2(p'-p)-x_1p]\gamma_\mu\gamma\cdot[(p'-p)-x_2(p'-p)+x_1p]+4im$$

$$\left.\times[(1-2x_2)(p'_\mu-p_\mu)+2x_1p_\mu]-2m^2(\in-1)\gamma_\mu\right\}e^{-i\eta A(x_1,x_2,p',p)}\quad,\quad(11.158)$$

这里的$A(x_1,x_2,p',p)$由（11.98）$a$式定义.因为我们要在$\in\to0$点来分离发散，故在上式里已将正比于$\in$的项略去．现在来看上式右边对$\eta$的积分，因为$A(x_1,x_2,p',p)$里也含有虚部“$-i\varepsilon$”，故类似从（11.139）—(11.141）的做法可得：

$$\int_0^\infty\eta^{\in-1}e^{-i\eta A(x_1,x_2,p',p)}d\eta=\frac{1}{[iA(x_1,x_2,p',p)]^\in}\int_0^{\infty e^{i\theta}}\rho^{\in-1}e^{-\rho}d\rho$$

$$=\frac{\Gamma(\in)}{[iA(x_1,x_2,p',p)]^\in},\qquad|\theta|<\frac{\pi}{2}\qquad(11.159)a$$

$$\int_0^\infty\eta^{\in}e^{-i\eta A(x_1,x_2,p',p)}d\eta=\frac{1}{[iA(x_1,x_2,p',p)]^{\in+1}}\int_0^{\infty e^{i\theta}}\rho^{(\in+1)-1}e^{-\rho}d\rho$$

$$=\frac{\Gamma(\in+1)}{[iA(x_1,x_2,p',p)]^{\in+1}},\qquad|\theta|<\frac{\pi}{2}\qquad(11.159)b$$

把（11.159）代入（11.158）得到：

$$\Lambda_\mu^\in(p',p)=\frac{ie^2\pi^2}{(2\pi)^n}\left(\frac{i}{\pi}\right)^\in\int_0^1 dx_1\int_0^{1-x_1}dx_2\left\{2i(\in-1)\gamma_\mu\frac{\Gamma(\in)}{[iA(x_1,x_2,p',p)]^\in}\right.$$

$$+\big(2[x_2(\gamma\cdot p'-\gamma\cdot p)-x_1\gamma\cdot p]\gamma_\mu[(1-x_2)(\gamma\cdot p'-\gamma\cdot p)+x_1\gamma\cdot p]$$

$$\left.+4im[(1-2x_2)(p'_\mu-p_\mu)+2x_1p_\mu]-2(\in-1)m^2\gamma_\mu\big)\frac{\Gamma(\in+1)}{[iA(x_1,x_2,p',p)]^{\in+1}}\right\}$$

$$(11.160)$$

与§3第（三）小节的做法一样，我们仍然选择非物理的减除点（11.103），此外，在维数正规化里，应当在$\in\to0$之点来作减除，因此我们有：

$$L_\mu=\Lambda_\mu^\in(p',p)\Big|_{\substack{\in\to0\\ \gamma\cdot p'=\gamma\cdot p=im\\ p'=p}}=\frac{ie^2}{16\pi^2}\int_0^1dx_1\int_0^{1-x_1}dx_2$$

$$\times\left\{(-2i\gamma_\mu)\frac{1}{\in}\frac{1}{i^\in[a(x_1)]^\in}+\left(2m^2\gamma_\mu x_1^2-8m^2\gamma_\mu x_1+2m^2\gamma_\mu\right)\frac{1}{i^{\in+1}[a(x_1)]^{\in+1}}\right\}$$

$$=\frac{ie^2}{16\pi^2}\int_0^1 dx_1\int_0^{1-x_1}dx_2(-2i\gamma_\mu)\left\{\frac{1}{\in}\frac{1}{[a(x_1)]^\in}+m^2\frac{x_1^2-4x_1+1}{[a(x_1)]^{\in+1}}\right\}_{\in\to 0}$$

(11.161)$a$

式中，$a(x_1)$由下式定义：

$$a(x_1)=A(x_1,x_2,p',p)\Big|_{\gamma\cdot p'=\gamma\cdot p=im}=x_1\mu^2+m^2(1-x_1)^2,\quad (11.161)b$$

完成（11.161)$a$式中对$x_1$、$x_2$的积分，并注意：

$$\int_0^1 dx_1\int_0^{1-x_1}dx_2\frac{x_1^2-4x_1+1}{x_1\mu^2+m^2(1-x_1)^2}=\frac{5}{2m^2}+\frac{1}{m^2}\ln\frac{\mu^2}{m^2},\qquad (11.161)c$$

即得：

$$L_\mu=-\frac{e^2}{16\pi^2}\gamma_\mu\left(\frac{1}{\in}+2\ln\frac{\mu^2}{m^2}+\frac{10}{2}\right),\qquad (11.161)d$$

令

$$\frac{1}{\in}\Big|_{\in\to 0}=\ln\frac{M^2}{m^2}\Big|_{M\to\infty},$$

就可把（11.161）式与（11.110）式比较，二者在形式上有微小差异，但均为对数发散常数. 类似于（11.101）式，我们现在有：

$$\Lambda_\mu^\in(p',p)\Big|_{\in\to 0}=\left(L_\mu+\Lambda_\mu^c(p',p)\right)_{\in\to 0}\qquad (11.162)$$

即

$$\Lambda_\mu^c(p',p)=\left(\Lambda_\mu^\in(p',p)-L_\mu\right)_{\in\to 0}\qquad (11.163)$$

把（11.160）、（11.161)$a$代入（11.163），就得到$\Lambda_\mu^c(p',p)$：

$$\Lambda_\mu^c(p',p)=\frac{ie^2}{16\pi^2}\int_0^1 dx_1\int_0^{1-x_1}dx_2\left\{(-2i\gamma_\mu)\left[\frac{1}{\in[A(x_1,x_2,p',p)]^\in}-\frac{1}{\in[a(x_1)]^\in}\right]+\left[-2i\frac{B_\mu(x_1,x_2,p',p)}{A(x_1,x_2,p',p)}-(-2i\gamma_\mu)m^2\frac{x_1^2-4x_1+1}{a(x_1)}\right]\right\}_{\in\to 0},$$

$$=\frac{e^2}{8\pi^2}\int_0^1 dx_1\int_0^{1-x_1}dx_2\left\{\gamma_\mu\frac{[a(x_1)]^\in-[A(x_1,x_2,p',p)]^\in}{\in[A(x_1,x_2,p',p)]^\in[a(x_1)]^\in}\right.$$

$$+\frac{B_\mu(x_1,x_2,p',p)}{A(x_1,x_2,p',p)}-\gamma_\mu\frac{x_1^2-4x_1+1}{x_1\frac{\mu^2}{m^2}+(1-x_1)^2}\Bigg\}_{\epsilon\to 0}. \tag{11.164}$$

此式右边第一项是$\frac{0}{0}$型，用罗毕达法则确定后得到：

$$+\Lambda_\mu^c(p',p)=\frac{e^2}{8\pi^2}\int_0^1 dx_1\int_0^{1-x_1}dx_2\Big\{\gamma_\mu\ln\frac{x_1\mu^2+m^2(1-x_1)^2}{A(x_1,x_2,p',p)}+$$

$$\frac{B_\mu(x_1,x_2,p',p)}{A(x_1,x_2,p',p)}-\gamma_\mu\frac{x_1^2-4x_1+1}{x_1\frac{\mu^2}{m^2}+(1-x_1)^2}\Big\}. \tag{11.165}$$

在上面的计算里，凡是对计算结果没有影响之处，都直接令$\epsilon=0$.(11.165)式与(11.106)式完全一致，这再次证明有限部分与正规化方法无关.

## §6　二阶电子自能部分的重整化

前面我们以旋量电动力学里的三个最基本的单圈图为例，介绍了两种正规化方法．如本章开始所述，正规化是进行重整化的第一步工作；重整化的第二步工作是要重新定义参数和场算符，把前面分离出来的发散部分吸收掉．我们仍然以上述三个单圈图为例来进行讨论．本节讨论电子质量重整化和电子波函数重整化．

### （一）裸量与物理量

在量子场论里，粒子的质量、电荷（一般地，相互作用耦合常数）都是作为参数引入到理论里来的．这些参数的值最终要由实验来确定．然而，场论里存在的发散困难，究其原因，在于粒子的自作用（电子自能、真空极化等）导致质量、电荷等发生一个变化$\delta m$和$\delta e$．这样，质量、电荷等物理量就都被分成两部分：其一是固有质量、固有电荷，其二是由于电子自能、真空极化等导致的变化$\delta m$、$\delta e$．

以质量为例．在自由场理论里，我们研究一个没有任何相互作用的场，因而可以认为，场量子只具有固有质量（裸质量）．直到转入相互作用图景以前，在Heisenberg场方程里的粒子质量仍为裸质量．现在，我们特别把裸质量记为$m_b$，则相互作用场方程(8.9)应明确写为：

$$(\gamma_\mu\partial_\mu+m_b)\psi=ie\gamma_\mu\psi A_\mu, \tag{11.166a}$$

$$\overline{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu-m_b)=-ie\overline{\psi}\gamma_\mu A_\mu, \tag{11.166b}$$

如果我们在以上二式两边分别加一项$\delta m\psi$和$-\overline{\psi}\delta m$，并认为电子总质量$m_R$是裸质量$m_b$与自能质量$\delta m$之和：

$$m_R=m_b+\delta m, \tag{11.167}$$

则（11.166）式成为下式：

$$(\gamma_\mu\partial_\mu+m_R)\psi=ie\gamma_\mu\psi A_\mu+\delta m\psi,$$

$$\overline{\psi}(\gamma_\mu\overleftarrow{\partial_\mu}-m_R)=-ie\overline{\psi}\gamma_\mu A_\mu-\overline{\psi}\delta m,$$

当把此二方程转到相互作用图景时，将其右边的项都视为与$\mathscr{L}_I$有关，从而在相互作用图景里以上二式均是线性齐次方程式（见第九章）：

$$(\gamma_\mu\partial_\mu+m_R)\psi=0,$$

$$\overline{\psi}(\gamma_\mu\overleftarrow{\partial_\mu}-m_R)=0.$$

因此，当转入相互作用图景后，粒子质量应理解为总质量（物理质量）$m_R$。此种考虑可以推广到所有的参数和场算符．这样，在转入相互作用图景以前，场方程和Lagrange函数密度里的所有量都是裸量，而在转入相互作用图景后，则都是物理量．引入以下记号：

| 物理量(重整化量) | 裸量(未重整化量) |
|---|---|
| $\psi^R$ | $\psi$ |
| $\overline{\psi}^R$ | $\overline{\psi}$ |
| $A_\mu^R$ | $A_\mu$ |
| $m_R$ | $m_b$ |
| $e_R$ | $e_b$ |

按照上述记号，（8.7）式应重新写为：

$$\mathscr{L}=-\overline{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu+m_b)\psi-\frac{1}{2}\partial_\nu A_\mu\partial_\nu A_\mu+ie_b\overline{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu, \tag{11.168}$$

$$\mathscr{L}_I=-\mathscr{H}_I=ie_b\overline{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu \tag{11.169}$$

而在转入相互作用图景后，以上二式成为：

$$\mathscr{L}=-\overline{\psi}^R(\gamma_\mu\partial_\mu+m_R)\psi^R-\frac{1}{2}\partial_\nu A_\mu^R\partial_\nu A_\mu^R+ie_R\overline{\psi}^R\gamma_\mu\psi^R A_\mu^R, \tag{11.170}$$

$$\mathscr{L}_I=-\mathscr{H}_I=ie_R\overline{\psi}^R\gamma_\mu\psi^R A_\mu^R. \tag{11.171}$$

## （二）电子全传播子的二次近似和链近似

$e\gamma\to e\gamma$散射的二阶直接散射图是图9—8 $a$，现在把该图动量记号改变如下：$k, p, \to k_1, p_1$；$k', p'\to k_2, p_2$；$q\to p$．按照本章引言里约定的Feynman规则，与该图相应的$S$矩阵元为：

$$(f|S_2|i)=(2\pi)^4\frac{1}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}_2|}}e^{\tau}_{\mathbf{k}_2\lambda_2}\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m_R}{E_{p_2}}}\overline{u}_{p_2s_2}(-e_R\gamma_\tau)$$

$$\times S_F(p)(-e_R\gamma_\sigma)\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m_R}{E_{p_1}}}u_{\mathbf{p}_1 s_1}\frac{1}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}_1|}}e^{\sigma}_{\mathbf{k}_1\lambda_1}\,\delta^{(4)}(p_1+k_1-p_2-k_2), \tag{11.172}$$

由于我们现在的$\mathscr{L}_I$是（11.171）式，故（11.2）式里的$m$和$e$，都要明确用记号$m_R$和$e_R$. 这样，将（11.2）和（11.172）相加，就得下式

$$(f|S_2+S_4|i)=(2\pi)^4\frac{1}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}_2|}}e^{\tau}_{\mathbf{k}_2\lambda_2}\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m_R}{E_{p_2}}}\bar{u}_{\mathbf{p}_2 s_2}$$

$$\times(-e_R\gamma_\tau)\Big\{S_F(p)+S_F(p)[-e_R^2\Sigma(p)]S_F(p)\Big\}(-e_R\gamma_\sigma)\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m_R}{E_{p_1}}}u_{\mathbf{p}_1 s_1}$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}_1|}}e^{\sigma}_{\mathbf{k}_1\lambda_1}\,\delta^{(4)}(p_1+k_1-p_2-k_2), \tag{11.173}$$

此式对应的Feynman 图是图（11—9）. 其中的传播子 $S_F^{(2)}(p)$由下式确定：

$$S_F^{(2)}(p)=S_F(p)+S_F(p)[-e_R^2\Sigma(p)]S_F(p). \tag{11.174}$$

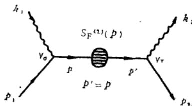



图 11—9

因此，到 $e\gamma\to e\gamma$ 散射的四阶效应为止，电子传播子受到的修正是：以 $S_F^{(2)}(p)$代替二阶近似时的 $S_F(p)$，倘若计入整个微扰级数对$e\gamma\to e\gamma$ 散射的贡献，则电子传播子受到的修正将是以全传播子$\overline{S}_F(p)$去取代图（11—9）中的 $S_F^{(2)}(p)$，$\overline{S}_F(p)$ 可用图形方程表示如下：

$\overline{S}_F(p)$ = $S_F(p)$ + $S_F(p)$ [$-e_R^2\Sigma(p)$] $S_F(p)$ + $S_F(p)$ [$-e_R^2\Sigma(p)$] + …… + …… + …… (11.175)

$S_F^{(2)}(p)$称为全传播子$\overline{S}_F(p)$的二次近似[$S_F(p)$是零次近似]，它是在零次近似基础上插入二阶电子自能部分[$-e_R^2\Sigma(p)$]而得到的[见(11.174)式]. 如前所述，$\Sigma(p)$是一个对数发散的积分. 为了弄清这个发散积分的物理内容，并通过重整化吸收它所包含的发散部分，需要研究全传播子的链近似$\widetilde{S}_F(p)$.

所谓全传播子的链近似，可用图形表示如下：

$$\widetilde{S}_F(p) = \quad + \quad + \quad + \quad + \cdots \qquad (11.176)$$

利用本章引言里的Feynman规则，可将（11.176）写为：

$$\widetilde{S}_F(p) = S_F(p) + S_F(p)[-e_R^2\Sigma(p)]S_F(p)$$

$$+ S_F(p)[-e_R^2\Sigma(p)]S_F(p)[-e_R^2\Sigma(p)]S_F(p) + \cdots\cdots \qquad (11.177)$$

或将上式改写为：

$$\widetilde{S}_F(p) = \frac{1}{S_F^{-1}(p)} - \frac{1}{S_F^{-1}(p)}[e_R^2\Sigma(p)]\frac{1}{S_F^{-1}(p)}$$

$$+ \frac{1}{S_F^{-1}(p)}[e_R^2\Sigma(p)]\frac{1}{S_F^{-1}(p)}[e_R^2\Sigma(p)]\frac{1}{S_F^{-1}(p)} + \cdots\cdots, \qquad (11.178)$$

利用公式：〔注1〕

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a}b\frac{1}{a} + \frac{1}{a}b\frac{1}{a}b\frac{1}{a} - \frac{1}{a}b\frac{1}{a}b\frac{1}{a}b\frac{1}{a} + \cdots\cdots \qquad (11.179)$$

可得：

$$\widetilde{S}_F(p) = \frac{1}{S_F^{-1}(p) + e_R^2\Sigma(p)} = \frac{-1}{\gamma\cdot p - im_R - e_R^2\Sigma(p)}, \qquad (11.180)$$

由§2，第（一）小节知道：

$$\lim_{M\to\infty}\Sigma^{reg}(p) = \Sigma(p),$$

应当指出，此式左边的极限对发散积分的有限部分没有影响，而发散部分按对数规律趋于无限大，我们在重整化后取极限，$\Sigma^{reg}(p)$就等同于$\Sigma(p)$，而发散部分完全被吸收掉。因此，从重整化的角度来看，(11.180)右边的$\Sigma(p)$可以用$\Sigma^{reg}(p)$来代替。这样，把（11.61）式代入（11.180)式可得：

$$\widetilde{S}_F(p) = \frac{-1}{\gamma\cdot p - im_R - e_R^2 A - e_R^2(\gamma\cdot p - im_R)B - e_R^2(\gamma\cdot p - im_R)^2\Sigma^f(p)} \qquad (11.181)$$

此式便是在正规化以后，电子全传播子的链近似表示式。

## （三）电子质量重整化

如第五章所述，对于全传播子的零次近似$S_F(p)$来说，迄今已知的物理粒子是一个

〔注1〕 公式（11.179）证明如下：$\frac{1}{a+b} \equiv \frac{1}{a} - \frac{1}{a}b\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a}b\frac{1}{a} + \frac{1}{a}b\frac{1}{a}b\frac{1}{a+b}$，如此迭代下去，即得（11.179）式。其中$a$和$b$可以是算符、矩阵或通常的数

数学意义下的极点.在转入相互作用图景以前，$S_F(p)$的极点是$\gamma\cdot p=im_b$，而在转入相互作用图景之后，其极点是$\gamma\cdot p=im_R$，但是（11.181）式表明，$\widetilde{S}_F(p)$的极点已发生移动，并已远离物理质壳$\gamma\cdot p=im_R$.让我们来估计这个移动。当$\gamma\cdot p\to im_R$时，精确到二阶小量[注1]我们有：

$$\widetilde{S}_F(p)=\frac{-1}{\gamma\cdot p-im_R-e_R^2A},\tag{11.182}$$

因此，$\widetilde{S}_F(p)$的极点已移动到

$$\gamma\cdot p=im_R+e_R^2A=i(m_R-ie_R^2A),\tag{11.183}$$

这相于电子的的质量改变一量$-ie_R^2A$，这一质量改变是由于电子的自能效应引起的，它就是（11.167）式右边的自能质量$\delta m$，即

$$\delta m=-ie_R^2A.\tag{11.184}$$

这样，我们就在理论上把电子质量区分为裸质量$m_b$和自能质量$\delta m$，然而，$m_b$和$\delta m$都是不可观测量，因而不是物理量。在实验上总是整个地测得$m_R$，而无法分别测量$m_b$和$\delta m$，因此，我们必须把

$$m_R=m_b+\delta m\tag{11.185}$$

视为电子质量的实测值，这种对电子质量的新的理解，便是对电子质量的重新定义，通过这一新定义，我们把无穷大的自能质量$\delta m$吸收到（藏到）电子质量的实验观测值里去，不再区分自能质量和裸质量。这便是电子质量的重整化.另方面，根据传播函数的物理意义，我们必须坚持$\widetilde{S}_F(p)$的极点位置仍在电子动量的物理质壳处，$\delta m$的出现，应当视为理论结果对实验事实的严重偏离，从（11.182）可知，这一偏离来自$\Sigma^{reg}(p)$里包含的对数发散项A。进行电子质量重整化的目的就在于把发散项A吸收到电子质量的新定义（11.185）里去，使它在$\widetilde{S}_F(p)$里（从而在$S$矩阵元里）不再出现，这样，$\widetilde{S}_F(p)$的极点又重新回到$\gamma\cdot p=im_R$。为此，我们在（11.170）式的$\mathscr{L}$里加入一个抵消项

$$\mathscr{L}_I^{\delta m}=\delta m\overline{\psi}^R\psi^R,\tag{11.186}$$

这相当于对（11.171）式的$\mathscr{L}_I$作如下变化：

$$\mathscr{L}_I\longrightarrow\mathscr{L}_I+\mathscr{L}_I^{\delta m}=ie_R\overline{\psi}^R\gamma_\mu\psi^RA_\mu^R+\delta m\overline{\psi}^R\psi^R,\tag{11.187}$$

从而相互作用Hamilton函数密度$\mathscr{H}_I$也作相应的变化：

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_I=-\mathscr{L}_I\to-\mathscr{L}_I-\mathscr{L}_I^{\delta m}&=-ie_R\overline{\psi}^R\gamma_\mu\psi^R A_\mu^R\\&-\delta m\overline{\psi}^R\psi^R=\mathscr{H}_I+\mathscr{H}_I^{\delta m}.\end{aligned}\tag{11.188}$$

---

〔注1〕 在重整化以前，A和B保持有限（乃因$M$保持有限），且$e_R$可视为小量，故$e_R^2$A可视为二阶小量。又当$\gamma\cdot p\to im_R$时，$\gamma\cdot p-im_R$是一阶小量，所以（11.181）分母里的最后两项分别是三阶和四阶小量。

用此式的$\mathscr{H}_I+\mathscr{H}_I^{\delta m}$去代替（9.30）式里的$\mathscr{H}_I$，则$S_2$和$S_4$对所论过程的贡献仍为（11.173)式，不同之点是$S_3$对所论过程有贡献：

$$S_3=\frac{(-i)^3}{3!}\int dx_1\int dx_2\int dx_3 T\Big\{\big[\mathscr{H}_I(x_1)+\mathscr{H}_I^{\delta m}(x_1)\big]\big[\mathscr{H}_I(x_2)$$

$$\mathscr{H}_I^{\delta m}(x_2)\big]\big[\mathscr{H}_I(x_3)+\mathscr{H}_I^{\delta m}(x_3)\big]\Big\} \tag{11.189}$$

此式积分号下共有八项$T$乘积，其中仅有以下三项有贡献：

$$T[\mathscr{H}_I(x_1)\mathscr{H}_I(x_2)\mathscr{H}_I^{\delta m}(x_3)]$$

$$T[\mathscr{H}_I(x_1)\mathscr{H}_I^{\delta m}(x_2)\mathscr{H}_I(x_3)]$$

$$T[\mathscr{H}_I^{\delta m}(x_1)\mathscr{H}_I(x_2)\mathscr{H}_I(x_3)]$$

由于Fermi场算符在时序乘积符号下反对易，使得$[\mathscr{H}_I(x),\mathscr{H}_I^{\delta m}(y)]=0$，故以上三项$T$乘积等效，可以合为一项：

$$3T[\mathscr{H}_1(x_1)\mathscr{H}_I^{\delta m}(x_2)\mathscr{H}_I(x_3)]$$

$$=3T\Big\{\big(-ie_B\overline{\psi}^B(x_1)\gamma_\tau\psi^B(x_1)A_\tau^B(x_1)\big)\big(-\delta m\overline{\psi}^B(x_2)\psi^B(x_2)\big)$$

$$\times\big(-ie_B\overline{\psi}^B(x_3)\gamma_\sigma\psi^B(x_3)A_\sigma^B(x_3)\big)\Big\}$$

将此项$T$乘积分解为正规乘积，则有如下两项正规乘积有贡献(以下省去时空变数$x$)：

$$3:\Big\{(-ie_B\overline{\psi}^B\gamma_\tau\psi^B A_\tau^B)(-\delta m\overline{\psi}^B\psi^B)(-ie_B\overline{\psi}^B\gamma_\sigma\psi^B A_\sigma^B)\Big\}:$$

$$3:\Big\{(-ie_B\overline{\psi}^B\gamma_\tau\psi^B A_\tau^B)(-\delta m\overline{\psi}^B\psi^B)(-ie_B\overline{\psi}^B\gamma_\sigma\psi^B A_\sigma^B)\Big\}:$$

利用第九章§5，第（一）小节介绍的方法可以证明此二项正规乘积等效，这样就消去了$S_3$积分号前的因子$\frac{1}{6}$。使用类似（9.76)$a$、(9.76)$b$式的考虑即可得到：

$$(f|S_3|i)=\int d^4x_1\int d^4x_2\int d^4x_3$$

$$\times\Big\{(f|:(e_B\overset{(-)}{\overline{\psi}^B}\gamma_\tau\psi^B\overset{(-)}{A_\tau^B})(i\delta m\overline{\psi}^B\psi^B)(e_B\overline{\psi}^B\gamma_\sigma\overset{(+)}{\psi^B}\overset{(+)}{A_\sigma^B}):|i)$$

$$+(f|:(e_B\overset{(-)}{\overline{\psi}^B}\gamma_\tau\psi^B\overset{(+)}{A_\tau^B})(i\delta m\overline{\psi}^B\psi^B)(e_B\overline{\psi}^B\gamma_\sigma\overset{(+)}{\psi^B}\overset{(-)}{A_\sigma^B}):|i)\Big\} \tag{11.190}$$

我们不考虑交叉项，所以只关心上式积分号下的第一项。如果对Feynman规则作如下补充：

$$\bullet\xrightarrow{p}\!\!-\!\!\bullet\!\!\xrightarrow{p}\!\!-\!\!\bullet \quad \longrightarrow S_F(p)[i\delta m]S_F(p)$$

就可画出该项矩阵元对应的Feynman图如图11—10。把图11—9和图11—10相加，即可看出：加入抵消项$\mathscr{L}_I^{\delta m}$以后$S_F^{(2)}(p)$应修改为：

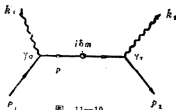



图 11—10

$S_F^{(2)}(p)$ = —$p$— + —$p$—(loop)—$p$— ($-e_R^2\Sigma(p)$) + —$p$—●($i\delta m$)—$p$—

即

$$S_F^{(2)}(p)=S_F(p)+S_F(p)[-e_R^2\Sigma(p)+i\delta m]S_F(p). \tag{11.191}$$

相应地，全传播子的链近似也应修改为：

$$\begin{aligned}\widetilde{S}_F(p)&=S_F(p)+S_F(p)[-e_R^2\Sigma(p)+i\delta m]S_F(p)\\&+S_F(p)[-e_R^2\Sigma(p)+i\delta m]S_F(p)[-e_R^2\Sigma(p)+i\delta m]S_F(p)+\cdots\cdots,\end{aligned} \tag{11.192}$$

利用公式（11.179）可得：

$$\begin{aligned}\widetilde{S}_F(p)&=\frac{1}{S_F^{-1}(p)+[e_R^2\Sigma(p)-i\delta m]}\\&=\frac{-1}{\gamma\cdot p-im_R-e_R^2\Sigma(p)+i\delta m}.\end{aligned} \tag{11.193}$$

把（11.61）代入此式，并注意（11.184），便不难看出此式分母里的$-e_R^2A$项与$i\delta m$项互相抵消，因而有：

$$\widetilde{S}_F(p)=\frac{-1}{\gamma\cdot p-im_R-e_R^2(\gamma\cdot p-im_R)B-e_R^2(\gamma\cdot p-im_R)^2\Sigma^f(p)} \tag{11.194}$$

现在，$\widetilde{S}_F(p)$的极点又回电子动量的物理质壳处：$\gamma\cdot p=im_R$，这是加入抵消项$\mathscr{L}_I^{\delta m}$所取得的效果。因此，我们引入抵消项的做法，相当于从相互作用Lagrange函数密度$\mathscr{L}_I$里把引起自能质量的效应减除掉。加入$\mathscr{L}_I^{\delta m}$后，（11.170）式的$\mathscr{L}$成为：

$$\mathscr{L}=-\overline{\psi}^B(\gamma_\mu\partial_\mu+m_B)\psi^B-\frac{1}{2}\partial_\nu A_\mu^B\partial_\nu A_\mu^B+ie_B\overline{\psi}^B\gamma_\mu\psi^BA_\mu^B$$

$$+\delta m\overline{\psi}^{B}\psi^{B}.$$

考虑到电子质量的新定义（11.185）：

$$m_B=m_b+\delta m,$$

这时的$\mathscr{L}$就用裸质量$m_b$来表示：

$$\mathscr{L}=-\overline{\psi}^{B}(\gamma_\mu\partial_\mu+m_b)\psi^{B}-\frac{1}{2}\partial_\nu A_\mu^{B}\partial_\nu A_\mu^{B}+ie_R\overline{\psi}^{B}\gamma_\mu\psi^{B}A_\mu^{B}, \qquad (11.195)$$

一方面我们从$\mathscr{L}_I$里把引起自能质量的效应减除掉，另方面，在传播子里和$S$矩阵元里，我们又把$\delta m$与$m_b$合在一起，并把$m_R=m_b+\delta m$视为电子质量的实验观测值。因而质量重整化的效果并不是从根本上消除了无穷大（$-e_R^2\mathrm{A}$）而只是把无穷大吸收到（藏到）电子质量的新定义里去。

## （四）电子波函数重整化

经过质量重整化，已将$-e_R^2\Sigma^{reg}(p)$里包含的对数发散项$-e_R^2\mathrm{A}$吸收到电子质量的新定义里去，在传播子和$S$矩阵元的表示式里不再出现发散项$-e_R^2\mathrm{A}$。因此，$\widetilde{S}_F(p)$的极点又回到$\gamma\cdot p=im_R$。但在$\Sigma^{reg}(p)$里尚存在发散常数B〔见(11.194)式〕，发散项$e_R^2(\gamma\cdot p-im_R)\mathrm{B}$改变了$\widetilde{S}_F(p)$在极点处的残数。为了看出这一点，我们来比较$\widetilde{S}_F(p)$与$S_F(p)$在极点$\gamma\cdot p=im_R$处的残数：

$$\operatorname{res}S_F(p)\Big|_{\gamma\cdot p=im_R}=\lim_{\gamma\cdot p\to im_R}(\gamma\cdot p-im_R)\frac{-1}{\gamma\cdot p-im_R}=-1; \qquad (11.196)$$

$$\operatorname{res}\widetilde{S}_F(p)\Big|_{\gamma\cdot p=im_R}=\lim_{\gamma\cdot p\to im_R}(\gamma\cdot p-im_R)\frac{-1}{(\gamma\cdot p-im_R)[1-e_R^2\mathrm{B}-e_R^2(\gamma\cdot p-im_R)\Sigma^f(p)]}$$

$$=\frac{-1}{1-e_R^2\mathrm{B}}, \qquad (11.197)$$

我们看到，二者具有不同的残数。既然我们坚持各次近似传播子的极点均处于$\gamma\cdot p=im_R$〔与$S_F(p)$一样〕，那就应当同时坚持各次近似传播子在极点处有相同残数。因而现在，应当认为$\widetilde{S}_F(p)$在极点处的残数偏离了正常值“$-1$”。各次近似传播子作为Feynman图的内线，总是连接于两个顶角，每个顶角处有一个因子“$-e_R$”，所以残数的变化，事实上相当于电子电荷（电磁作用耦合常数）的变化。以$(-e_R)(-e_R)=e_R^2$分别去乘（11.196）和（11.197）右端的残数值，并比较所得之结果便不难看到，残数的改变，事实上是把不考虑自能作用时之电荷平方$e_R^2$改变为有自能作用时之电荷平方$\frac{e_R^2}{1-e_R^2\mathrm{B}}$。换言之，相当于电荷平方有如下的变化：

$$\delta e^2=\frac{e_R^2}{1-e_R^2\mathrm{B}}-e_R^2,$$

因现在B保持有限，故可把$e_R^2$B视为小量，这样就有

$$\delta e^2 = e_R^2(1+e_R^2\text{B}-1) = e_R^2 e_R^2\text{B}. \tag{11.198}$$

这里，我们同样是把电子的总电荷$e_R$区分为裸电荷$e_b$和自能效应引起的电荷改变$\delta e$，并假定

$$e_R^2 = e_b^2 + \delta e^2; \tag{11.199}$$

但实验上无法分别测定$e_b$和$\delta e$(因为它们都是不可观测量)，而总是整个地测定$e_R$，因此，同样必须把$e_R$看成电子电荷的实验观测值，虽然$\delta e$最终是一个无穷大量〔见(11.198)〕我们仍然认为从实验事实的角度看来，（11.199）式左边与实验观测值等同。这种对电子电荷的新理解，即是对电子电荷的重新定义，通过这一新的定义，我们把无穷大的电荷改变$\delta e$吸收到电子电荷的实验观测值$e_R$里去，不再区分为裸电荷$e_b$与由自能效应引起的电荷改变$\delta e$，这便是电子的电荷重整化〔注1〕。但现在，我们不再使用相加重整化（如同质量重整化那样），而采用相乘重整化〔注2〕：即把

$$e_R = Z_2 e_b \tag{11.200}$$

定义为电子电荷的实验观测值。其中，$Z_2$称为电子波函数重整化常数。

为了找到$Z_2$的形式，把（11.200）与（11.199）相结合：

$$e_R^2 = Z_2^2 e_b^2 = e_b^2 + e_R^2 e_R^2\text{B} = e_b^2(1+Z_2^2 e_R^2\text{B})$$

此式给出：

$$Z_2^2 = 1+Z_2^2 e_R^2\text{B},$$

即

$$Z_2^2 = 1+e_R^2\text{B}. \tag{11.201a}$$

因为在通过重整化来吸收$\Sigma^{reg}(p)$里的发散项$(\gamma\cdot p - im_R)$B以前，对数发散常数B保持有限，故可在（11.201）$a$式右端加上一个二阶小量项$e_R^2$B和一个四阶小量项$e_R^4\text{B}^2$：

$$Z_2^2 \cong 1+e_R^2\text{B}+e_R^2\text{B}+e_R^4\text{B}^2, \tag{11.201b}$$

据此，我们定义电子波函数重整化常数为：

$$Z_2 = 1+e_R^2\text{B}. \tag{11.202}$$

这一定义与（11.201）$a$式似乎是不相容的，但事实上是相容的。关键在于：在整个计算过程里把B视为有限常数，直到把它吸收到物理电荷的定义里去之后才令它趋向无穷大，因此，略去高阶小量，可近似取$Z_2^2 \approx Z_2$（在不改变理论结果的前提下，有时可按需要取$Z_2^2 \approx Z_2 \approx 1$）；我们还可以这样来理解（11.201）$b$式：对于发散常数A、B等等，在保持其发散程度的前提下可以加减（或乘）任意常数，加减某个小量，或加上具有同一发散程度的发散常数．按照此种理解，(11.201)$b$式还可按如下方式得到：把（11.201）$a$中的B代换成$2\text{B}+e_R^2\text{B}^2$。

---

〔注1〕 电子电荷重整化手续到此并不完全。见后面各节；

〔注2〕 在非Abel规范理论里，均使用相乘重整化，在那里。对质量重整化同样引入重整化常数$Z_m$；本章对质量采用相加重整化，其中$\delta m$也可视为一个重整化常数。

现在来证明，借助于（11.200）式的电荷重整化〔它相当于电子波函数重整化．见（11.203)—(11.206)〕，即可把$\Sigma^{reg}(p)$里的发散项$(\gamma\cdot p-im_R)B$吸收到电子电荷和场算符的新定义里去，使$\widetilde{S}_F(p)$的残数重新回到"$-1$"．为此，我们在（11.170）式的$\mathscr{L}$里加入抵消项：

$$\mathscr{L}_I^{\delta e}+\mathscr{L}_I^{\delta m}=-(Z_2-1)\overline{\psi}^R(\gamma_\mu\partial_\mu+m_R)\psi^R+\delta mZ_2\overline{\psi}^R\psi^R, \qquad (11.203)$$

其中，$\delta mZ_2\overline{\psi}^R\psi^R$是前一小节已述及的$\mathscr{L}_I^{\delta m}$，这里，我们同时考虑电子波函数重整化和电子质量重整化，$\mathscr{L}_I^{\delta m}$的形式稍有变化．在加入上述抵消项后，（11.170）式的$\mathscr{L}$成为：

$$\mathscr{L}=-Z_2\overline{\psi}^R(\gamma_\mu\partial_\mu+m_R)\psi^R-\frac{1}{2}\partial_\nu A_\mu^R\partial_\nu A_\mu^R$$

$$+ie_R\overline{\psi}^R\gamma_\mu\psi^R A_\mu^R+\delta mZ_2\overline{\psi}^R\psi^R, \qquad (11.204)$$

引入抵消项的效果，就是要从$\mathscr{L}$里把引起电荷改变$\delta e$的那部分自能效应减除掉．从数学形式上看，就是要把$\mathscr{L}$里电子的物理电荷$e_R$和电子场算符$\overline{\psi}^R$、$\psi^R$均用相应的裸量来代替．下面即可看到，在完成这种代替之后，在$\widetilde{S}_F(p)$里就不再出现发散常数B，$\widetilde{S}_F(p)$的残数又重新回到"$-1$"．为使（11.204）里的$e_R$、$\psi^R$、$\overline{\psi}^R$均换成相应的裸量，除了（11.200）式的定义之外，尚须引入物理场$\psi^R$的如下定义：

$$\psi=\sqrt{Z_2}\psi^R,\quad \overline{\psi}=\sqrt{Z_2}\overline{\psi}^R, \qquad (11.205)$$

这样定义电子的物理场，就称为电子波函数重整化．把（11.200）和（11.205）一并代入（11.204）即得：

$$\mathscr{L}=-Z_2\frac{1}{\sqrt{Z_2}}\overline{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu+m_R)\frac{1}{\sqrt{Z_2}}\psi-\frac{1}{2}\partial_\nu A_\mu^R\partial_\nu A_\mu^R$$

$$+iZ_2e_b\frac{1}{\sqrt{Z_2}}\overline{\psi}\gamma_\mu\frac{1}{\sqrt{Z_2}}\psi A_\mu^R+\delta mZ_2\frac{1}{\sqrt{Z_2}}\overline{\psi}\frac{1}{\sqrt{Z_2}}\psi$$

$$=-\overline{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu+m_R)\psi-\frac{1}{2}\partial_\nu A_\mu^R\partial_\nu A_\mu^R+ie_b\overline{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu^R$$

$$+\delta m\overline{\psi}\psi. \qquad (11.206)$$

在此式里凡属电子的量均已成为裸量．把此式给出的$\mathscr{H}_I=-\mathscr{L}_I=-ie_b\overline{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu^R-\delta m\overline{\psi}\psi$代入$S$矩阵的展式（9.30）并大体重复（11.188）式到（11.193）式的讨论和推算，即可得到加入抵消项以后的$\widetilde{S}_F(p)$：

$$\widetilde{S}_F(p)=\frac{-1}{\gamma\cdot p-im_R-e_b^2\Sigma(p)+i\delta m}$$

$$\overset{(11.61)}{=} \frac{-1}{\gamma\cdot p - im_R - e_b^2 A - e_b^2(\gamma\cdot p - im_R)B - e_b^2(\gamma\cdot p - im_R)^2\Sigma^f(p) + i\delta m}$$

$$= \frac{-1}{\gamma\cdot p - im_R - e_b^2(\gamma\cdot p - im_R)B - e_b^2(\gamma\cdot p - im_R)^2\Sigma^f(p)}, \qquad (11.207)$$

在得出最后一步时，我们使用了$\delta m$的如下定义：

$$\delta m = -ie_b^2 A, \qquad (11.208)$$

由于A是一个发散常数，这一定义并未改变$\delta m$的发散性质．把(11.200)代入(11.207)，并注意（11.202）式的上、下文叙述可得：

$$\widetilde{S}_F(p) = \frac{-1}{\gamma\cdot p - im_R - \frac{e_R^2}{Z_2^2}(\gamma\cdot p - im_R)B - \frac{e_R^2}{Z_2^2}(\gamma\cdot p - im_R)^2\Sigma^f(p)}$$

$$= \frac{-Z_2^2}{(\gamma\cdot p - im_R)[Z_2^2 - e_R^2 B] - e_R^2(\gamma\cdot p - im_R)^2\Sigma^f(p)}$$

$$= \frac{-Z_2^2}{\gamma\cdot p - im_R - e_R^2(\gamma\cdot p - im_R)^2\Sigma^f(p)}, \qquad (11.209)$$

现在，$\Sigma(p)$的全部发散均已分别吸收到$m_R$、$\psi^R$和$e_R$的新定义里去，$\widetilde{S}_F(p)$的极点、残数与$S_F(p)$的极点、残数一致，在$\widetilde{S}_F(p)$的表示式里只包含由实验测定的物理量和收敛积分，即$m_R$、$e_R$和$\Sigma^f(p)$。至于(11.209)分子上的$Z_2^2$，应分别吸收到$\widetilde{S}_F(p)$两端顶角处的电荷定义里去．

为了以后的需要，我们来定义裸传播子(未重整化传播子)与重整化传播子的关系．所谓裸传播子就是进行过质量重整化而尚未进行波函数重整化以前的传播子．例如电子的裸链近似传播子便是（11.194）式定义的$\widetilde{S}_F(p)$；而重整化传播子则是经过质量和波函数重整化之后的传播子，其中只含有物理量和收敛积分．例如对于电子，重整化后的链近似传播子即是(11.209)式右边把$Z_2^2$去掉的部分，我们这里暂时把它记为$\widetilde{S}_F^R(p)$：

$$\widetilde{S}_F^R(p) = \frac{-1}{\gamma\cdot p - im_R - e_R^2(\gamma\cdot p - im_R)^2\Sigma^f(p)}, \qquad (11.210)$$

为了确定$\widetilde{S}_F(p)$与$\widetilde{S}_F^R(p)$之间的关系，我们偿试用$Z_2$去乘（11.210）式两边：

$$Z_2\widetilde{S}_F^R(p) = \frac{-1}{Z_2^{-1}[\gamma\cdot p - im_R - e_R^2(\gamma\cdot p - im_R)^2\Sigma^f(p)]}$$

$$\overset{(11.202)\text{式}}{=} \frac{-1}{(1 - e_R^2 B)[\gamma\cdot p - im_R - e_R^2(\gamma\cdot p - im_R)^2\Sigma^f(p)]}$$

略去与 $e_B^4$ 成比例的项

$$
= \frac{-1}{\gamma\cdot p - im_B - e_B^2(\gamma\cdot p - im_B)\mathrm{B} - e_R^2(\gamma\cdot p - im_B)^2\Sigma^f(p)},
$$

此式右边与(11.194)式右边一致，因此，我们得到$\widetilde{S}_F(p)$与$\widetilde{S}_F^R(p)$之间的如下关系式：

$$
\widetilde{S}_F(p) = Z_2\widetilde{S}_F^R(p). \tag{11.211}
$$

此式可以推广到传播子的各次近似。

到此为止，我们进行了电子质量重整化、电子波函数重整化，吸收了$\Sigma(p)$所包含的全部发散。因此，(11.174) 式定义的$S_F^{(2)}(p)$应当用下式来代替：

$$
S_{FR}^{(2)}(p) = S_F(p) + S_F(p)[-e_R^2(\gamma\cdot p - im_R)^2\Sigma^f(p)]S_F(p), \tag{11.212}
$$

这个传播子不再包含发散，用它去代替 (11.173) 式里的$S_F^{(2)}(p)$，则该式的S矩阵元就不再是发散的，而是有限的了。与此相应，(11.2) 的矩阵元$(f|S_4|i)$经过上述重整化后成为对$e\gamma\leftarrow e\gamma$散射的四阶辐射修正。

## §7 二阶光子自能部分的重整化

这一节，我们来讨论光子自能（即真空极化）所导致的发散，以及如何吸收这些发散。

### （一）规范不变性与光子质量重整化

QED的局域$U(1)$规范不变性，导致光子质量为零〔见第八章习题（1）〕。从物理的直觉看来，一个质量为零的粒子是不会有自能质量效应的，因而勿需进行质量重整化。

在§3第（二）小节里已述及，由于QED的规范不变性，自动排除了$\Pi_{\mu\nu}^{reg}(k)$里的平方发散项。这一点，使得光子全传播子的链近似之极点自动保持在$k^2=0$点。光子全传播子的链近似为

$\widetilde{D}_{F\mu\nu}(k) =$ ～～ + ～～○～～ + ～～○～～○～～ + ……

按照本章引言里约定的Feynman规则，可写：

$$
\begin{aligned}
\widetilde{D}_{F\mu\nu}(k) &= D_{F\mu\nu}(k) + D_{F\mu\sigma}(k)\,ie_R^2\Pi_{\sigma\rho}(k)D_{F\rho\nu}(k)\\
&+ D_{F\mu\sigma}(k)\,ie_R^2\Pi_{\sigma\rho}(k)D_{F\rho\lambda}(k)\,ie_R^2\Pi_{\lambda\eta}(k)D_{F\eta\nu}(k) + \cdots\cdots,
\end{aligned} \tag{11.213}
$$

由于$D_{F\mu\nu}(k)$、$\Pi_{\mu\nu}(k)$的张量性质，上式无法用公式（11.179）来求和。我们首先把上式写成一个隐方程式：

$$
\begin{aligned}
\widetilde{D}_{F\mu\nu}(k) &= D_{F\mu\nu}(k) + D_{F\mu\sigma}(k) ie_R^2\Pi_{\sigma\rho}(k)\{D_{F\rho\nu}(k) \\
&+ D_{F\rho\lambda}(k) ie_R^2\Pi_{\lambda\eta}(k) D_{F\eta\nu}(k) \\
&+ D_{F\rho\lambda}(k) ie_R^2\Pi_{\lambda\eta}(k) D_{F\eta\tau}(k) ie_R^2\Pi_{\tau\theta}(k) D_{F\theta\nu}(k) + \cdots\cdots\} \\
&= D_{F\mu\nu}(k) + D_{F\mu\sigma}(k) ie_R^2\Pi_{\sigma\rho}(k)\widetilde{D}_{F\rho\nu}(k),
\end{aligned}
\tag{11.214}
$$

然后从这个隐方程来求得$\widetilde{D}_{F\mu\nu}(k)$，将上式右边第二项移到左边，并全式乘以$k^2$得：

$$
k^2\widetilde{D}_{F\mu\nu}(k) - k^2 D_{F\mu\sigma}(k) ie_R^2\Pi_{\sigma\rho}(k)\widetilde{D}_{F\rho\nu}(k) = k^2 D_{F\mu\nu}(k),
$$

把$D_{F\mu\nu}(k) = \frac{-i\delta_{\mu\nu}}{k^2}$和$\Pi_{\sigma\rho}(k)$〔即它的正规化积分$\Pi^{reg}_{\sigma\rho}(k)$〕的表示式（11.79）代入上式并整理后得：

$$
k^2[1+e_R^2\Pi(k^2)]\widetilde{D}_{F\mu\nu}(k) - e_R^2\Pi(k^2)k_\mu k_\rho\widetilde{D}_{F\rho\nu}(k) = -i\delta_{\mu\nu},
$$

即

$$
\widetilde{D}_{F\mu\nu}(k) = \frac{-i\delta_{\mu\nu}}{k^2[1+e_R^2\Pi(k^2)]} + \frac{e_R^2\Pi(k^2)k_\mu k_\rho\widetilde{D}_{F\rho\nu}(k)}{k^2[1+e_R^2\Pi(k^2)]},
\tag{11.215}
$$

再次利用方程（11.214）：

$$
k_\rho\widetilde{D}_{F\rho\nu}(k) = k_\rho D_{F\rho\nu}(k) + k_\rho D_{F\rho\sigma}(k) ie_R^2\Pi_{\sigma\tau}(k)\widetilde{D}_{F\tau\nu}(k),
$$

把$D_{F\mu\nu}(k) = \frac{-i\delta_{\mu\nu}}{k^2}$和（11.79）再次代入此式可得：

$$
k_\rho\widetilde{D}_{F\rho\nu}(k) = \frac{-ik_\nu}{k^2},
\tag{11.216}
$$

将此关系式代入（11.215）得：

$$
\widetilde{D}_{F\mu\nu}(k) = \frac{-i\delta_{\mu\nu}}{k^2[1+e_R^2\Pi(k^2)]} + \frac{-ie_R^2\Pi(k^2)k_\mu k_\nu}{k^4[1+e_R^2\Pi(k^2)]},
\tag{11.217}
$$

此式右边第二项称为规范相关项，由于QED的规范不变性，这一项对$S$矩阵元不做贡献〔注1〕，故可把这一项略去：

$$
\widetilde{D}_{F\mu\nu}(k) = \frac{-i\delta_{\mu\nu}}{k^2[1+e_R^2\Pi(k^2)]},
\tag{11.218}
$$

〔注1〕 详见DAVID LURIE,《Particles and Fields》. pp.254—255, pp.282—283.

由于〔见（11.81）和（11.86）a〕

$$\Pi(k^2)\Big|_{k^2=0}=\Pi(0)=\mathrm{D}=\frac{1}{12\pi^2}\ln\frac{\Lambda^2}{m^2},\tag{11.219}$$

而且在进行光子波函数重整化来吸收发散常数D以前，Λ保持有限，故$\widetilde{\mathrm{D}}_{\mathrm{F}\mu\nu}(k)$的极点即是光子动量的质壳$k^2=0$．这样就勿须进行光子质量重整化．

## （二）真空极化导致的电荷重整化

在(11.218)式分母里包含着$\Pi_{\mu\nu}(k)$的对数发散项$\Pi(0)=\mathrm{D}$，这一项改变了$\widetilde{\mathrm{D}}_{\mathrm{F}\mu\nu}(k)$在极点处的残数：

$$\mathrm{res}\mathrm{D}_{\mathrm{F}\mu\nu}(k)\Big|_{k^2=0}=-i\delta_{\mu\nu},\tag{11.220}$$

$$\mathrm{res}\widetilde{\mathrm{D}}_{\mathrm{F}\mu\nu}(k)\Big|_{k^2=0}=\frac{-i\delta_{\mu\nu}}{1+e_R^2\Pi(0)},\tag{11.221}$$

在传播子两端顶角处各有一个因子“$-e_R$”，故残数的变化，意味着电子电荷发生如下变化：

$$\delta e^2=\frac{e_R^2}{1+e_R^2\Pi(0)}-e_R^2=e_R^2[1-e_R^2\Pi(0)-1]=-e_R^2e_R^2\Pi(0).\tag{11.222}$$

在这里，我们又把电子电荷区分为裸电荷$e_b$和真空极化电荷$\delta e$，二者平方之和是总电荷平方：

$$e_R^2=e_b^2+\delta e^2,\tag{11.223}$$

但实验上无法分别测量$e_b$和$\delta e$，因而我们必须把$\delta e$吸收到电子电荷的新定义里去，即用相乘重整化来定义$e_R$：

$$e_R=\sqrt{Z_3}\,e_b,\tag{11.224}$$

$e_R$即是电子电荷的实验测量值，$Z_3$是光子波函数重整化常数．把(11.223)与(11.224)结合，可以找到$Z_3$：

$$Z_3=1-e_R^2\Pi(0).\tag{11.225}$$

为了把$\Pi(0)$吸收到电荷的新定义里去，在（11.170）式的$\mathscr{L}$里加入抵消项：

$$\mathscr{L}_I^{\delta e}=-(Z_3-1)\frac{1}{2}\partial_\nu A_\mu^R\ \partial_\nu A_\mu^R.\tag{11.226}$$

这样，（11.170）式成为：

$$\mathscr{L}=-\overline{\psi}^R(\gamma_\mu\partial_\mu+m_R)\psi^R-Z_3\frac{1}{2}\partial_\nu A_\mu^R\partial_\nu A_\mu^R+ie_R\overline{\psi}^R\gamma_\mu\psi^R A_\mu^R,\tag{11.227}$$

$\mathscr{L}_I^{\delta e}$的作用是要从$\mathscr{L}$里把引起真空极化电荷的那部分光子自能效应减除掉．换言之，加入$\mathscr{L}_I^{\delta e}$应使$\mathscr{L}$里的电磁场算符$A_\mu^R$和电子电荷$e_R$都用相应的裸量来代替．这样，除了（11.224）之外，尚须用下式来定义物理场$A_\mu^R$（光子波函数重整化）：

$$A_\mu(x)=\sqrt{Z_3}\ A_\mu^R(x). \tag{11.228}$$

把（11.224）和（11.228）一并代入（11.227）得：

$$\mathscr{L}=-\overline{\psi}^R(\gamma_\mu\partial_\mu+m_R)\ \psi^R-\frac{1}{2}\partial_\nu A_\mu\partial_\nu A_\mu+ie_b\overline{\psi}^R\gamma_\mu\psi^R A_\mu, \tag{11.229}$$

现在的相互作用Hamilton函数密度是：

$$\mathscr{H}_I=-\mathscr{L}_I=-ie_b\overline{\psi}^R\gamma_\mu\psi^R A_\mu. \tag{11.230}$$

用此式的$\mathscr{H}_I$代入$S$矩阵里去进行微扰计算，所得光子链近似传播子为：

$$\widetilde{\mathrm{D}}_{F\mu\nu}(k)=\frac{-i\delta_{\mu\nu}}{k^2[1+e_b^2\Pi(k^2)]},$$

把（11.224）、（11.225）代入此式：

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{D}}_{F\mu\nu}(k)&=\frac{-i\delta_{\mu\nu}}{k^2[1+Z_3^{-1}e_R^2\Pi(k^2)]}\frac{Z_3}{Z_3}\\&=\frac{-i\delta_{\mu\nu}Z_3}{k^2[Z_3+e_R^2\Pi(k^2)]}=\frac{-i\delta_{\mu\nu}Z_3}{k^2[Z_3+e_R^2\Pi(0)+e_R^2\Pi^f(k^2)]}\\&=Z_3\frac{-i\delta_{\mu\nu}}{k^2[1+e_R^2\Pi^f(k^2)]},\end{aligned} \tag{11.231}$$

此式分子上的$Z_3$应吸收到$\widetilde{\mathrm{D}}_{F\mu\nu}(k)$两端顶角处的电荷定义里去．经过电荷（或光子波函数）重整化，$\widetilde{\mathrm{D}}_{F\mu\nu}(k)$里只含有物理量$e_R$和收敛积分$\Pi^f(k^2)$

$$\Pi^f(k^2)=-\frac{1}{2\pi^2}\int_0^1 dx\ \ x(1-x)\ln[1+x(1-x)\frac{k^2}{m^2}], \tag{11.232}$$

这里，我们曾把（11.80)式写为：

$$\Pi(k^2)=\Pi(0)+\Pi^f(k^2). \tag{11.233}$$

至此，已把$\Pi_{\mu\nu}(k)$里包含的发散项吸收到$A_\mu^R$和$e_R$的新定义里去，光子全传播子的二次近似：

$$\mathrm{D}_{F\mu\nu}^{(2)}(k)=\mathrm{D}_{F\mu\nu}(k)+\mathrm{D}_{F\mu\sigma}(k)ie_R^2\Pi_{\sigma\rho}(k)\mathrm{D}_{F\rho\nu}(k)$$

应代之以

$$D^{(2)}_{F\mu\nu}(k)=D_{F\mu\nu}(k)+D_{F\mu\sigma}(k)ie_R^2\Pi^f_{\sigma\rho}(k)D_{F\rho\nu}(k)$$

这样，例如$e^-e^-\to e^-e^-$散射的直到四阶的$S$矩阵元〔(9.69)$a$与（11.3）之和〕就是有限的。

## §8 三阶顶角部分的重整化

$e^-e^-\to e^-e^-$散射的二阶矩阵元(仅考虑直接散射项)(9.69)$a$可写为：

$$(f|S_2|i)=(2\pi)^4\frac{1}{V^2}\left(\frac{m_R^4}{E_{p'}E_pE_{q'}E_q}\right)^{1/2}\overline{u}_{q's'_2}(-e_R\gamma_\nu)u_{qs_2}$$

$$\times D_{F\nu\mu}(k)\overline{u}_{p's'_1}(-e_R\gamma_\mu)u_{ps_1}\delta^{(4)}(p'+q'-p-q). \qquad (11.234)$$

把（11.5）式里的$m$、$e$都改为$m_R$、$e_R$，然后把（11.5）式与（11.234）式相加．由此得到的矩阵元（$f|S_2+S_6|i$)在形式上与（11.234）相同，只是把其中的$\gamma_\mu$代以

$$\Gamma_\mu(p',p)=\gamma_\mu+\Lambda_\mu(p',p), \qquad (11.235)$$

把$\Lambda_\mu^{reg}(p',p)$的表示式(11.101)代入上式：

$$\Gamma_\mu(p',p)=\gamma_\mu+L\gamma_\mu+\Lambda_\mu^c(p',p), \qquad (11.236)$$

式中，L是（11.110）定义的对数发散常数．倘若把$\gamma_\mu L$代以$\gamma_\mu L+L\Lambda_\mu^c(p',p)$，这并不改变$\Lambda_\mu(p',p)$的发散程度．经过这样代替之后，（11.236）式成为下式：

$$\Gamma_\mu(p',p)=(1+L)[\gamma_\mu+\Lambda_\mu^c(p',p)]. \qquad (11.237)$$

以顶角$\Gamma_\mu$代替$\gamma_\mu$同样改变了传播子在极点的残数．以$e^-e^-\to e^-e^-$散射为例，当光子传播子$D_{F\mu\nu}(k)$两端的顶角是（$-e_R\gamma_\mu$)和($-e_R\gamma_\nu$）时，它在极点处的残数为：

$$\mathrm{res}D_{F\mu\nu}(k)\Big|_{k^2=0}\cong(-e_R\gamma_\mu)(-i\delta_{\mu\nu})(-e_R\gamma_\nu)=-4ie_Re_R, \qquad (11.238)$$

而当光子传播子两端顶角是〔$-e_R\Gamma_\mu(p',p)$〕和〔$-e_R\Gamma_\nu(q',q)$〕时，我们来计算$D_{F\mu\nu}(k)$在减除点（11.103）处的残数：

$$\mathrm{res}D_{F\mu\nu}(k)\Big|_{\substack{\gamma\cdot p'=\gamma\cdot p=im\\ k^2=0}}\cong(-e_R\Gamma_\mu)(-i\delta_{\mu\nu})(-e_R\Gamma_\nu)\Big|_{\gamma\cdot p'=\gamma\cdot p=im}$$

$$=[-e_R(1+L)\gamma_\mu](-i\delta_{\mu\nu})[-e_R(1+L)\gamma_\nu]$$

$$=-4i(1+L)e_R(1+L)e_R, \qquad (11.239)$$

在此式的计算里曾用了（11.107）式．注意到（11.238）式的残数同样等于在减除点（11.103）处的残数，则残数的变化就相当于电荷改变一量$\delta e$：

$$\delta e=(1+\mathrm{L})e_B-e_B=\mathrm{L}e_B \tag{11.240}$$

电子电荷因三阶顶角效应而发生变化，同样是理论结果对实验事实的偏离，电荷的无穷大变化来自$\Lambda_\mu$包含的发散常数L.由于$\Lambda_\mu$总是作为一个组成部分出现在高阶近似$S$矩阵元里，这就使高阶$S$矩阵元失去意义〔例如见(11.4)式和(11.5)式〕.我们下面通过重整化手续把$\delta e$吸收到电子电荷的新定义里去，从而使L不再出现在$S$矩阵元里. 类似于前两节的做法，现在定义

$$e_B=Z_1^{-1}e_b, \tag{11.241}$$

此式与

$$e_B=e_b+\delta e=e_b+\mathrm{L}e_B \tag{11.242}$$

结合，给出顶角重整化常数$Z_1$的表示式：

$$Z_1=1-\mathrm{L} \tag{11.243}$$

把(11.110)与(11.60)比较可得

$$\mathrm{L}=-e_R^2\mathrm{B} \tag{11.244}$$

因此，

$$Z_1=1+e_R^2\mathrm{B}=Z_2 \tag{11.245}$$

这个等式将在后面给出严格证明.

根据(11.241)和(11.243)，我们来进行顶角函数重整化. 首先在(11.170)式的$\mathscr{L}$里加入抵消项

$$\mathscr{L}_I^V=(Z_1-1)ie_B\overline{\psi^B}\gamma_\mu\psi^BA_\mu^B, \tag{11.246}$$

由此得到：

$$\mathscr{L}=-\overline{\psi}^B(\gamma_\mu\partial_\mu+m_B)\psi_B-\frac{1}{2}\partial_\nu A_\mu^B\,\partial_\nu A_\mu^B+iZ_1e_B\overline{\psi}^B\gamma_\mu\psi^BA_\mu^B,$$

根据(11.241)式，可把上式中的$e_B$代换成$e_b$：

$$\mathscr{L}=-\overline{\psi}^B(\gamma_\mu\partial_\mu+m_B)\psi^B-\frac{1}{2}\partial_\nu A_\mu^B\,\partial_\nu A_\mu^B+ie_b\overline{\psi}^B\gamma_\mu\psi^BA_\mu^B, \tag{11.247}$$

用此式的$\mathscr{H}_I=-ie_b\overline{\psi}^B\gamma_\mu\psi^BA_\mu^B$去代替(9.30)式里的$\mathscr{H}_I$，则顶角处的电荷$e_B$(耦合常数)也将用$e_b$来代替. 直到三阶为止的近似顶角为：

$$\left\{-e_b\Gamma_\mu(2\pi)^4\delta^{(4)}(p'-p-k)\right\}$$

(11.237)式

$$=\left\{-(1+\mathrm{L})e_b\left[\gamma_\mu+\Lambda_\mu^c(p',p)\right](2\pi)^4\delta^{(4)}(p'-p-k)\right\}$$

$$=\left\{-Z_1^{-1}e_b\left[\gamma_\mu+\Lambda_\mu^c(p',p)\right](2\pi)^4\delta^{(4)}(p'-p-k)\right\}$$

$$=\left\{-e_B\left[\gamma_\mu+\Lambda_\mu^c(p',p)\right](2\pi)^4\delta^{(4)}(p'-p-k)\right\},\qquad(11.248)$$

(11.248) 式的顶角不再包含紫外发散，其中只含有物理量和收敛积分．用这样的顶角去代替矩阵元$(f|S_2+S_6|i)$里的顶角$\left\{-e_B\Gamma_\mu(2\pi)^4\delta^{(4)}(p'-p-k)\right\}$，则该矩阵元里就不再有顶角发散．

## §9 Ward 恒等式与电荷重整化

前面我们把电子自能效应引起的电荷改变、真空极化引起的电荷改变、以及三阶顶角效应引起的电荷改变都分别吸收到电子电荷的新定义里去．现在应当把这三个方面综合起来，把电子的物理电荷$e_B$表示为

$$e_B=\sqrt{Z_3}Z_2Z_1^{-1}e_b.\qquad(11.249)$$

此式的意思是：来自三个单圈图的无穷大电荷与裸电荷是不可区分的，它们合在一起，等同于电子电荷的实验观测值．

但 (11.249) 式尚可借助Ward恒等式来进行简化，下面首先来证明Ward恒等式：

$$\Gamma_\mu(p,\ p)=-\frac{\partial}{\partial p_\mu}\widetilde{S}_F^{-1}(p)\qquad(11.250)$$

把 (11.235) 和 (11.194) 代入此式，并注意到常数A与$p_\mu$无关，即得：

$$\Lambda_\mu(p,\ p)=-e_B^2\frac{\partial}{\partial p_\mu}\Sigma(p),\qquad(11.251)$$

只要 (11.251) 成立则Ward等式就成立．为了证明 (11.251) 式，我们必须用相应的正规化积分去代替$\Lambda_\mu(p,p)$和$\Sigma(p)$，这是因为发散积分没有意义，(11.251) 式右边对$p_\mu$的导数就不能移入积分号内．将 (11.15) 式化为下式：

$$\Sigma^{reg}(p)=\frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4k\,d_o\frac{2\gamma\cdot(p-k)-4im}{\left[(p-k)^2+m_B^2\right]},\qquad\left(d_o=\frac{M^2-\mu^2}{(k^2+\mu^2)(k^2+M^2)}\right)\qquad(11.252)$$

再将 (11.29) 式化为：

$$\Lambda_\mu^{reg}(p,\ p)=\frac{-ie_B^2}{(2\pi)^4}\int d^4k'\,d_o'\left\{\frac{2\gamma_\mu}{\left[(p+k')^2+m_B^2\right]}+\frac{4\left[2im_B-\gamma\cdot(p+k')\right](p+k')_\mu}{\left[(p+k')^2+m_B^2\right]^2}\right\},\qquad\left(d_o'=\frac{M^2-\mu^2}{(k'^2+\mu^2)(k'^2+M^2)}\right),\qquad(11.253)$$

在化简此式时曾使用了如下等式：

$$\gamma\cdot p\gamma_\mu\gamma\cdot q=2\gamma\cdot pq_\mu-\gamma\cdot p\gamma\cdot q\gamma_\mu, \tag{11.254}$$

现将（11.252）对$p_\mu$求导得：

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu}\Sigma^{\text{reg}}(p)=\frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4kd_c\Big\{\frac{2\gamma_\mu}{(p-k)^2+m_R^2}$$

$$+\frac{4[2im_R-\gamma\cdot(p-k)](p-k)_\mu}{[(p-k)^2+m_R^2]^2}\Big\} \tag{11.255}$$

只要把（11.253）里的$k'$换成$-k$并将所得式与（11.255）比较即得（11.251）式。

应当指出，虽然（11.250）式是三阶顶角与链近似传播子之间的关系，但 Ward 等式对微扰论所有阶都成立。

把（11.250）式的裸顶角$\Gamma_\mu$和裸传播子$\widetilde{S}_F$换成相应的重整化量．为此，定义$\Gamma_\mu^R$为

$$\Gamma_\mu^R(p',p)=\gamma_\mu+\Lambda_\mu^c(p',p) \tag{11.256}$$

由（11.237）式得到裸顶角$\Gamma_\mu$与重整化顶角$\Gamma_\mu^R$之间的如下关系式：

$$\Gamma_\mu(p',p)=Z_1^{-1}\Gamma_\mu^R(p',p) \tag{11.257}$$

将此式与（11.211）式一并代入Ward等式（11.250）：

$$Z_1^{-1}\Gamma_\mu^R(p,\ p)=-Z_2^{-1}\frac{\partial}{\partial p_\mu}\widetilde{S}_F^{R^{-1}}(p), \tag{11.258}$$

此式对任意的$p$成立，特别在减除点（11.103）也成立，而这时有：

$$\Gamma_\mu^R(p,p)\Big|_{\text{减除点}}\longrightarrow\gamma_\mu \tag{11.259}$$

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu}\widetilde{S}_F^{R^{-1}}(p)\Big|_{\text{减除点}}\longrightarrow-\gamma_\mu \tag{11.260}$$

把（11.259）、（11.260）代入（11.258）就得到：

$$Z_1=Z_2 \tag{11.261}$$

这个等式同样对微扰论的所有阶均成立。

把（11.261）代入（11.249）得：

$$e_R=\sqrt{Z_3}e_b \tag{11.262}$$

此式的意思是：电子自能部分对电荷重整化的贡献与三阶顶角部分对电荷重整化的贡献恰相抵消，只剩下二阶光子自能部分对电荷重整化有贡献．这一规律同样对微扰论的所有阶成立。

到此为止，我们以旋量电动力学的三个单圈图为例介绍了重整化的基本思想和基本方法．这样做，只是吸收了这些单圈图在低阶近似$S$矩阵元里引起的发散，为了吸收整

个 $S$ 矩阵微扰级数里存在的发散，就要把本章介绍的初步方法推广到微扰级数的所有阶。需要深入学习重整化理论的读者，可阅读以下几本书：

〔1〕 DAVID LURIE 《Particles and Fields》, pp.284—313, Wiley, 1968;

〔2〕 CLAUDE ITZYKSON, JEAN-BERNARD ZUBER 《Quantum Field Theory》, pp.355—424, McGraw-Hill Inc., 1980;

〔3〕 H.H.波戈留波夫，Д.B.希尔科夫《量子场论导引》，第四、五章，科学出版社，1966年。（此书七十年代中期已出俄文第三版，八十年代初有英文译本）

## 习　题

（1）用P—V正规化，并使用把传播子分母倒数参数化的方法计算正规化积分 $\Sigma^{reg}(p)$，由此重新得到（11.52）、（11.55）、（11.60）和（11.61）诸式。

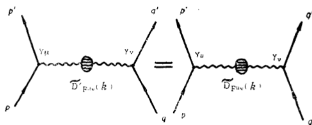
（2）用维数正规化方法分离$\Pi_{\mu\nu}(k)$所包含的发散，并得到如下的结果：

$$\Pi_{\mu\nu}^{\epsilon}(k)=\frac{1}{12\pi^2}(k_\mu k_\nu-\delta_{\mu\nu}k^2)\left(\frac{1}{\epsilon}-\ln m^2\right)$$

$$-\frac{1}{2\pi^2}(k_\mu k_\nu-\delta_{\mu\nu}k^2)\int_0^1 dx\ x(1-x)\ln\left(1+x(1-x)\frac{k^2}{m^2}\right)$$

怎样说明此式与（11.82）式之一致性？

（3）证明以下图形等式：




其中，$\widetilde{D}'_{F\mu\nu}(k)$是由（11.217）式给出的光子传播子链近似，而$\widetilde{D}_{F\mu\nu}(k)$则是略去规范相关项以后的光子链近似传播子〔见（11.218）式〕。

（4）重整化常数$Z_1$、$Z_2$、$Z_3$、$\delta m$是有限常数吗？在进行重整化吸收发散以前，保持$M$、$\Lambda$有限，而且$\epsilon$不趋于零；但$M$、$\Lambda$最终要趋于无穷，$\epsilon$也最终要趋于零，你认为在何时何处取上述极限才适当？

（5）量子场论是一个十分庞大的理论体系，也是正在发展的科学前沿，编者愿意提出如下问题与读者共同进行长期的思考：现今的量子场论只是不够完善呢，还是需要彻底变革？

# 附录一　γ矩阵求迹公式

除了第一章给出的公式以外，这里再补充如下的公式：

（1）奇数个γ矩阵乘积的迹为零，即

$$\mathrm{Tr}\gamma\cdot a_1\gamma\cdot a_2\cdots\cdots\gamma\cdot a_n=0,\ (n\text{为奇数}) \tag{1}$$

其中$a_1, a_2\cdots\cdots a_n$是一些任意的四维矢量。

**证明**：因$\gamma_5\gamma\cdot a_1\gamma\cdot a_2\cdots\cdots\gamma\cdot a_n\gamma_5=(-1)^n\gamma\cdot a_1\gamma\cdot a_2\cdots\cdots\gamma\cdot a_n$。将此式两边取迹，并注意到求迹的可轮换性，即可得到（1）式。

（2）$\mathrm{Tr}\gamma\cdot a\gamma\cdot b=4a\cdot b$, 　　（2）

其中，$a$、$b$为四维矢量。

**证明**：利用（1.74）$d$可得

$$\mathrm{Tr}\gamma\cdot a\gamma\cdot b=\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\gamma_\mu\gamma\cdot a\gamma\cdot b\gamma_\mu=\frac{1}{4}\mathrm{Tr}(4a\cdot b)$$

$$=4a\cdot b,\quad (\mathrm{Tr}a\cdot b=4a\cdot b)$$

所以（2）式得证。

（3）$\mathrm{Tr}\gamma_5\gamma\cdot a\gamma\cdot b=0$． 　　（3）

此式求迹号下是形如$\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu$的一些项的和，按照$\gamma_5$的定义〔见（1.65）式〕和（1.71）$b$，显然应有

$$\mathrm{Tr}\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu=0,\ (\text{对任意的}\mu、\nu)$$

因此，（3）式成立。

（4）$\mathrm{Tr}\gamma_5\gamma\cdot a\gamma\cdot b\gamma\cdot c\gamma\cdot d=4\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}a^\mu b^\nu c^\rho d^\lambda$． 　　（4）

**证明**：$\mathrm{Tr}\gamma_5\gamma\cdot a\gamma\cdot b\gamma\cdot c\gamma\cdot d=a^\mu b^\nu c^\rho d^\lambda\mathrm{Tr}\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\lambda$

其中，

$$\mathrm{Tr}\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\lambda=\begin{cases}0\ , & \text{当指标}\mu、\nu、\rho、\lambda\text{有任意两个相同或全同；}\\ +4, & \text{当}\mu、\nu、\rho、\lambda\text{全都不同，且}\mu\nu\rho\lambda\text{是 1 2 3 4 的偶排列；}\\ -4, & \text{当}\mu、\nu、\rho、\lambda\text{全都不同，且}\mu\nu\rho\lambda\text{是 1 2 3 4 的奇排列。}\end{cases}$$

因此，（4）式成立〔参见（1.145）式后面的定义〕。

（5）

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}\gamma\cdot a_1\gamma\cdot a_2\cdots\cdots\gamma\cdot a_n\\&=a_1\cdot a_2\mathrm{Tr}\gamma\cdot a_3\gamma\cdot a_4\cdots\cdots\gamma\cdot a_n\\&-a_1\cdot a_3\mathrm{Tr}\gamma\cdot a_2\gamma\cdot a_4\gamma\cdot a_5\cdots\cdots\gamma\cdot a_n\\&+\cdots\cdots+\\&+a_1\cdot a_n\mathrm{Tr}\gamma\cdot a_2\gamma\cdot a_3\cdots\cdots\gamma\cdot a_{n-1}.\ (n\text{为偶数})\end{aligned} \tag{5}$$

**证明**：由（1.74）$a$：

$$\gamma\cdot a\gamma\cdot b=-\gamma\cdot b\gamma\cdot a+2a\cdot b, \tag{6}$$

因此，

$$\mathrm{Tr}\gamma\cdot a_1\gamma\cdot a_2\cdots\cdots\gamma\cdot a_n=\mathrm{Tr}\gamma\cdot a_2\gamma\cdot a_3\cdots\cdots\gamma\cdot a_n\gamma\cdot a_1$$
$$=2a_1\cdot a_n\mathrm{Tr}\gamma\cdot a_2\gamma\cdot a_3\cdots\cdots\gamma\cdot a_{n-1}$$
$$-2a_1\cdot a_{n-1}\mathrm{Tr}\gamma\cdot a_2\gamma\cdot a_3\cdots\cdots\gamma\cdot a_{n-2}\gamma\cdot a_n$$
$$+\cdots\cdots+$$
$$+2a_1\cdot a_2\mathrm{Tr}\gamma\cdot a_3\gamma\cdot a_4\cdots\cdots\gamma\cdot a_n$$
$$-\mathrm{Tr}\gamma\cdot a_1\gamma\cdot a_2\cdots\cdots\gamma\cdot a_n.$$

将此式右边最后一项移到左边就得到（5）式. 在 $n=4$ 的情形下，（5）式成为

$$\mathrm{Tr}\gamma\cdot a_1\gamma\cdot a_2\gamma\cdot a_3\gamma\cdot a_4=4a_1\cdot a_2a_3\cdot a_4$$
$$-4a_1\cdot a_3a_2\cdot a_4+4a_1\cdot a_4a_2\cdot a_3. \tag{7}$$

此式是 (1.71)$d$式的推广.

（6） $\mathrm{Tr}\gamma\cdot a_1\gamma\cdot a_2\cdots\cdots\gamma\cdot a_n$

$$=\mathrm{Tr}\gamma\cdot a_n\gamma\cdot a_{n-1}\cdots\cdots\gamma\cdot a_1.\ (n\text{为偶数}) \tag{8}$$

**证明**：利用电荷共轭矩阵C，有

$$\mathrm{Tr}\gamma\cdot a_1\gamma\cdot a_2\cdots\cdots\gamma\cdot a_n=\mathrm{Tr}C\gamma\cdot a_1\gamma\cdot a_2\cdots\cdots\gamma\cdot a_nC^{-1}$$
$$=(-1)^n\mathrm{Tr}(\gamma\cdot a_1)^T(\gamma\cdot a_2)^T\cdots\cdots(\gamma\cdot a_n)^T$$
$$=\mathrm{Tr}(\gamma\cdot a_n\gamma\cdot a_{n-1}\cdots\cdots\gamma\cdot a_1)^T=\mathrm{Tr}\gamma\cdot a_n\gamma\cdot a_{n-1}\cdots\cdots\gamma\cdot a_1$$

（7）作为公式 (1.74)$c$— (1.74)$e$的特殊情形，我们有：

$$\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\mu=-2\gamma_\alpha, \tag{9a}$$
$$\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu=4\delta_{\alpha\beta}, \tag{9b}$$
$$\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\delta\gamma_\mu=-2\gamma_\delta\gamma_\beta\gamma_\alpha. \tag{9c}$$

（8）作为公式（4）的特殊情形，有

$$\mathrm{Tr}\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma=4\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \tag{10}$$

此式的正确性可从（4）式的证明过程明显地看到.

（9）两个四秩Levi-Civita张量的乘积，可以用二秩单位张量表示如下：

$$\varepsilon_{\mu\alpha\nu\lambda}\varepsilon_{\mu\rho\nu\sigma}=2(\delta_{\alpha\rho}\delta_{\lambda\sigma}-\delta_{\alpha\sigma}\delta_{\lambda\rho}). \tag{11}$$

此式的正确性可通过直接观察看出来。

# 附录二　投影算符与极化矢量

以非相对论量子力学为例．这部分的主要参考书是Д.И．布洛欣采夫，《量子力学原理》上册，pp．66—72，pp．162—165，高等教育出版社，1956年版；LEONARD I. SCHIFF，《Quantum Mechanics》Third Edition，pp.378—383，McGraw-HiLL，1968．

## （一）量子力学的两种态

量子体系的状态要用波函数来描写．但在实际情形下，并非总可以用一个波函数来描写．因此，量子体系的状态分为两种：

**纯态**：如果对体系的测量是完全的，即对力学量的某组完全集合进行测量，则体系的状态就能用某个波函数 $\psi$ 来描写．能用一个波函数来描写的态称为纯态．

**混合态**：如果对体系的测量是不完全的，例如，倘若要对量子体系的某组完全集合 $P$、$Q$、$R$进行测量是不可能的，其中，力学量$Q$的值未经测定，这时，体系的状态要由一系列波函数和相应的几率来描写：

$$\psi_1、\psi_2、\cdots\cdots\psi_n \tag{1)a$$

$$p_1、p_2、\cdots\cdots p_n \tag{1)b$$

这里，$\psi_1、\psi_2、\cdots\cdots\psi_n$是算符$\hat{Q}$的一组完全、正交、归一的本征函数．由（1）式描写的状态称为混合态，而由每个$\psi_k$描写的态则都是纯态（这里可称为亚纯态），相应的几率$p_k$是亚纯态$\psi_k$在混合态中出现的几率．因此，混合态是一组亚纯态按其相应几率的组合．

**混合态与纯态的区别**：

1）由前述定义显见，纯态可用某个一定的波函数来描写；而混合态要用波函数集合和相应几率来描写〔见（1）式〕．

2）设$\psi_1$、$\psi_2$、$\cdots\cdots\psi_n\cdots\cdots$是体系的某组完全集合的共同本征函数，则由这组本征函数可以构成纯态 $\psi$：

$$\psi=\sum_n c_n\psi_n, \tag{2}$$

式中的所有系数$c_n$为已知数，因而各个$\psi_n$的相对相位差是已知的．

另方面，倘若我们只知道每个亚纯态$\psi_n$出现的几率$p_n=|c_n|^2$，而并不知道系数$c_n$，因而各个亚纯态之间的相位关系不确定，这时，$\psi_1$、$\psi_2$、$\cdots\cdots\psi_n\cdots\cdots$和相应的几率$p_1$、$p_2$、$\cdots\cdots p_n\cdots\cdots$就构成混合态．

因此，纯态是某组完全集合的本征态，或某组本征态的迭加态．在后一种情形下，纯态是一组亚纯态的相干组合；与此相反，混合态则是某组亚纯态的不相干的组合．

3）在纯态 $\psi$ 下，单个粒子的体系，其坐标几率密度为

$$\omega(x)=|\psi(x)|^2=\sum_n|c_n|^2|\psi_n(x)|^2$$

$$+\sum_{n\neq m}\sum_m c_n^* c_m \psi_n^*(x)\psi_m(x); \tag{3}$$

而在混合态

$$\psi_1、\psi_2、\cdots\cdots\psi_n、\cdots\cdots$$

$$p_1、p_2、\cdots\cdots p_n、\cdots\cdots$$

之下，上述的几率密度是

$$\omega(x)=\sum_n p_n|\psi_n(x)|^2 \tag{4}$$

（3）式右边第二项是由各个亚纯态之间的相干效应所导致的．称为干涉项，我们看到，（4）式右边没有干涉项．这一点可以帮助我们更好地理解前述的第2）点区别．

倘若改变一下数学形式，不再用波函数来描写量子体系的态，而改用右矢$|\rangle$，那末，下面的讨论将会方便得多．

## （二）希望值与投影算符

**投影算符的定义与性质：**

设$|\alpha\rangle$是体系的某个完全集合的一个归一化本征右矢，则

$$P_\alpha=|\alpha\rangle\langle\alpha| \tag{5}$$

称为$|\alpha\rangle$态的投影算符．它相当于Hilbert空间的一个投影运算．它把$|\alpha\rangle$投影为自身：

$$P_\alpha|\alpha\rangle=|\alpha\rangle\langle\alpha|\alpha\rangle=|\alpha\rangle, \tag{6}$$

而把任意态$|p\rangle$投影为与$|\alpha\rangle$态“同方向”的态：

$$P_\alpha|p\rangle=|\alpha\rangle\langle\alpha|p\rangle=\langle\alpha|p\rangle|\alpha\rangle, \tag{7}$$

如果$|\beta\rangle$是与$|\alpha\rangle$正交的另一个本征右矢，则有：

$$P_\alpha|\beta\rangle=|\alpha\rangle\langle\alpha|\beta\rangle=0, \tag{8}$$

$$P_\alpha P_\alpha=P_\alpha, \tag{9}$$

$$P_\alpha P_\beta=P_\beta P_\alpha=0. \tag{10}$$

以上定义与性质显然是普通三维空间投影运算的推广．

**投影算符的作用：**

设$Q$是某个力学量的算符，$|i\rangle$、$|j\rangle$、……是 Hilbert 空间的一组基右矢，则力学量$Q$在态$|\alpha\rangle$下的期望值为：

$$\langle\hat{Q}\rangle=\frac{\langle\alpha|\hat{Q}|\alpha\rangle}{\langle\alpha|\alpha\rangle}=\langle\alpha|\hat{Q}|\alpha\rangle$$

$$=\sum_i\sum_j\langle\alpha|i\rangle\langle i|\hat{Q}|j\rangle\langle j|\alpha\rangle$$

$$=\sum_i\sum_j\langle j|\alpha\rangle\langle\alpha|i\rangle\langle i|\hat{Q}|j\rangle$$

$$=\sum_j\langle j|P_\alpha\hat{Q}|j\rangle=\mathrm{Tr}(P_\alpha\hat{Q}) \tag{11}$$

此式表明，为了确定力学量$Q$在态$|\alpha\rangle$的期望值，可以借助于右矢$|\alpha\rangle$用通常的办法进行计算，也可以借助于$|\alpha\rangle$态的投影算符$P_\alpha$用（11）式来计算．换言之$P_\alpha$与$|\alpha\rangle$同样地能够提供量子体系的全部情报．

### （三）密度算符

如果体系处于混合态

$$\cdots\cdots、|\alpha\rangle、\cdots\cdots、|\beta\rangle、\cdots\cdots \tag{12a}$$

$$\cdots\cdots、p_\alpha、\cdots\cdots、p_\beta、\cdots\cdots,$$

其中，

$$\sum_\alpha p_\alpha=1, \tag{12b}$$

$$P_\alpha P_\beta=|\alpha\rangle\langle\alpha|\beta\rangle\langle\beta|=\delta_{\alpha\beta}P_\alpha, \tag{12c}$$

则，定义如下的算符$\rho$为混合态（12）$a$的密度算符：

$$\rho=\sum_\alpha p_\alpha P_\alpha=\sum_\alpha|\alpha\rangle p_\alpha\langle\alpha|. \tag{13}$$

在混合态下，力学量$Q$的期望值记为$\langle\overline{\hat{Q}}\rangle$：

$$\langle\overline{\hat{Q}}\rangle=\sum_\alpha p_\alpha\langle\alpha|\hat{Q}|\alpha\rangle=\sum_\alpha p_\alpha\mathrm{Tr}(\hat{Q}P_\alpha)$$

$$=\sum_\alpha\mathrm{Tr}[\hat{Q}p_\alpha P_\alpha]=\mathrm{Tr}[\hat{Q}\sum_\alpha p_\alpha P_\alpha]$$

$$=\mathrm{Tr}(\hat{Q}\rho). \tag{14}$$

将（14）式与（11）式比较可知：混合态的密度算符$\rho$与纯态的投影算符$P$彼此对应．前者是后者的推广，后者是前者的特殊情形，而且同样地，$\rho$能够提供在混合态下体系的一切情报．

由（13）式看到，算符$\rho$只决定于混合态（12）$a$．因此，为了计算$\rho$的迹，可在（14）式中令$\hat{Q}$为单位算符（恒等运算）：

$$\hat{Q}=1,$$

以此代入（14）式得

$$\mathrm{Tr}(\rho)=\sum_\alpha p_\alpha=1. \tag{15}$$

此式是密度算符的重要性质．它表明，算符$\rho$是一个矩阵算符，其迹为1．常称$\rho$为密度矩阵．

从（15）式尚可推出投影算符的另一性质．为此，我们把纯态$|\alpha\rangle$看成是如下的混合态：

$$\cdots\cdots,\ |\alpha\rangle\ \cdots\cdots,\ |\beta\rangle,\ \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots,\ p_\alpha,\ \cdots\cdots,\ p_\beta,\ \cdots\cdots$$

其中，除$p_\alpha=1$之外，其余亚纯态的几率均为零，因而这个混合态的密度算符ρ与亚纯态$|\alpha\rangle$的投影算符$P_\alpha$等同：

$$\rho=\sum_\beta|\beta\rangle p_\beta\langle\beta|=|\alpha\rangle p_\alpha\langle\alpha|=|\alpha\rangle\langle\alpha|=P_\alpha,$$

此式两边取迹，并注意（15）式即得

$$\mathrm{Tr}(P_\alpha)=1, \tag{16}$$

根据（9）式又有：

$$\mathrm{Tr}(P_\alpha^2)=\mathrm{Tr}(P_\alpha)=1. \tag{17}$$

## （四）极化矢量

所谓"极化"，是指粒子自旋角动量方向相对于某个特定方向有一定关系。这个特定的方向就是微观粒子的极化方向。以电子为例，我们来找出自旋角动量方向与极化方向的关系。电子自旋在$x_3$轴方向投影为$\pm\frac{1}{2}$的自旋态分别是：

$$|\sigma_3^+\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\quad 和\quad |\sigma_3^-\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

因此，自旋在某一任意方向投影为$\pm\frac{1}{2}$的态是：

$$|\sigma_\alpha\rangle=\alpha_1|\sigma_3^+\rangle+\alpha_2|\sigma_3^-\rangle=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix}, \tag{18}$$

其中，

$$|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2=1.\ （即|\sigma_\alpha\rangle是归一化右矢） \tag{19}$$

自旋态$|\sigma_\alpha\rangle$的投影算符为

$$P_{\sigma_\alpha}=|\sigma_\alpha\rangle\langle\sigma_\alpha|=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1^*\ \alpha_2^*\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}|\alpha_1|^2 & \alpha_1\alpha_2^*\\ \alpha_2\alpha_1^* & |\alpha_2|^2\end{pmatrix}, \tag{20}$$

我们看到，$P_{\sigma_\alpha}$是一个2×2矩阵，因此，可用$I_2$、$\sigma_1$、$\sigma_2$、$\sigma_3$来线性表示$P_{\sigma_\alpha}$：

$$P_{\sigma_\alpha}=a_0I_2+\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\sigma}. \tag{21}$$

式中，$a_0$是实数、$\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$是实矢量、$\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$。由（9）式不难得到：

$$a_0=\frac{1}{2},\ |\mathbf{a}|=\frac{1}{2}.$$

引入实单位矢量$\pi_\alpha = 2\mathbf{a}$，即可将（21）式重写为

$$P_{\sigma_\alpha} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\pi_\alpha \cdot \sigma$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\pi_{\alpha 3} & \pi_{\alpha 1} - i\pi_{\alpha 2} \\ \pi_{\alpha 1} + i\pi_{\alpha 2} & 1-\pi_{\alpha 3} \end{pmatrix} \tag{22}$$

现在，我们来计算电子自旋角动量在态$|\sigma_\alpha\rangle$下的期望值。为此，只需要计算$\langle\sigma_\alpha|\sigma|\sigma_\alpha\rangle$：

$$\langle\sigma_\alpha|\sigma|\sigma_\alpha\rangle = \mathrm{Tr}(P_{\sigma_\alpha}\sigma) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\pi_\alpha \cdot \sigma\sigma]$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\pi_\alpha \cdot \sigma\sigma] \tag{23}$$

在上式的推算里曾使用了Pauli矩阵$\sigma_1$、$\sigma_2$、$\sigma_3$均为零迹矩阵的事实。在实三维空间选定一组基矢$\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$、$\mathbf{e}_3$，使得$\sigma$的三个分量恰为三个Pauli矩阵，这样就有

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}[\pi_\alpha \cdot \sigma\sigma] \\ &= \mathrm{Tr}\Big[\pi_\alpha \cdot [\sigma_1\sigma_1(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1) + \sigma_1\sigma_2(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) + \sigma_1\sigma_3(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3) \\ &+ \sigma_2\sigma_1(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) + \sigma_2\sigma_2(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2) + \sigma_2\sigma_3(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3) \\ &+ \sigma_3\sigma_1(\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1) + \sigma_3\sigma_2(\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2) + \sigma_3\sigma_3(\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3)]\Big]\end{aligned}$$

因为

$$\pi_\alpha \cdot (\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j) = \pi_{\alpha i}\mathbf{e}_j,\quad i、j = 1, 2, 3$$

$$\sigma_i\sigma_j = i\sigma_k,\quad ijk\text{取}1,\ 2,\ 3\text{的偶排列}$$

且

$$\mathrm{Tr}\sigma_k = 0,\quad k = 1、2、3$$

所以

$$\mathrm{Tr}[\pi_\alpha \cdot \sigma\sigma] = \mathrm{Tr}(\pi_{\alpha 1}\mathbf{e}_1 + \pi_{\alpha 2}\mathbf{e}_2 + \pi_{\alpha 3}\mathbf{e}_3)$$

$$= \pi_\alpha \mathrm{Tr} I_2 = 2\pi_\alpha$$

将这一结果代入（23）式就得到

$$\langle\sigma_\alpha|\sigma|\sigma_\alpha\rangle = \pi_\alpha. \tag{24}$$

此式表明，$\sigma$在态$|\sigma_\alpha\rangle$下的期望值或平均值是单位矢量$\pi_\alpha$。相应地，自旋角动量（电子自旋角动量算符为$\hat{s} = \frac{1}{2}\sigma$）在态$|\sigma_\alpha\rangle$下的平均值是

$$\langle\sigma_\alpha|\hat{s}|\sigma_\alpha\rangle = \frac{1}{2}\pi_\alpha. \tag{25}$$

$\langle\sigma_\alpha|\hat{s}|\sigma_\alpha\rangle$是自旋角动量在态$|\sigma_\alpha\rangle$下的统计平均，这就意味着，电子的自旋角动量并没有确定的空间取向，而是存在许多可能的取向。这一点，同样反映了自旋角动量与经典力学角动量之不同。即自旋角动量带有统计的特征，而经典的角动量没有这种特征（自旋角动量与经典角动量的另一区别便是熟知的量子化）。从（25）式看到，自旋角动量

的统计平均在$\pi_\alpha$方向的投影是$+\frac{1}{2}$. 在量子力学教科书里常常谈到粒子自旋在某 方 向之投影，实际是指自旋角动量的统计平均（平均自旋角动量矢量）在该方向上的投影．而所指的空间方向便是$\pi$方向。我们称$\pi_\alpha$为处于自旋态$|\sigma_\alpha\rangle$的电子的极化矢量．

例如，一个处于自旋 态$|\sigma_3^+\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$的电子，其极化矢量为

$$\langle\sigma_3^+|\boldsymbol{\sigma}|\sigma_3^+\rangle=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}[\sigma_1\mathbf{e}_1+\sigma_2\mathbf{e}_2+\sigma_3\mathbf{e}_3]\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

把Pauli矩阵的表示代入上式立即得到

$$\langle\sigma_3^+|\boldsymbol{\sigma}|\sigma_3^+\rangle=\mathbf{e}_3,$$

即极化矢量是$x_3$轴的基矢．这时平均自旋角动量矢量在$\mathbf{e}_3$方向的投影为$+\frac{1}{2}$. 用同样的方法可以证明，处于自旋态$|\sigma_3^-\rangle$的电子，其极化矢量为

$$\langle\sigma_3^-|\boldsymbol{\sigma}|\sigma_3^-\rangle=-\mathbf{e}_3.$$

由于$\mathbf{e}_3$与$-\mathbf{e}_3$方向恰相反，故习惯上常取$\mathbf{e}_3$为自旋态$|\sigma_3^+\rangle$和$|\sigma_3^-\rangle$的极化矢量，这时， 平均自旋角动量矢量在极化方向上的投影分别是$+\frac{1}{2}$和$-\frac{1}{2}$.

# 附录三　Minkowski空间的度规与记号

量子场的运动是在四维时空里进行的．时间一维、空间三维构成一个四维空间，Minkowski空间．这个空间的度规（或度量）是赝欧氏度规．但在具体处理上，存在许多不同的方法．各种方法之间的主要区别在于：度规张量的形式和时空点的坐标采用不同的方法来定义．另方面，在场论的计算里，常常要用到$\gamma$矩阵．这些矩阵定义于四维的旋量（即双旋量）空间．它们必须满足一定的反对易关系．但矩阵的具体表示可以有许多种．在Minkowski空间里采用不同的度规以及采用不同的$\gamma$矩阵表示，则场论的公式也将具有稍微不同的形式，但理论的物理结果是完全一样的．初学者在阅读某本量子场论书籍的过程中需要参考另一本书时，如果两本书所用度规和记号不同，就会感到困难．因此，在这个附录里我们将介绍常用的两种度规和记号：Bjorken-Drell度规和记号（以下简称B—D度规），与Pauli度规和记号（简称P度规），并给出由一种度规到另一种度规的转换方法．

## （一）Bjorken-Drell度规

**度规张量**：在Minkowski空间选择如下的一组协变基$e_\alpha(\alpha=0,1,2,3)$：

$$e_\alpha\cdot e_\alpha=\begin{cases}-1, & 当\alpha=j=1、2、3\\ +1, & 当\alpha=0\end{cases} \tag{1}$$

这组基矢量的长度并非都是实数，如上式所示，其中三个空间坐标基矢量长度为$i$．定义Minkowski空间的协变度规张量为

$$g_0=\{g_{\alpha\beta}\}\qquad \alpha、\beta=0,1,2,3 \tag{2)a}$$

其中，张量分量由下式确定：

$$g_{\alpha\beta}=e_\alpha\cdot e_\beta=\begin{cases}0, & 当\alpha\neq\beta\\ -1, & 当\alpha=\beta\neq 0\\ +1, & 当\alpha=\beta=0\end{cases} \tag{2)b}$$

因为$e_\alpha\cdot e_\beta\equiv e_\beta\cdot e_\alpha$，所以$g_0$是对称张量．可将（2）式写为

$$g_0=\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1\end{pmatrix} \tag{3}$$

在Minkowski空间的对偶空间[注1]选择如下的一组逆变基：

---

〔注1〕 关于对偶空间、对偶基，参见A.И.马力茨夫著《线性代数基础》第八章，人民教育出版社，1959年新2版；H. BACRY,《Lectures on Group Theory and Particle Theory》,Chapter 2,Gordon and Breach Science Publishers, 1977.

$$e^{\alpha},\quad \alpha = 0,1,2,3$$

$$e^{\alpha}\cdot e^{\alpha} = \begin{cases} -1, & \text{当}\alpha = j = 1,2,3 \\ +1, & \text{当}\alpha = 0 \end{cases} \tag{4}$$

这组基的三个空间基矢也是虚长基矢．逆变基与协变基的区别在于：前者按时空坐标所经受的Lorentz变换而变换，而后者则按Lorentz变换的逆步变换（即 Lorentz 变换的转置再取逆）而变换．令$b$代表某个Lorentz变换矩阵，则逆步变换矩阵便是$a=(b^{T})^{-1}$：

$$e'_{\alpha} = a_{\alpha}{}^{\lambda}e_{\lambda}，\text{（重复的上、下指标}\lambda\text{自0到3求和）} \tag{5a}$$

$$e'^{\beta} = b^{\beta}{}_{\tau}e^{\tau}．\text{（同上）} \tag{5b}$$

现在来看任意两个基矢$e_{\alpha}$和$e^{\beta}$的标量积$e_{\alpha}\cdot e^{\beta}$．这个标量积是一个Lorentz 不变量．即应有

$$e'_{\alpha}\cdot e'^{\beta} = e_{\alpha}\cdot e^{\beta} \tag{6}$$

按照（5）式：

$$e'_{\alpha}\cdot e'^{\beta} = a_{\alpha}{}^{\lambda}b^{\beta}{}_{\tau}(e_{\lambda}\cdot e^{\tau}), \tag{7}$$

考虑到Lorentz变换的行正交条件（下面将要证明这一条件）

$$a_{\alpha}{}^{\lambda}b^{\beta}{}_{\lambda} = \delta^{\beta}_{\alpha}, \tag{8}$$

便不难看出，（7）式成立的条件是

$$e'_{\alpha}\cdot e'^{\beta} = e_{\alpha}\cdot e^{\beta} = \delta^{\beta}_{\alpha}. \tag{9}$$

即逆变基与协变基相互正交．由于这样，逆变基与协变基互为对偶基．

与（2）式定义的协变度规张量对应，可通过逆变基来定义如下的逆变度规张量：

$$g^{0} = \{g^{\alpha\beta}\},\quad \alpha、\beta = 0,1,2,3 \tag{10a}$$

$$g^{\alpha\beta} = e^{\alpha}\cdot e^{\beta} = \begin{cases} 0, & \text{当}\alpha\neq\beta \\ -1, & \text{当}\alpha=\beta\neq 0 \\ +1, & \text{当}\alpha=\beta=0 \end{cases} \tag{10b}$$

由定义（2）和定义（10）显见，

$$g^{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} \tag{11}$$

但我们仍应注意区别$g^{0}$与$g_{0}$：前者的张量指标是逆变指标（上指标），而后者的张量指标则是协变指标（下指标）．

按照张量缩并法则，尚可构造如下的混合度规张量$g$，它的每一分量均具有一个上指标和一个下指标：

$$g = \left( g_\alpha^\beta \right) = \left( g_\alpha{}^\beta \right) = \left( g^\beta{}_\alpha \right), \tag{12a}$$

其中，

$$g_\alpha^\beta = g^{\beta\lambda} g_{\alpha\lambda} = g^{\lambda\beta} g_{\lambda\alpha}, \tag{12b}$$

$$g_\alpha{}^\beta = g^{\lambda\beta} g_{\alpha\lambda}, \tag{12c}$$

$$g^\beta{}_\alpha = g^{\beta\lambda} g_{\lambda\alpha}, \tag{12d}$$

如同（5）式那样，我们约定今后凡在同一乘积项里出现一对相同的上、下指标（Lorentz指标）便表示要从0到3求和。从（11）式、（2）$b$式和（10）$b$式不难看出：

$$g_\alpha^\beta = g_\alpha{}^\beta = g^\beta{}_\alpha = \delta_\alpha^\beta. \tag{13}$$

因此，混合度规张量是单位张量。

**四维矢量**：设矢量$A$是Minkowski空间M的任意矢量，而$B$是对偶空间$\overline{\mathrm{M}}$的任意矢量。一个线性矢量空间的基与矢量总是按照互为逆步的变换而变换，因此，$A$和$B$可分别用基$e_\alpha$（$\alpha = 0, 1, 2, 3$）和基$e^\beta$（$\beta = 0, 1, 2, 3$）线性表示如下：

$$A = e_\alpha A^\alpha, \tag{14}$$

$$B = e^\theta B_\theta. \tag{15}$$

以上二式表明：矢量$A \in \mathrm{M}$具有逆变分量$A^\alpha$，而矢量$B \in \overline{\mathrm{M}}$具有协变分量$B_\theta$。为了对逆变分量和协变分量下一个明确的定义，分别用$e^\beta$和$e_\tau$数乘（14）和（15）式两边，由此得到：

$$e^\beta \cdot A = e^\beta \cdot e_\alpha A^\alpha = \delta_\alpha^\beta A^\alpha = A^\beta, \tag{16}$$

和

$$e_\tau \cdot B = e_\tau \cdot e^\theta B_\theta = \delta_\tau^\theta B_\theta = B_\tau. \tag{17}$$

在以上二式的推算里曾使用了（9）式。（16）式表明，矢量$A \in \mathrm{M}$的逆变分量$A^\beta$（$\beta = 0, 1, 2, 3$）是相对于对偶空间$\overline{\mathrm{M}}$的逆变基而言的，它们是矢量$A$在逆变基上的投影；而矢量$B \in \overline{\mathrm{M}}$的协变分量$B_\tau$（$\tau = 0, 1, 2, 3$）则是相对于空间M的协变基$e_\tau$（$\tau = 0, 1, 2, 3$）而言的，它们是矢量$B$在协变基上的投影。自然还应提出如下的问题：矢量$A \in \mathrm{M}$是否还有协变分量？同样地，矢量$B \in \overline{\mathrm{M}}$是否还有逆变分量？回答是肯定的。由（14）式——（17）式容易推出以下二式：

$$g_{\beta\alpha} A^\alpha = e_\beta \cdot e_\alpha A^\alpha = e_\beta \cdot A = A_\beta, \tag{18}$$

$$g^{\tau\theta} B_\theta = e^\tau \cdot e^\theta B_\theta = e^\tau \cdot B = B^\tau. \tag{19}$$

由此可见，同一矢量（无论它属于空间M或$\overline{\mathrm{M}}$）相对于逆变基与协变基分别具有两组变换性质不同的分量，逆变分量与协变分量。这两组分量通过度规张量而相互联系：协变

度规张量$g_0$把逆变分量的指标降到下方，使之成为协变分量；逆变度规张量$g^0$把协变分量指标提到上方，使之成为逆变分量。因此，协变与逆变的度规张量对矢量指标有升降作用。

既然如此，无论$A\in M$或$B\in \overline{M}$均既可通过协变基来线性表示，也可通过逆变基来线性表示，即应有：

$$A=e_\alpha A^\alpha=e^\beta A_\beta, \tag{20}$$

$$B=e^\theta B_\theta=e_\tau B^\tau. \tag{21}$$

为了确信这一点，首先用$e^\alpha$乘（9）式两端，并对α自0到3求和：

$$e^\alpha e_\alpha\cdot e^\beta=\delta^\beta_\alpha e^\alpha=e^\beta,$$

此式成立的条件是：

$$e^\alpha e_\alpha=1, \tag{22}$$

同样可得

$$e_\beta e^\beta=1. \tag{23}$$

以上二式导致度规张量$g_0$和$g^0$对基矢量的指标也有升、降作用：

$$g_{\alpha\beta}e^\beta=e_\alpha\cdot e_\beta e^\beta=e_\alpha, \tag{24}$$

$$g^{\alpha\beta}e_\beta=e^\alpha\cdot e^\beta e_\beta=e^\alpha. \tag{25}$$

由（24）式和（18）式显然有

$$e_\alpha A^\alpha=g_{\alpha\beta}e^\beta A^\alpha=e^\beta g_{\alpha\beta}A^\alpha=e^\beta A_\beta,$$

又由（25）式和（19）式有

$$e^\theta B_\theta=g^{\theta\tau}e_\tau B_\theta=e_\tau g^{\theta\tau}B_\theta=e_\tau B^\tau.$$

这就证明了（20）式和（21）式。按照（18）式和（19）式，任一矢量$A$的协变分量和逆变分量具有一一对应的关系：

$$A_\beta=g_{\beta\alpha}A^\alpha=\begin{cases}A^\beta, & \text{当}\beta=0\\ -A^\beta, & \text{当}\beta=j=1,2,3\end{cases} \tag{26}$$

现在来看任意两个四维矢量$A$和$B$的标积：

$$A\cdot B=A^\alpha e_\alpha\cdot B_\theta e^\theta=\delta^\theta_\alpha A^\alpha B_\theta=A^\alpha B_\alpha, \tag{27)a$$

或者也可以是：

$$A\cdot B=A_\alpha e^\alpha\cdot B^\theta e_\theta=\delta^\alpha_\theta A_\alpha B^\theta=A_\alpha B^\alpha. \tag{27)b$$

将（18）、（19）、（27）三式结合就得到

$$A\cdot B=A^\alpha B_\alpha=A_\alpha B^\alpha=g^{\alpha\beta}A_\beta B_\alpha=g_{\alpha\beta}A^\beta B^\alpha. \tag{28}$$

按照（26）式又可把上式写为：

$$\begin{aligned}A\cdot B&=A^0B^0-A^1B^1-A^2B^2-A^3B^3\\&=A_0B_0-A_1B_1-A_2B_2-A_3B_3.\end{aligned} \tag{29}$$

如前所述，四维时空中每点的坐标$t$、$\mathbf{x}$与逆变基矢一样地变换，因此，$t$、$\mathbf{x}$是坐标矢量$x$的逆变分量：

$$x = x^1,\quad y = x^2,\quad z = x^3,\quad t = x^0, \tag{30)a}$$

而矢量$x$的协变分量由下式确定〔见（26）式〕：

$$x_1 = -x,\quad x_2 = -y,\quad x_3 = -z,\quad x_0 = t, \tag{30)b}$$

根据同样的理由，粒子的四维动量矢量$p$的逆变分量与协变分量分别是：

$$p^0 = E,\quad p^1 = p_x,\quad p^2 = p_y,\quad p^3 = p_z, \tag{31)a}$$

$$p_0 = E,\quad p_1 = -p_x,\quad p_2 = -p_y,\quad p_3 = -p_z, \tag{31)b}$$

由（29）、（30）、（31）诸式，立即得到：

$$x\cdot y = x_\alpha y^\alpha = x^\alpha y_\alpha = t_x t_y - \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}, \tag{32}$$

$$p\cdot q = p_\alpha q^\alpha = p^\alpha q_\alpha = E_p E_q - \mathbf{p}\cdot\mathbf{q}, \tag{33}$$

$$x\cdot p = x_\alpha p^\alpha = x^\alpha p_\alpha = tE - \mathbf{x}\cdot\mathbf{p}. \tag{34}$$

特别地：

$$x^2 = t^2 - |\mathbf{x}|^2, \tag{35}$$

$$p^2 = E^2 - |\mathbf{p}|^2 = m^2 \tag{36}$$

（36）式便是在B—D度规里的质壳关系式。

**量子力学算符**：四维动量算符$\hat{p}$的逆变分量为

$$\hat{p}^\mu = i\partial^\mu = i\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \begin{cases} i\dfrac{\partial}{\partial t}, & \text{当}\mu = 0 \\ -i\dfrac{\partial}{\partial x^j}, & \text{当}\mu = j = 1,2,3 \end{cases} \tag{37}$$

其中，$\dfrac{\partial}{\partial x^j}$是微分算符

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x^1},\ \frac{\partial}{\partial x^2},\ \frac{\partial}{\partial x^3}\right) \tag{38}$$

的分量．算符$\hat{p}$的协变分量是：

$$\hat{p}_\mu = i\partial_\mu = i\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \begin{cases} i\dfrac{\partial}{\partial t}, & \text{当}\mu = 0 \\ i\dfrac{\partial}{\partial x^j}, & \text{当}\mu = j = 1,2,3. \end{cases} \tag{39}$$

这里，$\dfrac{\partial}{\partial x^0} = \dfrac{\partial}{\partial x_0}$，$\dfrac{\partial}{\partial x^j} = -\dfrac{\partial}{\partial x_j}$〔参见（30）式〕．$\hat{p}^\mu$与$\hat{p}_\mu$同样由度规张量相互联系：

$$\hat{p}_\mu = g_{\mu\nu}\hat{p}^\nu \tag{40)a}$$

$$\hat{p}^\mu = g^{\mu\nu}\hat{p}_\nu \tag{40)b}$$

因此，

$$\hat{p}_0=\hat{p}^0, \quad \hat{p}_j=-\hat{p}^j. \tag{41}$$

逆变分量$\hat{p}^\mu(\mu=0,1,2,3)$对应的力学量分别是四维动量的分量$E$，$p_x, p_y, p_z$，而协变分量$\hat{p}_\mu$则与$E$，$-p_x, -p_y, -p_z$对应。

d'Alembert算符是微分算符$\partial=(\partial_0,\partial_1,\partial_2,\partial_3)$的模平方：

$$\Box=\partial\cdot\partial=\partial^\mu\partial_\mu=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2. \tag{42}$$

**γ矩阵**：形式地定义一个四维矢量$\gamma$，它的逆变分量是：

$$\gamma^\mu=\begin{cases}\gamma^0=\beta=\begin{pmatrix}I_2 & 0\\ 0 & -I_2\end{pmatrix} & (43)a\\ \gamma^j=\beta\alpha_j=\begin{pmatrix}0 & \sigma_j\\ -\sigma_j & 0\end{pmatrix}, \quad j=1,2,3 & (43)b\end{cases}$$

这里$\sigma_j(j=1,2,3)$是三个Pauli矩阵，$\alpha_j(j=1,2,3)$由(1.31)式定义。矢量$\gamma$的协变分量记为$\gamma_\mu$.$\gamma_\mu$与$\gamma^\mu$同样由度规张量联系起来：

$$\gamma^\mu=g^{\mu\nu}\gamma_\nu, \tag{44a}$$

$$\gamma_\mu=g_{\mu\nu}\gamma^\nu, \tag{44b}$$

因此，

$$\gamma^0=\gamma_0, \tag{45a}$$

$$\gamma^j=-\gamma_j. \tag{45b}$$

但矢量$\gamma$并不是Lorentz矢量，它的分量不按Lorentz群的矢量表示变换。

$\gamma$与任意一个四维矢量$A$的标积仍按(28)式和(29)式的方式定义：

$$\gamma\cdot A=\gamma^\mu A_\mu=\gamma_\mu A^\mu=\gamma^0A^0-\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{A}. \tag{46a}$$

其中，$\boldsymbol{\gamma}=(\gamma^1,\gamma^2,\gamma^3)$，$\mathbf{A}=(A^1,A^2,A^3)$。特别地：

$$\gamma\cdot p=\gamma^\mu p_\mu=\gamma_\mu p^\mu=\gamma^0p^0-\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p}. \tag{46b}$$

〔这里，$\mathbf{p}=(p^1,p^2,p^3)$即是粒子的空间动量〕

$$\gamma\cdot\partial=\gamma_\mu\partial^\mu=\gamma^\mu\partial_\mu$$

$$=\gamma^0\partial^0+\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla=\gamma^0\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla. \tag{46c}$$

由(43)式和(45)式可知，$\gamma^0$和$\gamma_0$是厄米矩阵，$\gamma^j$和$\gamma_j$是反厄米矩阵。

四个$\gamma^\mu$满足以下代数关系：

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=2g^{\mu\nu}. \tag{47}$$

利用(44)$a$式同样可得：

$$\{\gamma_\mu,\gamma_\nu\}=2g_{\mu\nu}. \tag{48}$$

因为

$$\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0, \tag{49a}$$

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \tag{49b}$$

故$\gamma^5$和$\gamma_5$由下式定义：

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma_5 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{bmatrix}. \tag{50}$$

据此定义显然有：

$$\gamma^{5+} = \gamma^5, \gamma_5^+ = \gamma_5. \tag{51}$$

这时，左旋和右旋的旋量分别为

$$\psi_L = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi, \quad \psi_R = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi.$$

**Lorentz变换**：当参考系转换时，任一四维矢量$A$的逆变分量和协变分量分别按以下二式变换：

$$A'^\mu = b^\mu{}_\nu A^\nu, \tag{52a}$$

$$A'_\mu = a_\mu{}^\nu A_\nu. \tag{52b}$$

因为

$$A' \cdot B' = A'_\mu B'^\mu = A \cdot B = A_\mu B^\mu,$$

故由（52）式可得

$$a_\mu{}^\nu A_\nu b^\mu{}_\alpha B^\alpha = A_\nu B^\nu,$$

由此导致Lorentz变换的列正交条件：

$$a_\mu{}^\nu b^\mu{}_\alpha = \delta_\alpha^\nu. \tag{53a}$$

上式右边对于交换指标$\alpha$、$\nu$是完全对称的，因此，左边也必定具有此种对称性。利用（12）式和（13）式，就可把列正交条件（53）$a$改写为

$$a_\mu{}^\alpha b^\mu{}_\nu = g^{\mu\alpha} g_{\mu\nu},$$

此式右边对交换$\mu$与$\alpha$，$\mu$与$\nu$具有对称性，因而左边也具有此种对称性。于是，就有如下的行正交条件：

$$a_\alpha{}^\mu b^\nu{}_\mu = \delta_\alpha^\nu. \tag{53b}$$

下面进一步讨论Lorentz变换矩阵$b$与其逆步变换矩阵$a$的关系。这种关系就是$b=(a^T)^{-1}$（已如前述），但我们现在要找出矩阵元之间的关系，借此进一步显示度规张量的作用。将（5）$a$式左边的$e'_\alpha$和右边的$e_\lambda$分别代换成$g_{\alpha\beta}e'^\beta$和$g_{\lambda\tau}e^\tau$：

$$g_{\alpha\beta}e'^{\beta}=a_{\alpha}{}^{\lambda}g_{\lambda\tau}e^{\tau},$$

再以$g^{\rho\alpha}$乘上式两边即得

$$e'^{\rho}=g^{\rho\alpha}g_{\lambda\tau}a_{\alpha}{}^{\lambda}e^{\tau}.$$

将此式与（5）$b$式比较就得到矩阵元之间的如下关系式：

$$b^{\rho}{}_{\tau}=g^{\rho\alpha}g_{\lambda\tau}a_{\alpha}{}^{\lambda}, \tag{54$a$}$$

由此可见，度规张量$g_0$和$g_0$联合作用，把Lorentz变换的逆步变换矩阵元$a_{\alpha}{}^{\lambda}$的上指标降到下方，并将其下指标提到上方，使之成为Lorentz变换的矩阵元$b^{\rho}{}_{\tau}$，换言之，度规张量对Lorentz变换的矩阵元指标有升降作用．到此为止，我们看到：度规张量$g_0$和$g^0$不但对所有矢量、张量指标都有升降作用，而且对矩阵元指标也有这种作用．据此可直接写出（54）$a$式的逆转换式：

$$a_{\alpha}{}^{\lambda}=g_{\alpha\beta}g^{\tau\lambda}b^{\beta}{}_{\tau}. \tag{54$b$}$$

从（54）式不难得到：

$$b^{i}{}_{0}=-a_{i}{}^{0},\quad b^{0}{}_{k}=-a_{0}{}^{k}, \tag{55$a$}$$

$$b^{0}{}_{0}=a_{0}{}^{0},\quad b^{i}{}_{k}=a_{i}{}^{k}. \tag{55$b$}$$

$$(i、k=1,2,3)$$

在B—D度规里，无穷小Lorentz变换的矩阵元是：

$$a_{\mu}{}^{\nu}=g_{\mu}{}^{\nu}+\omega_{\mu}{}^{\nu},\ \text{（变换矩阵 } a \text{ 的矩阵元）} \tag{56$a$}$$

$$b^{\mu}{}_{\nu}=g^{\mu}{}_{\nu}+\omega^{\mu}{}_{\nu},\ \text{（矩阵 } b \text{ 的矩阵元）} \tag{56$b$}$$

其中，$\omega_{\mu}{}^{\nu}$和$\omega^{\mu}{}_{\nu}$都是一阶无穷小量．把(56)式代入行正交条件(53)$b$，可得如下关系：

$$\omega_{\mu}{}^{\nu}+\omega^{\nu}{}_{\mu}=0. \tag{57$a$}$$

以$g^{\rho\mu}\equiv g^{\mu\rho}$乘上式即得

$$\omega^{\rho\nu}=-\omega^{\nu\rho}. \tag{57$b$}$$

（57）式显示了无穷小Lorentz变换的特征．

## （二）Pauli度规

本书采用的便是Pauli度规

**度规张量**：在Minkowski空间选择如下的一组标准正交基（协变基）：

$$\left.\begin{array}{l} e_{\mu},\quad \mu=1,2,3,4 \\ e_{\mu}\cdot e_{\nu}=\delta_{\mu\nu},\quad \mu、\nu=1,2,3,4 \end{array}\right\} \tag{58}$$

定义协变度规张量如下：

$$g_0=\{g_{\mu\nu}\},\tag{59a}$$

$$g_{\mu\nu}=e_\mu\cdot e_\nu=g_{\nu\mu},\tag{59b}$$

因此，$g_0$是单位张量：

$$g_0=\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1\end{pmatrix}\tag{59c}$$

同样可以定义如下的一组逆变基：

$$e^\mu,\quad \mu=1,2,3,4$$

然而，由于在现在的情况下，$g_{\mu\nu}\equiv\delta_{\mu\nu}$，故

$$e_\mu=g_{\mu\nu}e^\nu=e^\mu,\ \mu=1,2,3,4\tag{60}$$

换言之，在Pauli度规里，协变基与逆变基不再有任何差别，协变度规张量 $g_0$ 与逆变度规张量$g^0$也不再有差别。因此，矢量和张量的协变指标与逆变指标没有差别。我们可以把所有指标都写在下面（有时为了方便，把指标写在上面，也不代表逆变的意思），并把度规张量$g_0$和$g^0$统一记为$g$。

**四维矢量**：任意一个四维矢量

$$A=(A_1,A_2,A_3,A_4)\tag{61}$$

可用（58）式定义的基矢量来线性表示：

$$A=e_\mu A_\mu.\tag{62}$$

凡同一项里出现一对重复的Lorentz指标，便表示自1到4求和。从经典电动力学知道：

$$|\mathbf{x}|^2-t^2$$

是一个Lorentz标量。我们定义这个量为坐标矢量$x$的模平方：

$$x^2=|\mathbf{x}|^2-t^2,\tag{63}$$

则因

$$x^2=x\cdot x=e_\mu x_\mu\cdot e_\nu x_\nu=x_\mu x_\mu,\tag{64}$$

故可令$x$的分量为：

$$x_1=x,\quad x_2=y,\quad x_3=z,\quad x_4=it.\tag{65}$$

（65）式适用于任何一个Lorentz矢量$A$，即任一矢量$A$的空间分量为实数，而时间分量为纯虚数：

$$\left.\begin{array}{l}A_j\text{为实数，}(j=1,2,3)\\ A_4=iA_0,\quad A_0\text{为实数}\end{array}\right\}\tag{66}$$

因此，粒子的四维动量矢量为

$$\begin{aligned}p&=(p_1,p_2,p_3,ip_0)\\ &=(p_x,p_y,p_z,iE).\end{aligned}\tag{67}$$

任意两个四维矢量$A$和$B$的标积是

$$A\cdot B=A_\mu B_\mu=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}-A_0B_0 \tag{68}$$

特别地，

$$x\cdot y=\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}-t_x t_y, \tag{69a}$$

$$x\cdot p=\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}-tE, \tag{69b}$$

$$p\cdot q=\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}-E_pE_q, \tag{69c}$$

$$p^2=|\mathbf{p}|^2-E^2=-m^2. \tag{69d}$$

(69)$d$式便是Pauli度规里的质壳关系式。

**量子力学算符**：四维动量算符是

$$\widehat{p}=(\widehat{p}_1,\ \widehat{p}_2,\ \widehat{p}_3,\ \widehat{p}_4) \tag{70a}$$

其中，

$$\widehat{p}_\mu=-i\partial_\mu=-i\frac{\partial}{\partial x_\mu}=\begin{cases}-i\dfrac{\partial}{\partial x_j}, & \text{当}\mu=j=1,2,3\\ -\dfrac{\partial}{\partial t} & \text{当}\mu=4\end{cases} \tag{70b}$$

粒子的空间动量$\mathbf{p}$对应的算符是

$$\widehat{\mathbf{p}}=-i\nabla=-i\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ \frac{\partial}{\partial x_2},\ \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \tag{71}$$

d'Alembert算符是

$$\Box=\partial_\mu\partial_\mu=\nabla^2-\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{72}$$

**$\gamma$矩阵**（详见第一章）：形式地定义四维矢量$\gamma$

$$\gamma=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4), \tag{73a}$$

其中，

$$\gamma_j=-i\beta\alpha_j\quad(j=1,2,3), \tag{73b}$$

$$\gamma_4=\beta=\begin{pmatrix}I_2 & 0\\ 0 & -I_2\end{pmatrix}, \tag{73c}$$

$\gamma$与任一四维矢量$A$的标积是

$$\gamma\cdot A=\gamma_\mu A_\mu=\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{A}+\gamma_4A_4 \tag{74}$$

这里，$\boldsymbol{\gamma}=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$可形式地视为一个三维矢量，但它不受三维空间转动变换的作用。

与B—D度规的情形不同，(73)式定义的$\gamma_\mu$矩阵均是厄米矩阵。

$\gamma_5$矩阵的定义见（1.65）式。$\gamma_\mu$、$\gamma_5$所满足的代数关系即是（1.36）和（1.68）$c$。

**Lorentz变换** 任意一个四维矢量$A$（$\gamma$除外）的分量按下式变换：

$$A'_\mu=a_{\mu\nu}A_\nu. \tag{75}$$

这里，$a_{\mu\nu}$（$\mu$、$\nu=1,2,3,4$）是Lorentz变换的矩阵元。由于任一矢量的空间分量为实数，时间分量为纯虚数，故由（75）式容易看到：

$a_{ij}$为实数（$i$、$j=1,2,3$）

$a_{44}$为实数

$a_{4j}$和$a_{i4}$（$i$、$j=1,2,3$）均为纯虚数。

如果我们注意到在B—D度规里，坐标矢量的分量均为实数（任一四矢的分量也均是实数），就可看到，在B—D度规里的变换矩阵元$a_\alpha{}^\beta$和$b^\lambda{}_\tau$全都是实数。

根据四维矢量之标积是Lorentz不变量的事实，容易得到Lorentz变换的列正交条件：

$$a_{\mu\nu}a_{\mu\alpha}=\delta_{\nu\alpha}, \tag{76}$$

将上式做如下的变化：

$$a_{\mu\nu}a_{\mu\alpha}=\delta_{\nu\alpha}\equiv(a^{-1})_{\nu\mu}a_{\mu\alpha},$$

由此立即得到

$$a_{\mu\nu}=(a^{-1})_{\nu\mu}=(a^{-1})^T_{\mu\nu},$$

即Lorentz变换与其逆步变换没有区别：

$$(a^{-1})^T\equiv(a^T)^{-1}=a. \tag{77}$$

以 $a^{-1}_{\alpha\mu}$乘（75）式两端得

$$A_\alpha=a^{-1}_{\alpha\mu}A'_\mu=a^T_{\alpha\mu}A'_\mu=\alpha_{\mu\alpha}A'_\mu,$$

考虑到$A\cdot A=A_\mu A_\mu=A'\cdot A'=A'_\nu A'_\nu$，即可利用上式导出Lorentz变换的行正交条件：

$$a_{\nu\mu}a_{\alpha\mu}=\delta_{\nu\alpha}. \tag{78}$$

无穷小Lorentz变换矩阵元是

$$a_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}+\omega_{\mu\nu},$$

其中，$\omega_{\mu\nu}$为一阶无穷小量，并满足反对称关系式（1.15）$b$。

### （三）B—D度规与P度规之间的过渡关系

为了明确起见，对于B—D度规里的$\gamma$矩阵与Lorentz协变量暂时在上方加一记号“$\sim$”，例如：

$$\widetilde{\psi},\ \widetilde{\gamma},\ \widetilde{\partial}_\mu,\ \widetilde{x}_\mu,\ \widetilde{x}^\mu,\cdots\cdots$$

而对于P度规里的相应量不加任何标记。

**基本关系**：由（30）式和（65）式可得时空坐标之间的关系：

$$\left.\begin{aligned}&\widetilde{x}^j=x_j,\ j=1,2,3\\&\widetilde{x}^0=t=-ix_4,\end{aligned}\right\} \tag{79}$$

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{x}_j = -x_j, \quad j=1,2,3 \\ \tilde{x}_0 = t = -ix_4.\end{array}\right\} \tag{80}$$

由（31）式和（67）式得到四维动量分量之间的关系：

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{p}^j = p_j, \quad j=1,2,3 \\ \tilde{p}^0 = E = -ip_4,\end{array}\right\} \tag{81}$$

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{p}_j = -p_j, \quad j=1,2,3 \\ \tilde{p}_0 = E = -ip_4.\end{array}\right\} \tag{82}$$

由两种度规里的质壳关系（36）和（69）$d$，又有：

$$\tilde{p}^2 = -p^2 = m^2. \tag{83}$$

顺便指出，在两种度规里类时矢量与类空矢量的定义在形式上恰相反：

| 在B—D度规 | 在P度规 |
|---|---|
| $\tilde{A}^2 > 0$，类时矢量， | $A^2 > 0$，类空矢量， |
| $\tilde{A}^2 < 0$，类空矢量， | $A^2 < 0$，类时矢量， |

由（37）式，（70）式和（79）、（80）两式，有：

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{\hat{p}}^0 = -i\hat{p}_4, \\ \tilde{\hat{p}}^j = \hat{p}_j, \quad j=1,2,3\end{array}\right\} \tag{84}$$

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{\partial}^j = -\tilde{\partial}_j = -\partial_j, \quad j=1,2,3 \\ \tilde{\partial}^0 = \tilde{\partial}_0 = i\partial_4.\end{array}\right\} \tag{85}$$

$$\tilde{\nabla} = \nabla. \tag{86}$$

由（42）式和（72）式以及（86）式有

$$\tilde{\Box} = -\Box. \tag{87}$$

由（43）式、（45）式和（73）式得到 $\gamma$ 矩阵的如下关系：

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{\gamma}^0 = \tilde{\gamma}_0 = \gamma_4, \\ \tilde{\gamma}^j = -\tilde{\gamma}_j = i\gamma_j, \quad j=1,2,3\end{array}\right\} \tag{88}$$

由（50）式和（1.65）式又得到

$$\tilde{\gamma}^5 = \tilde{\gamma}_5 = -\gamma_5. \tag{89}$$

**平面波展式**：现在来看在两种度规里场算符的平面波展开式。在平面波展式中，正、负频率部分的时空相因子分别是：

$$\text{在P度规里}\begin{cases}\text{正频率部分的相因子为}e^{ik\cdot x}\\ \text{负频率部分的相因子为}e^{-ik\cdot x}\end{cases}$$

在B—D度规里 $\begin{cases} \text{正频率部分的相因子为} e^{-i\tilde{k}\cdot\tilde{x}} \\ \text{负频率部分的相因子为} e^{i\tilde{k}\cdot\tilde{x}} \end{cases}$

产生这种差异的原因是：① $\widetilde{k}\cdot\widetilde{x}=-k\cdot x$；②追溯到量子力学，能量算符 $i\frac{\partial}{\partial t}$ 作用于正、负能的本征态矢量应分别得到本征值 $\pm E$。

两种度规里，场算符的平面波展式如下：

P度规：

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}(a_k e^{ik\cdot x}+a_k^+ e^{-ik\cdot x}),\qquad \text{即 (5.6)}$$

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}(a_k e^{ik\cdot x}+b_k^+ e^{-ik\cdot x}),\qquad \text{即 (5.43)}a$$

$$\phi^+(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}(b_k e^{ik\cdot x}+a_k^+ e^{-ik\cdot x}),\qquad \text{即 (5.43)}b$$

$$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k,s}\sqrt{\frac{m}{E_k}}(c_{ks}u_{ks}e^{ik\cdot x}+d_{ks}^+ v_{ks}e^{-ik\cdot x}),\qquad \text{即 (6.6)}a$$

$$\overline{\psi}(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k,s}\sqrt{\frac{m}{E_k}}(c_{ks}^+ \overline{u}_{ks}e^{-ik\cdot x}+d_{ks}\overline{v}_{ks}e^{ik\cdot x}),\qquad \text{即 (6.6)}b$$

$$A_\mu(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k,\lambda}\frac{1}{\sqrt{2|k|}}e_{k\lambda}^{\mu}\,(a_{k\lambda}e^{ik\cdot x}+\overline{a}_{k\lambda}e^{-ik\cdot x}).\qquad \text{即 (7.6)}a$$

B—D度规：

只要把以上诸式中的γ矩阵和各类Lorentz协变量按照基本过渡关系（79）—（89）换算成B—D度规里的相应量，便得到B—D度规里的平面波展式〔在一归化因子里和旋量振幅 $u_{ks}$、$v_{ks}$ 里不含有上面这些需要换算的量，因而归一化因子和旋量振幅保持不变．由于 $\gamma^0=\gamma_0=\gamma_4$，故 $\widetilde{\overline{\psi}}(\widetilde{x})$ 与 $\overline{\psi}(x)$ 具有相同的定义〕：

$$\widetilde{\phi}(\widetilde{x})=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}(a_k e^{-i\tilde{k}\cdot\tilde{x}}+a_k^+ e^{i\tilde{k}\cdot\tilde{x}}).\qquad (90)$$

$$\widetilde{\phi}(\widetilde{x})=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}(a_k e^{-i\tilde{k}\cdot\tilde{x}}+b_k^+ e^{i\tilde{k}\cdot\tilde{x}}).\qquad (91)a$$

$$\widetilde{\phi}^+(\widetilde{x})=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}(b_k e^{-i\tilde{k}\cdot\tilde{x}}+a_k^+ e^{i\tilde{k}\cdot\tilde{x}}),\qquad (91)b$$

$$\widetilde{\psi}(\widetilde{x})=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k,s}\sqrt{\frac{m}{E_k}}(c_{ks}u_{ks}e^{-i\tilde{k}\cdot\tilde{x}}+d_{ks}^+ v_{ks}e^{i\tilde{k}\cdot\tilde{x}}),\qquad (92)a$$

$$\widetilde{\overline{\psi}}(\widetilde{x})=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k,s}\sqrt{\frac{m}{E_k}}(c^+_{ks}\overline{u}_{ks}e^{i\widetilde{k}\cdot\widetilde{x}}+d_{ks}\overline{v}_{ks}e^{-i\widetilde{k}\cdot\widetilde{x}}), \tag{92b}$$

$$\widetilde{A}^{\alpha}(\widetilde{x})=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k,\widetilde{\lambda}=0}^{3}\frac{1}{\sqrt{2|k|}}e^{\alpha}_{k\widetilde{\lambda}}\ (a_{k\widetilde{\lambda}}e^{-i\widetilde{k}\cdot\widetilde{x}}+a^+_{k\widetilde{\lambda}}e^{i\widetilde{k}\cdot\widetilde{x}}). \tag{93}$$

在 (93) 式里，$\alpha=0,1,2,3$，$\widetilde{\lambda}=0,1,2,3$．由于现在四个$\widetilde{A}^{\alpha}(\widetilde{x})$都是厄米算符，因而应以$a^+_{k\widetilde{\lambda}}$代替 (7.6)$a$式中的$\overline{a}_{k\lambda}$，并应将四个极化矢量$e_{k\widetilde{\lambda}}$均取为实矢量．为了使场算符定义空间具有不定度规，极化矢量应满足如下的正交条件：

$$e_{k\widetilde{\lambda}}\cdot e_{k\widetilde{\lambda}'}=(e_{k\widetilde{\lambda}})^{\mu}(e_{k\widetilde{\lambda}'})_{\mu}=g_{\widetilde{\lambda}\widetilde{\lambda}'}. \tag{94}$$

**理论的基本方程和对易关系**：首先来看场方程式．

P度规：

$(\Box-m^2)\phi(x)=0$；　　即 (1.8)

$(\gamma_{\mu}\partial_{\mu}+m)\psi(x)=0$；　　即 (1.34)

$\Box A_{\mu}=0$．　　即 (1.250)

B—D度规：

按照前面关于平面波展式的讨论，对方程的解只需作如下代换：

$$\phi(x)\longrightarrow\widetilde{\phi}(\widetilde{x}),$$

$$\psi(x)\longrightarrow\widetilde{\psi}(\widetilde{x}),$$

$$A_{\mu}(x)\,(\mu=1,2,3,4)\longrightarrow\widetilde{A}^{\alpha}(\widetilde{x})\,(\alpha=0,1,2,3).$$

因此，按照$\widetilde{\Box}=-\Box$可将 (1.8)式转换为下式：

$$(\widetilde{\Box}+m^2)\widetilde{\phi}(\widetilde{x})=0, \tag{95}$$

由于$\gamma_{\mu}\partial_{\mu}=\gamma_j\partial_j+\gamma_4\partial_4=(-i\widetilde{\gamma}^j)(\widetilde{\partial}_j)+\gamma^0(-i\partial_0)=-i\widetilde{\gamma}^{\mu}\widetilde{\partial}_{\mu}$，故(1.34) 式转换为下式：

（等号处注：(88)式和(85)式）

$$(i\widetilde{\gamma}^{\mu}\widetilde{\partial}_{\mu}-m)\widetilde{\psi}(\widetilde{x})=0, \text{（重复指标}\mu\text{自 0 到 3 求和）} \tag{96}$$

(1.250)式仍具有和P度规里相同的形式：

$$\widetilde{\Box}\widetilde{A}^{\alpha}(\widetilde{x})=0,\quad(\alpha=0\ 1,2,3) \tag{97}$$

将 (1.143)$a$与 (1.144)$a$左边的算符$\gamma\cdot k$进行如下的换算：

$$\gamma\cdot k=\gamma_jk_j+\gamma_4k_4=(-i\widetilde{\gamma}^j)(-\widetilde{k}_j)+\widetilde{\gamma}^0(i\widetilde{k}_0)$$

$$=i\widetilde{\gamma}^{\mu}\widetilde{k}_{\mu}.$$

就分别得到与上述二式相应的旋量振幅方程式：

$$(\widetilde{\gamma^\mu}\widetilde{k_\mu}-m)u_{ks}=0\,, \tag{98}$$

$$(\widetilde{\gamma^\mu}\widetilde{k_\mu}+m)v_{ks}=0\,. \tag{99}$$

在这里和（92）式里，B—D度规里的旋量振幅仍采用P度规里的记号，以后也仍这样做。

其次来看对易关系：

P度规：

$$[\phi(\mathbf{x},t),\ \pi(\mathbf{y},t)]=i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \qquad \text{即}(5.29)a$$

$$[\phi^+(\mathbf{x},t),\ \pi^+(\mathbf{y},t)]=i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \qquad \text{即}(5.29)b$$

$$\{\psi(\mathbf{x},t),\ \psi^+(\mathbf{y},t)\}=\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \qquad \text{即}(6.1)a$$

$$[A_\mu(\mathbf{x},t),\ \pi_\nu(\mathbf{y},t)]=i\delta_{\mu\nu}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \qquad \text{即}(7.2)a$$

B－D度规：

前面三式只须改变场算符的记号即可：

$$[\widetilde{\phi})x,t),\ \widetilde{\pi}(\mathbf{y},t)]=i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{100}$$

$$[\widetilde{\phi^+}(\mathbf{x},t),\widetilde{\pi^+}(\mathbf{y},t)]=i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \tag{101}$$

$$\{\widetilde{\psi}(\mathbf{x},t),\ \widetilde{\psi^+}(\mathbf{y},t)\}=\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \tag{102}$$

但P度规里的电磁场对易关系需做如下转换手续：首先把它写成时间分量与空间分量分开的形式：

$$[A_j(\mathbf{x},t),\ \pi_l(\mathbf{y},t)]=i\delta_{jl}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \qquad (j,l=1,2,3)$$

$$[iA_0(\mathbf{x},t),\ i\pi_0(\mathbf{y},t)]=i\delta_{00}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \quad (\delta_{44}\equiv\delta_{00})$$

这里，$\pi_0=\dot{A}_0$.(79)式到（82）式的过渡关系对任意一个四维矢量均适用。故可把上式左边的算符用B—D度规里的相应算符来代换：

$$[\widetilde{A_j}(\mathbf{x},t),\widetilde{\pi_l}(\mathbf{y},t)]=-ig_{jl}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),$$

$$[\widetilde{A_0}(\mathbf{x},t),\widetilde{\pi_0}(\mathbf{y},t)]=-ig_{00}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),$$

因此，（7.2）$a$式在B—D度规里成为下式：

$$[\widetilde{A_\mu}(\mathbf{x},t),\widetilde{\pi_\nu}(\mathbf{y},t)]=+ig_{\mu\nu}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \tag{103}$$

其余的等时对易和反对易关系也可用类似的方法来过渡。

因为（100）、（101）、（102）三式分别与（5.29）$a$、（5.29）$b$、（6.1）$a$具有相同形式，平面波展式（9.1）、（9.2）分别与（5.43）、（6.6）具有相同形式，而且在B—D度规里旋量振幅满足和（1.179）—（1.182）一样的正交归一条件，故在动量空间，（100）、（101）、（102）三式将分别与（5.47）式、（6.8）式具有相同形式。采用类似于推导（7.9）式的方法，从平面波展式（93）里解出$a_{k\tilde{\lambda}}$和$a^+_{k\tilde{\lambda}}$：

$$a_{k\tilde{\lambda}}=ig_{\tilde{\lambda}\tilde{\lambda}'}\int d^3\tilde{x}\,(f^*_{k\tilde{\lambda}})_\alpha\overleftrightarrow{\partial_t}\widetilde{A^\alpha}(\tilde{x}) \tag{104a}$$

$$a^+_{k\tilde{\lambda}}=ig_{\tilde{\lambda}\tilde{\lambda}'}\int d^3\tilde{x}\widetilde{A^\alpha}(\tilde{x})\overleftrightarrow{\partial_t}(f_{k\tilde{\lambda}})_\alpha, \tag{104b}$$

其中，算符$\overleftrightarrow{\partial_t}$由（5.11）式定义，而$(f_{k\tilde{\lambda}})_\alpha$和$(f^*_{k\tilde{\lambda}})_\alpha$分别由下面两式确定：

$$(f_{k\tilde{\lambda}})_\alpha=\frac{1}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}}(e_{k\tilde{\lambda}})_\alpha e^{-i\tilde{k}\cdot\tilde{x}},$$

$$(f^*_{k\tilde{\lambda}})_\alpha=\frac{1}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}}(e_{k\tilde{\lambda}})_\alpha e^{i\tilde{k}\cdot\tilde{x}}.$$

利用对易关系（103）、积分公式（1.184）、正交条件（94），并注意：

$$e_{k\tilde{\lambda}}\cdot e_{-k\tilde{\lambda}'}=-g_{\tilde{\lambda}\tilde{\lambda}'}, \qquad g^{\alpha\beta}(e_{k\tilde{\lambda}})_\beta=(e_{k\tilde{\lambda}})^\alpha, \tag{105}$$

就可把（103）式转到动量空间：

$$[a_{k\tilde{\lambda}},a^+_{k'\tilde{\lambda}'}]=-g_{\tilde{\lambda}\tilde{\lambda}'}\delta_{kk'}.\ (\tilde{\lambda},\tilde{\lambda}'=0,1,2,3) \tag{106}$$

由于四个$\widetilde{A^\alpha}(\tilde{x})$都是厄米算符，所以$a^+_{k0}$、$a_{k0}$分别就是时间光子的产生、湮灭算符，这样，从展式（93）和对易关系（106）出发，就可以重复第七章里关于引入不定度规来进行量子化的全部讨论。

读者可用类似的方法从P度规里的不等时对易和反对易关系过渡到B—D度规里的相应关系。

**传播函数：**

P度规：

标量场传播函数是

$$\Delta_F(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\Delta_F(k)e^{ik\cdot x}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\frac{-i}{k^2+m^2-i\varepsilon}e^{ik\cdot x} \qquad \text{即（5.175）}$$

$\Delta_F(x)$满足如下方程式：

$$(\square + m^2)\Delta_F(x) = i\delta^{(4)}(x); \qquad \text{即 (5.164)}$$

旋量场传播函数是

$$S_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k S_F(k) e^{ik\cdot x}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{-1}{\gamma\cdot k - im - i\varepsilon} e^{ik\cdot x} \qquad \text{即 (6.94)}$$

$S_F(x)$满足如下方程式：

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + m) S_F(x) = -i\delta^{(4)}(x); \qquad (107)$$

电磁场传播函数是

$$D_{F\mu\nu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k D_{F\mu\nu}(k) e^{ik\cdot x}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{-i\delta_{\mu\nu}}{k^2 - i\varepsilon} e^{ik\cdot x}, \quad (\mu,\nu = 1,2,3,4) \qquad \text{即 (7.97)}$$

$D_{F\mu\nu}(x)$满足如下方程式：

$$\square D_{F\mu\nu}(x) = \delta_{\mu\nu}\delta^{(4)}(x). \qquad (108)$$

B—D度规：

由于在两种度规里场方程的形式不同，因而传播函数所满足的方程式也存在形式上的差异．根据B—D度规里传播函数所满足的方程式，就可以把P度规里的传播函数表示式过渡到B—D度规里去．

标量场传播函数，记为$\widetilde{\Delta}_F(\widetilde{x})$，它所满足的方程是[注1]

$$(\widetilde{\square} + m^2)\widetilde{\Delta}_F(\widetilde{x}) = -\delta^{(4)}(\widetilde{x}). \qquad (109)$$

现在把（5.164）式中的$\square$代换成$-\widetilde{\square}$，由此得到下式：

$$(\widetilde{\square} + m^2)\left[-\Delta_F(x)\right] = i\delta^{(4)}(x),$$

上式两边乘以$i$：

$$(\widetilde{\square} + m^2)\left[-i\Delta_F(x)\right] = -\delta^{(4)}(x), \qquad (110)$$

因为$\delta^{(4)}(x) \equiv \delta^{(4)}(\widetilde{x})$，所以（110）式就是（109）式，我们应有：

---

〔注1〕参见CLAUDE ITZYKSON, JEAN-BERNARD ZUBER. 《Quantum Field Thory》 McGraw-Hill 1980. 以下关于旋量场、电磁场的传播函数方程均可由此书或J. D. Bjorken, S. D. Drell, 《Relativistic Quantum Fields》, McGraw-Hill 1965., 的有关章节找到。

$$\widetilde{\Delta_F}(\widetilde{x}) = -i\Delta_F(x). \tag{111}$$

即

$$\widetilde{\Delta_F}(\widetilde{x}) = -i\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\frac{-i}{k^2+m^2-i\varepsilon}e^{ik\cdot x}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\frac{-1}{k^2+m^2-i\varepsilon}e^{ik\cdot x},$$

注意到$d^4k = d^3kdk_0 \equiv d^4\widetilde{k}$，$k^2 = -\widetilde{k}^2$，$ik\cdot x = -i\widetilde{k}\cdot\widetilde{x}$，就得到B—D度规里传播函数$\widetilde{\Delta_F}(\widetilde{x})$的四维积分表示式：

$$\widetilde{\Delta_F}(\widetilde{x}) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4\widetilde{k}\frac{1}{\widetilde{k}^2-m^2+i\varepsilon}e^{-i\widetilde{k}\cdot\widetilde{x}}, \tag{112a}$$

在动量空间有

$$\widetilde{\Delta_F}(\widetilde{k}) = \frac{1}{\widetilde{k}^2-m^2+i\varepsilon}. \tag{112b}$$

旋量场传播函数：记为$\widetilde{S_F}(\widetilde{x})$，它满足如下方程式：

$$(i\widetilde{\gamma}^\mu\widetilde{\partial}_\mu - m)\widetilde{S_F}(\widetilde{x}) = \delta^{(4)}(\widetilde{x}).\quad (\mu\text{自 0 到 3 求和}) \tag{113}$$

现在把（107）式中的$\gamma_\mu\partial_\mu$（$\mu$自 1 到 4 求和）代换成$-\widetilde{\gamma}^\mu\widetilde{\partial}_\mu$（$\mu$自 0 到 3 求和），并将所得式两边同乘以$-i$，就得到

$$(i\widetilde{\gamma}^\mu\widetilde{\partial}_\mu - m)\left[-iS_F(x)\right] = \delta^{(4)}(x) \equiv \delta^{(4)}(\widetilde{x}). \tag{114}$$

以上两式比较即得

$$\widetilde{S_F}(\widetilde{x}) = -iS_F(x) = -i\left[-(\gamma_\mu\partial_\mu - m)\Delta_F(x)\right]$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\frac{(i\gamma_\mu k_\mu - m)}{k^2+m^2-i\varepsilon}e^{ik\cdot x}$$

注意求和指标的变化 ↘

$$=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4\widetilde{k}\frac{\widetilde{\gamma}^\mu\widetilde{k}_\mu + m}{\widetilde{k}^2-m^2+i\varepsilon}e^{-i\widetilde{k}\cdot\widetilde{x}}$$

ε是一阶小量 ↘

$$=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4\widetilde{k}\frac{1}{\widetilde{\gamma}^\mu\widetilde{k}_\mu - m + i\varepsilon}e^{-i\widetilde{k}\cdot\widetilde{x}}, \tag{115a}$$

这就是B—D度量里$\widetilde{S_F}(\widetilde{x})$的四维积分表示式，它在动量空间的表示式为

$$\widetilde{S}_F(\widetilde{k}) = \frac{1}{\widetilde{\gamma}^{\mu}\widetilde{k}_{\mu} - m + i\varepsilon} \qquad (\mu\text{自 0 到 3 求和}) \tag{115)b}$$

电磁场传播函数：记为$\widetilde{D}_{F\mu\nu}(\widetilde{x})$（$\mu$、$\nu = 0, 1, 2, 3$），它所满足的方程式为

$$\widetilde{\square}\widetilde{D}_{F\mu\nu}(\widetilde{x}) = g_{\mu\nu}\delta^{(4)}(\widetilde{x}), \quad (\mu、\nu = 0, 1, 2, 3) \tag{116}$$

把（108）式分成以下两式：

$$\square D_{Fjl}(x) = i\delta_{jl}\delta^{(4)}(x), \quad (j、l = 1, 2, 3) \tag{117)a}$$

$$\square D_{F44}(x) = i\delta_{44}\delta^{(4)}(x), \tag{117)b}$$

考虑到 $\langle 0|TA_4(x)A_4(x)|0\rangle = -\langle 0|TA_0(x)A_0(x)|0\rangle$，则（117)$b$式可形式地写为：

$$\square D_{F00}(x) = -i\delta_{00}\delta^{(4)}(x). \tag{118}$$

把（117)$a$与（118）综合为下式：

$$\square D_{F\mu\nu}(x) = -ig_{\mu\nu}\delta^{(4)}(x), \quad (\mu、\nu = 0, 1, 2, 3) \tag{119}$$

再把上式的$\square$代换成$-\widetilde{\square}$，并以$i$同乘其两边得：

$$\widetilde{\square}\left[-iD_{F\mu\nu}(x)\right] = g_{\mu\nu}\delta^{(4)}(x). \quad (\mu、\nu = 0, 1, 2, 3) \tag{120}$$

（120）式与（116）比较得：

$$\widetilde{D}_{F\mu\nu}(\widetilde{x}) = -iD_{F\mu\nu}(x), \quad (\mu、\nu = 0, 1, 2, 3) \tag{121}$$

上式右边的$D_{F\mu\nu}(x)$是（119）式的解．将（119）式与（108）类比，即可类比于(7.97)式写出（119）式的解：

$$D_{F\mu\nu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{ig_{\mu\nu}}{k^2 - i\varepsilon} e^{ik\cdot x}, \quad (\mu、\nu = 0, 1, 2, 3) \tag{122}$$

把（122）代入（121），并把$k^2$换成$-\widetilde{k}^2$，$d^4k$换成$d^4\widetilde{k}$，$ik\cdot x$换成$-i\widetilde{k}\cdot\widetilde{x}$，就得到在B—D度规里电磁场传播函数的四维积分表示式：

$$\widetilde{D}_{F\mu\nu}(\widetilde{x}) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4\widetilde{k} \frac{-g_{\mu\nu}}{\widetilde{k}^2 + i\varepsilon} e^{-i\widetilde{k}\cdot\widetilde{x}}, \tag{123)a}$$

$\widetilde{D}_{F\mu\nu}(\widetilde{x})$的动量空间表示式就是上式右边的付利叶分量：

$$\widetilde{D}_{F\mu\nu}(\widetilde{k}) = \frac{-g_{\mu\nu}}{\widetilde{k}^2 + i\varepsilon}. \quad (\mu、\nu = 0, 1, 2, 3) \tag{123)b}$$

利用基本过渡关系（79）—（89），同样可以把相互作用场系统的$\mathscr{L}_I$从一种度规的表示转换成另一种度规的表示．例如（8.8）式的$\mathscr{L}_I$可以转换如下：

$$\mathscr{L}_I = ie\overline{\psi}\gamma_{\mu}\psi A_{\mu} = ie\overline{\psi}\gamma_j\psi A_j + ie\overline{\psi}\gamma_4\psi A_4$$

$$= ie\overline{\psi}(-i\widetilde{\gamma}^j)\psi(-\widetilde{A}_j) + ie\overline{\psi}\widetilde{\gamma}^0\psi(i\widetilde{A}_0),$$

上式里的重复指标 $j$ 均表示自 1 到 3 求和。只要把 $\psi(x)$ 和 $\overline{\psi}(x)$ 直接代换成 $\widetilde{\psi}(\widetilde{x})$ 和 $\widetilde{\overline{\psi}}(\widetilde{x})$，就得到B—D度规里的相互作用：

$$\widetilde{\mathscr{L}}_I(\widetilde{x}) = -e\widetilde{\overline{\psi}}(\widetilde{x})\widetilde{\gamma}^{\mu}\widetilde{\psi}(\widetilde{x})\widetilde{A}_{\mu}, \quad (\mu \text{自 0 到 3 求和})$$

在 B—D 度规里有了平面波展式，传播函数表示式以及相互作用，就可以用类似第九章的方法求解相互作用场方程，并归纳出相应的Feynman规则。

**γ 矩阵的基本运算：**

附录一里的公式（还有第一章给出的几个公式）可以借助于本附录给出的基本关系式将其全部转到B—D度规里去。例如，对附录一（9）$a$式：

$$\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\mu = -2\gamma_\alpha, \quad (\mu \text{自 1 到 4 求和}, \ \alpha = 1, 2, 3, 4)$$

可转换如下：

$$\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\mu = \gamma_j\gamma_\alpha\gamma_j + \gamma_4\gamma_\alpha\gamma_4 \quad (j \text{ 自 1 到 3 求和，下同})$$

由（88）式可将上式写为：

$$\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\mu = \widetilde{\gamma}^0\gamma_\alpha\widetilde{\gamma}_0 + (-i\widetilde{\gamma}^j)\gamma_\alpha(i\widetilde{\gamma}_j) = \widetilde{\gamma}^\lambda\gamma_\alpha\widetilde{\gamma}_\lambda \tag{124}$$

其中，$\alpha = 1, 2, 3, 4$，$\mu$ 自 1 到 4 求和，$\lambda$ 自 0 到 3 求和。上式右边又可重写如下：

$$\widetilde{\gamma}^\lambda\gamma_\alpha\widetilde{\gamma}_\lambda = \begin{cases} \widetilde{\gamma}^\lambda\gamma_j\widetilde{\gamma}_\lambda = -i\widetilde{\gamma}^\lambda\widetilde{\gamma}^j\widetilde{\gamma}_\lambda, & \text{当 } \alpha = j = 1, 2, 3 \\ \widetilde{\gamma}^\lambda\widetilde{\gamma}^0\widetilde{\gamma}_\lambda, & \text{当 } \alpha = 4, \end{cases} \tag{125}$$

将（124）、（125）与附录一（9）$a$式结合，并把（9）$a$式右边的 $\gamma_\alpha$ 换算成 $\widetilde{\gamma}^\sigma$（$\sigma = 0, 1, 2, 3,$），就得到B—D度规里与（9）$a$对应的公式：

$$\widetilde{\gamma}^\lambda\widetilde{\gamma}^\sigma\widetilde{\gamma}_\lambda = -2\widetilde{\gamma}^\sigma \quad (\lambda \text{自 0 到 3 求和}, \ \sigma = 0, 1, 2, 3) \tag{126}$$

类似地有：

| P度规 | | B—D度规 |
|---|---|---|
| $\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu = 4\delta_{\alpha\beta}$（$\mu$ 自 1 到 4 求和，$\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$） | ⟶ | $\widetilde{\gamma}^\lambda\widetilde{\gamma}^{\alpha'}\widetilde{\gamma}^{\beta'}\widetilde{\gamma}_\lambda = 4g^{\alpha'\beta'}$（$\lambda$ 自 0 到 3 求和，$\alpha', \beta' = 0, 1, 2, 3$） |
| $\gamma_\mu\gamma_\mu = 4$（$\mu$ 自 1 到 4 求和） | ⟶ | $\widetilde{\gamma}^\lambda\widetilde{\gamma}_\lambda = 4$（$\lambda$ 自 0 到 3 求和） |
| $\mathrm{Tr}\gamma_\mu = 0$（$\mu = 1, 2, 3, 4$） | ⟶ | $\mathrm{Tr}\widetilde{\gamma}^\lambda = \mathrm{Tr}\widetilde{\gamma}_\lambda = 0$（$\lambda = 0, 1, 2, 3$） |

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Tr}\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}=4\delta_{\mu\nu} \\ (\mu、\nu=1,2,3,4) \end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathrm{Tr}\tilde{\gamma}^{\alpha}\tilde{\gamma}^{\beta}=\mathrm{Tr}\tilde{\gamma}_{\alpha}\tilde{\gamma}_{\beta}=4g^{\alpha\beta}=4g_{\alpha\beta} \\ (\alpha、\beta=0\ 1,2,3,) \end{array}\right\}$$

其余公式可依此类推。

以上讨论了从P度规到B—D度规的过渡。利用基本关系式（79)—(89)，也可以反过来实现从B—D度规到P度规的过渡。这样，就可以把两种不同度规的运算联系起来，可以顺利地把一种运算转换为另一种运算。这对阅读不同的参考书刊是十分必要的。

# 附录四　正规化积分计算公式

本附录给出计算正规化积分的有用公式，其中重要的公式给出详细证明。为了方便读者，对于积分表上可以查到的某些公式也在此列出。

## （一）Feynman参数法的计算公式

若Feynman积分的被积式分母是两个或多个因子的乘积，可用如下诸公式合并分母：

$$\frac{1}{AB}=\int_0^1 dx\frac{1}{[Ax+B(1-x)]^2} \tag{1}$$

其中，$x$称为Feynman参数（勿与第十章以前的时空坐标混淆）。（1）式证明如下：在恒等式

$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\int_A^B\frac{d\xi}{\xi^2}$$

里令$\xi=Ax+B(1-x)$即得：

$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\int_1^0\frac{(A-B)dx}{[Ax+B(1-x)]^2}=\int_0^1\frac{dx}{[Ax+B(1-x)]^2}$$

（1）式得证。

$$\frac{1}{A^2B}=\frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(2)\Gamma(1)}\int_0^1\frac{x^{2-1}(1-x)^{1-1}dx}{[Ax+B(1-x)]^{2+1}}, \tag{2}$$

将公式（1）对$A$微分即得公式（2）。同样，将公式(1)对$B$微分又可得公式(3)：

$$\frac{1}{AB^2}=\frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(1)\Gamma(2)}\int_0^1 dx\frac{x^{1-1}(1-x)^{2-1}}{[Ax+B(1-x)]^{1+2}}, \tag{3}$$

现设：对正整数$m$和$n$有下式成立：

$$\frac{1}{A^mB^n}=\frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)}\int_0^1 dx\frac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}}{[Ax+B(1-x)]^{m+n}} \tag{4}$$

上式两边对$A$求导，并利用$\Gamma$函数之性质$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$，便得到：

$$\frac{1}{A^{m+1}B^n}=\frac{\Gamma[(m+1)+n]}{\Gamma(m+1)\Gamma(n)}\int_0^1 dx\frac{x^{(m+1)-1}(1-x)^{n-1}}{[Ax+B(1-x)]^{(m+1)+n}},$$

同样，将（4）式两边对$B$求导可得：

$$\frac{1}{A^m B^{n+1}}=\frac{\Gamma[m+(n+1)]}{\Gamma(m)\Gamma(n+1)}\int_0^1 dx\,\frac{x^{m-1}(1-x)^{(n+1)-1}}{[Ax+B(1-x)]^{m+(n+1)}},$$

通过以上的归纳，可以确信（4）式是一个普遍公式，而（2）式和（3）式则是（4）式的特例。

利用公式（4）可以证明如下诸公式：

$$\frac{1}{ABC}=\int_0^1 dx\int_0^1 2y\,dy\frac{1}{\{[Ax+B(1-x)]y+c(1-y)\}^3},\tag{5}$$

$$\frac{1}{ABCD}=\int_0^1 dx\int_0^1 2y\,dy\int_0^1 3z^2\,dz\,\frac{1}{\{\{[Ax+B(1-x)]y+c(1-y)\}z+D(1-z)\}^4},\tag{6}$$

还可以写出分母上有五个或更多因子的公式。在（5）式和（6）式中的$x$、$y$、$z$都是Feynman参数。我们来证明（5）式而把（6）式以后诸式的证明留给读者：

$$\frac{1}{ABC}=\int_0^1 dx\,\frac{1}{[Ax+B(1-x)]^2 C}$$

$$\overset{(4)式}{=}\int_0^1 dx\left\{\frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(2)\Gamma(1)}\int_0^1 dy\,\frac{y^{2-1}(1-y)^{1-1}}{\{[Ax+B(1-x)]y+C(1-y)\}^{2+1}}\right\}$$

$=$（5）式右边。

至此，（5）式得证。读者可用类似方法去证明（6）式及其以后诸公式。

## （二）参数化方法的计算公式

与Feynman参数法不同，不采取合并分母因子的办法，而是把传播函数的有理化分母（它的倒数）表示为对参数$\alpha$的积分：

$$\frac{1}{p^2+m^2-i\varepsilon}=i\int_0^\infty e^{-i\alpha(p^2+m^2-i\varepsilon)}d\alpha,\tag{7}$$

$-i\varepsilon$是粒子质量平方里包含的一个小虚部〔回忆第五章（5.175）式的推导过程〕。这个小虚部提供一个阻尼因子$e^{-\alpha\varepsilon}$，保证使积分在上限收敛。今后凡$-i\varepsilon$对积分有影响之处就将它显示地写出，反之，当它对计算结果没有影响时，就把它隐含在$m^2$里。

在把传播子分母表示为（7）式的积分以后，常常需要计算如下形式的收敛积分。

$$\int_0^\infty d\alpha_1\int_0^\infty d\alpha_2\cdots\cdots\int_0^\infty d\alpha_L f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots\alpha_L)\tag{8}$$

为了完成此积分需作适当之变数替换。为了找到变数替换法则，首先令

$$\alpha_i = \eta x_i \qquad i = 1, 2, \cdots\cdots L \tag{9}$$

由（9）式易得$d\alpha_1 d\alpha_2 \cdots\cdots d\alpha_L = \eta^L dx_1 dx_2 \cdots\cdots dx_L$，设$\eta$的取值范围是$0 \leqslant \eta < \infty$，则按（8）式和（9）式有$0 \leqslant x_i \leqslant 1$；由于$\alpha_i$的变化范围是$0 \leqslant \alpha_i < \infty$，故在$\eta$的取值范围内必定存在$\delta(\eta - \alpha_1 - \alpha_2 - \cdots\cdots \alpha_L)$的宗量为零之点。换言之，我们有：

$$\int_0^\infty d\eta \delta(\eta - \alpha_1 - \alpha_2 - \cdots\cdots - \alpha_L) = 1 \tag{10}$$

把（10）式插入（8）式积分号下：

$$\int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 \cdots\cdots \int_0^\infty d\alpha_L f(\alpha_1, \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_L)$$

$$= \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 \cdots\cdots \int_0^\infty d\alpha_L \int_0^\infty d\eta \delta(\eta - \alpha_1 - \alpha_2 \cdots\cdots - \alpha_L) f(\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots \alpha_L),$$

再把（9）式代入上式：

$$\int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 \cdots\cdots \int_0^\infty d\alpha_L f(\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots \alpha_L)$$

因积分收敛，积分顺序可以调换

$$= \int_0^\infty d\eta \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 \cdots\cdots \int_0^\infty d\alpha_L \delta(\eta - \alpha_1 - \alpha_2 - \cdots\cdots - \alpha_L) f(\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots \alpha_L)$$

$$= \int_0^\infty \eta^L d\eta \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots\cdots \int_0^1 dx_L \delta[\eta(1 - x_1 - x_2 - \cdots\cdots - x_L)] f(\eta, x_1, x_2, \cdots\cdots x_L)$$

$\delta(ax) = \frac{1}{a}\delta(x)$，当$a > 0$

$$= \int_0^\infty \eta^{L-1} d\eta \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots\cdots \int_0^1 dx_L \delta(1 - x_1 - x_2 - \cdots\cdots - x_L) f(\eta, x_1, x_2, \cdots\cdots x_L)$$

在此式右边完成对$x_L$的积分，消去$\delta(1 - x_1 - x_2 - \cdots\cdots - x_L)$，但因$x_1, x_2, \cdots\cdots x_{L-1}$也是积分变数，故必须要求在所有$x_i$的变域内存在$\delta(1 - x_1 - x_2 - \cdots\cdots x_L)$的宗量零点，换言之，上式对各个$x_i$的积分并不是彼此独立的，当同时完成对$x_1, x_2, \cdots\cdots x_L$的积分时，要有下式成立：

$$x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_L = 1, \tag{11}$$

为此，必须满足如下诸条件：完成积分$\int dx_L$后应有

$$x_L = 1 - x_1 - x_2 - \cdots\cdots - x_{L-1},$$

完成积分$\int dx_{L-1}$后应有

$$x_{L-1} = 1 - x_1 - x_2 - \cdots\cdots - x_{L-2},$$

依此类推，完成积分$\int dx_2$后应有

$$x_2 = 1 - x_1.$$

若同时完成对$x_2, x_3\cdots\cdots x_L$的积分，就有：

$$x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_L = x_1 + (1 - x_1) + (1 - x_1 - x_2) + \cdots\cdots$$
$$+ (1 - x_1 - x_2 - \cdots\cdots - x_{L-2}) + (1 - x_1 - x_2 - \cdots\cdots - x_{L-1}) = 1.$$

此式就是（11）式。根据以上分析，我们确定了在完成积分$\int dx_L$，消去δ函数以后，各个$x_i$的积分限：

$$0 \leqslant x_1 \leqslant 1,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 1 - x_1, \cdots\cdots,\ 0 \leqslant x_{L-1} \leqslant 1 - x_1 - x_2, - \cdots\cdots - x_{L-2}.$$

因此，我们的积分变数替换是要使下式成立：

$$\int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 \cdots\cdots \int_0^\infty d\alpha_L f(\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots \alpha_L)$$
$$= \int_0^\infty \eta^{L-1} d\eta \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \int_0^{1-x_1-x_2} dx_3 \cdots\cdots \int_0^{1-x_1-x_2-\cdots\cdots-x_{L-2}} dx_{L-1} f(\eta, x_1, x_2, \cdots\cdots x_{L-1})$$

比较此式两边就得到在（8）式里进行变数替换的一般法则：

$$\alpha_l = x_l \eta, \quad l = 1, 2, \cdots\cdots L-1, \tag{12$a$}$$

$$\alpha_L = (1 - x_1 - x_2 - \cdots\cdots - x_{L-1})\eta, \tag{12$b$}$$

$$d\alpha_1 d\alpha_2 \cdots\cdots d\alpha_L = J d\eta dx_1 dx_2 \cdots\cdots dx_{L-1}, \tag{13$a$}$$

其中，$J$是Jacobi行列式，其值为

$$J = \eta^{L-1} \text{〔注1〕} \tag{13$b$}$$

新变数的积分范围如下：

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leqslant \eta < \infty,\ 0 \leqslant x_1 \leqslant 1,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 1 - x_1, \cdots\cdots \\ 0 \leqslant x_{L-1} \leqslant 1 - x_1 - x_2 - \cdots\cdots - x_{L-2} \end{array}\right\} \tag{14}$$

## （三）n维空间γ矩阵运算

在维数正规化里，需要把4维Minkowski空间（记为M）的γ矩阵运算推广到$n$维Minkowski空间（记为$M_n$）。$n$可为任意正数，也可为复数。但为方便起见，这里假定$n$为小于4的任意正整数。设$\gamma_\mu$为$n \times n$矩阵，$\mu = 1, 2, \cdots\cdots n$，第$n$维是时间。$\gamma_\mu$满足

〔注1〕 也可从（12）式直接求得（13）$b$式。

如下代数关系：

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu} I_n, \tag{15}$$

其中，$I_n$是 $n\times n$ 单位矩阵．由上式可得

$$\gamma_\mu\gamma_\mu = nI_n. \tag{16}$$

由（15）、（16）式可以证明以下诸式：

$$\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\mu = 2(\in -1)\gamma_\nu, \quad (\in = 2 - \frac{n}{2}) \tag{17a}$$

$$\gamma_\mu\gamma\cdot p\gamma_\mu = 2(\in -1)\gamma\cdot p. \tag{17b}$$

$$\gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma_\tau\gamma_\mu = 4\delta_{\lambda\tau} - 2\in\gamma_\lambda\gamma_\tau, \tag{18a}$$

$$\gamma_\mu\gamma\cdot p\gamma\cdot q\gamma_\mu = 4p\cdot q - 2\in\gamma\cdot p\gamma\cdot q. \tag{18b}$$

$$\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\mu = -2\gamma_\rho\gamma_\nu\gamma_\alpha + 2\in\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\rho, \tag{19a}$$

$$\gamma_\mu\gamma\cdot p\gamma\cdot q\gamma\cdot k\gamma_\mu = -2\gamma\cdot k\gamma\cdot q\gamma\cdot p + 2\in\gamma\cdot p\gamma\cdot q\gamma\cdot k. \tag{19b}$$

此外，定义以下二式：

$$\mathrm{Tr} I_n = f(n), \tag{20a}$$

$$\lim_{n\to 4} f(n) = 4. \tag{20b}$$

由此二式和（15）、（16）两式又可得到如下求迹公式：

$$\mathrm{Tr}\gamma_\mu\gamma_\nu = f(n)\delta_{\mu\nu} \tag{21}$$

$$\mathrm{Tr}\ （奇数个\gamma矩阵之积）= 0 \tag{22}$$

$$\mathrm{Tr}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma = f(n)[\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho} - \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma}], \tag{23a}$$

$$\mathrm{Tr}\gamma\cdot a_1\gamma\cdot a_2\gamma\cdot a_3\gamma\cdot a_4 = f(n)[a_1\cdot a_2 a_3\cdot a_4 - a_1\cdot a_3 a_2\cdot a_4 + a_1\cdot a_4 a_2\cdot a_3]. \tag{23b}$$

不难看出，以上公式当 $n\to 4$ 时均过渡到 4 维空间的相应公式〔见附录一及(1.74)式〕．

我们这里给出（17)$a$ 式、（19)$a$ 式和（23)$a$ 式的证明，其余公式可用类似方法证明：

证明（17)$a$式．利用（15）式：

$$\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\mu = \gamma_\mu(2\delta_{\nu\mu} - \gamma_\mu\gamma_\nu) = 2\gamma_\nu - \gamma_\mu\gamma_\mu\gamma_\nu$$

$$\xrightarrow{(16)式} = 2\gamma_\nu - n\gamma_\nu = 2(1 - \frac{n}{2})\gamma_\nu = 2(\in -1)\gamma_\nu.$$

证明（19)$a$式：

$$\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\mu \overset{(15)式}{=} \gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu(2\delta_{\rho\mu} - \gamma_\mu\gamma_\rho) = 2\gamma_\rho\gamma_\alpha\gamma_\nu - \gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\rho$$

$$\xrightarrow{\alpha\neq\nu} = -2\gamma_\rho\gamma_\nu\gamma_\alpha - \gamma_\mu\gamma_\alpha(2\delta_{\nu\mu} - \gamma_\mu\gamma_\nu)\gamma_\rho$$

$$= -2\gamma_\rho\gamma_\nu\gamma_\alpha - 2\gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\rho + \gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho$$

α≠ν，利用(17)a式

$$= -2\gamma_\rho\gamma_\nu\gamma_\alpha + 2\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\rho + 2(\in -1)\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\rho$$

$$= -2\gamma_\rho\gamma_\nu\gamma_\alpha + 2\in\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\rho.$$

倘若利用（18)a式，可使上述证明大大简化，请读者去做。

证明（23)a式：

$$\mathrm{Tr}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma = \mathrm{Tr}\gamma_\sigma\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho = \mathrm{Tr}[(2\delta_{\mu\sigma} - \gamma_\mu\gamma_\sigma)\gamma_\nu\gamma_\rho]$$

(21)式

$$= 2\delta_{\mu\sigma}\mathrm{Tr}\gamma_\nu\gamma_\rho - \mathrm{Tr}\gamma_\mu\gamma_\sigma\gamma_\nu\gamma_\rho = 2f(n)\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho} - \mathrm{Tr}\gamma_\mu\gamma_\sigma\gamma_\nu\gamma_\rho, \tag{24}$$

按照（24）式可直接写出以下二式：

$$\mathrm{Tr}\gamma_\mu\gamma_\sigma\gamma_\nu\gamma_\rho = 2f(n)\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - \mathrm{Tr}\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\nu, \tag{25}$$

$$\mathrm{Tr}\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\nu = 2f(n)\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma} - \mathrm{Tr}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma, \tag{26}$$

把（26）式代入（25）式，再把所得式代入（24）式即得待证式（23)a。

## （四）积分公式

$$\int \frac{x^m}{(ax^n+c)^l}dx = \frac{x^{m+1}}{nc(l-1)(ax^n+c)^{l-1}} - \frac{m-(l-1)n+1}{nc(l-1)}\int \frac{x^m dx}{(ax^n+c)^{l-1}},$$

（式中，$n>0$，$l>0$） (27)

$$\int \frac{x}{ax+b}dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\ln(ax+b), \tag{28}$$

$$\int \ln ax\,dx = x\ln ax - x, \tag{29}$$

$$\int x\ln ax\,dx = \frac{x^2}{2}\ln ax - \frac{x^2}{4} \tag{30}$$

$$\int \frac{x\,dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{2a}\ln(ax^2+bx+c) - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}, \tag{31}$$

$$\int \frac{x^n dx}{ax^2+bx+c} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)a} - \frac{c}{a}\int \frac{x^{n-2}dx}{ax^2+bx+c}$$

$$-\frac{b}{a}\int \frac{x^{n-1}dx}{ax^2+bx+c},\quad n>1 \tag{32}$$

以上（27）式一（32）式可查阅任何一本数学手册或积分表。

$$\int_0^\infty \frac{d\eta}{\eta}(e^{i\eta A} - e^{i\eta B}) = \ln\frac{B}{A} \tag{33}$$

其中，$A$和$B$均含有小虚部$+i\varepsilon$。此式取自N.N. BOGOLIUBOV, D.V. SHIRKOV,

《Quantum Fields》 p338, Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., 1983.

4维高斯积分公式：

$$\int d^4 p e^{i(ap^2+2b\cdot p)} = \frac{\pi^2}{i}\frac{1}{a^2}e^{-ib^2/a}. \tag{34}$$

$n$维高斯积分公式（$n$为正整数）

$$\int d^n p e^{i(ap^2+2b\cdot p)} = \frac{\pi^2}{i}\frac{1}{a^2}\left(\frac{-ia}{\pi}\right)^{\epsilon} e^{-ib^2/a}. \tag{35}$$

(35) 式中的$p$、$b$都是$n$维矢量。

对 (34) 式证明如下：

$$\int d^4 p e^{i(ap^2+2b\cdot p)} = \int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{j=1}^{3} dp_j e^{i(ap_j^2+2b_jp_j)} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 e^{-i(ap_0^2+2b_0p_0)}, \tag{36}$$

我们从一维高斯积分公式出发〔注1〕：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{-i\alpha\xi^2+i\beta\xi} = \left(\frac{\pi}{i\alpha}\right)^{1/2} e^{-\beta^2/4i\alpha}. \tag{37}$$

因此，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp_j e^{i(ap_j^2+2b_jp_j)} \overset{\boxed{a'=-a}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_j e^{-ia'p_j^2+i(2b_j)p_j}$$

$$=\left(\frac{\pi}{ia'}\right)^{1/2} e^{-4b_j^2/4ia'} = \left(\frac{\pi}{-ia}\right)^{1/2} e^{-ib_j^2/a}, \tag{38}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 e^{-iap_0^2+i(-2b_0)p_0} = \left(\frac{\pi}{ia}\right)^{1/2} e^{+ib_0^2/a}, \tag{39}$$

把 (38)、(39) 一并代入 (36) 即得 (34) 式。

对 (35) 式证明如下：原式左边可写为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{j=1}^{n-1} dp_j e^{-i(-a)p_j^2+i(2b_j)p_j} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 e^{-iap_0^2+i(-2b_0)p_0}$$

$$\overset{\boxed{(37)式}}{=} \left(\frac{\pi}{i(-a)}\right)^{\frac{n-1}{2}} \exp\left[-i\sum_{j=1}^{n-1}\frac{b_j^2}{a}\right]\left(\frac{\pi}{ia}\right)^{1/2} e^{ib_0^2/a} = \frac{\pi^{n/2}}{i^{(3n-2)/2}}\frac{1}{a^{n/2}}e^{-ib^2/a}$$

= 待证式右边。

〔注1〕 见R. P. Feynman, A. R. Hibbs《Quantum Mechanics and Path Integrals》, pp356—360, McGraw-Hill, Inc., 1965. 我们这里将此书公式稍作变化：$a\to -i\alpha$, $b\to i\beta$,

关于Γ函数的积分定义：

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt,\quad \mathrm{Re}(z)>0 \tag{40}$$

也可改变上式之积分路线，使之成为从 $t=0$ 到 $t=\infty e^{i\theta}$ 的一条直线，$|\theta|<\pi/2$，这时（40）式成为：

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty e^{i\theta}}e^{-t}t^{z-1}dt,\quad \mathrm{Re}(z)>0 \tag{41}$$

（40）和（41）两式取自王竹溪、郭敦仁，《特殊函数概论》，p105，科学出版社，1965。